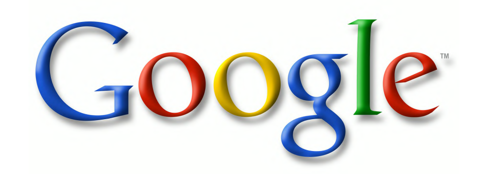
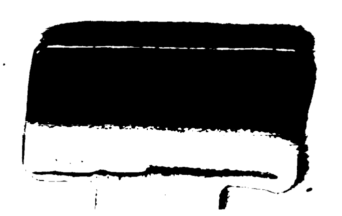






2144

Alexander Ziwet

4.

# DIE DYNAMIK

DER

# SYSTEME STARRER KÖRPER

IN ZWEI BÄNDEN MIT ZAHLREICHEN BEISPIELEN


VON

**EDWARD JOHN ROUTH,**

SC. D., LL. D., F. R. S., ETC.;

EHRENMITGLIED VON PETERHOUSE-COLLEGE, CAMBRIDGE; MITGLIED DES SENATS DER UNIVERSITÄT LONDON.


---

AUTORISIERTE DEUTSCHE AUSGABE


VON

**ADOLF SCHEPP,**

PREMIERLIEUTENANT A. D. ZU WIESBADEN.


---

MIT ANMERKUNGEN VON PROF. DR. FELIX KLEIN ZU GÖTTINGEN.

---

ZWEITER BAND:

## DIE HÖHERE DYNAMIK.

MIT 38 FIGUREN IM TEXT.




LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1898.

Alex. Ziwet
gt.
2 vols.
8-29-1922

Der Verfasser sagt in der Vorrede zur fünften Auflage seines Buches: The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, being part II of a treatise on the whole subject with numerous examples; by Edward John Routh, fith edition, revised and enlarged, London: Macmillan and Co. and New-York, 1892 unter Anderem:

„Auch in diesem Band, wie in dem ersten, sind die einzelnen Kapitel möglichst unabhängig voneinander gehalten worden, um den Leser in den Stand zu setzen, sich seinen Studienplan selbständig auszuwählen. Ueberall sind historische Notizen hinzugefügt worden und bei jedem Theorem und Problem wurde der Name des Schriftstellers angegeben, der es zuerst aufgestellt bez. gelöst hat.

„Die zahlreichen Beispiele sind zum Theil dazu bestimmt, zur Uebung zu dienen, zum Theil sollen sie die im Text gegebenen Theorien erläutern und vervollständigen. Anstatt den Text mit den vielen Anwendungen eines Princips zu überladen, schien es uns vortheilhafter, sie als Beispiele zu bringen und die Auflösung durch geeignete Hinweise zu erleichtern. Besondere Sorgfalt wurde auf die Vermeidung von Fehlern bei den überall angegebenen Resultaten verwendet."

Da von dem zweiten Band die sechste Auflage noch nicht erschienen ist, so hat der Verfasser die Freundlichkeit gehabt, uns seine Vorarbeiten zu dieser Auflage, zahlreiche Zusätze und Aenderungen der fünften, zur Verfügung zu stellen.

Sehr wesentlich war es, dass bei der Herstellung der deutschen Ausgabe Herr Prof. Dr. Klein in Göttingen mitgewirkt hat, dem auch die Anmerkungen am Ende des Buches zu verdanken sind. An der Durchsicht der Correcturbogen haben sich die Herren Prof. Dr. Sommerfeld in Clausthal, Dr. Liebmann in Göttingen, sowie der Verfasser, Herr Dr. Routh, gütigst betheiligt. Allen diesen Herren sprechen wir hiermit unsern verbindlichsten Dank aus.

Wiesbaden, den 30. Juni 1898.

**A. Schepp.**

# Inhaltsverzeichniss.

## Kapitel V.

### Die Bewegung der Körper unter der Einwirkung beliebiger Kräfte.



## Kapitel VI.

### Die Beschaffenheit der durch lineare Gleichungen gegebenen Bewegung und die Stabilitätsbedingungen.

## Kapitel VII.

### Freie und erzwungene Schwingungen von Systemen.



## Kapitel VIII.

### Bestimmung der Integrationsconstanten durch die Anfangsbedingungen.



## Kapitel IX.

### Anwendung der Rechnung mit endlichen Differenzen.

## Kapitel X.

### Anwendung der Variationsrechnung.



## Kapitel XI.

### Präcession und Nutation.

Kapitel XII.

**Die Bewegung des Mondes um seinen Schwerpunkt.**



Kapitel XIII.

**Die Bewegung eines Fadens oder einer Kette.**



Kapitel XIV.

**Die Bewegung einer Membran.**

## Noten des Verfassers.

## Kurze Angabe des Inhaltes des ersten Bandes.



---

### Berichtigung! ✓

Auf Seite 331 Zeile 15 von unten wird das Princip $\delta\int L\,dt = 0$ irrthümlicher Weise Jacobi zugeschrieben; es rührt von Hamilton (*Phil. Trans.*, 1034) her, erhielt aber seinen Namen zuerst bei Jacobi a. a. O.

Auf S. 482 und 487 lese man „Smith's Prize" statt „Smith's Price".

---

## Kapitel I.

# Bewegliche Axen und relative Bewegung.

## Bewegliche Axen.

§ 1. In vielen Problemen der Dynamik sind die Bezugsaxen, die für den Anfangszustand der Bewegung passen, wenig geeignet, den betrachteten Körper während des ganzen Verlaufs seiner Bewegung zu verfolgen. Es ist daher manchmal von Vortheil, Axen zu benutzen, die sich selbst im Raum derart bewegen, dass sie beständig solche Lagen einnehmen, welche für die augenblickliche Lage des Körpers am passendsten sind. So zerlegen wir in der Dynamik der Massenpunkte, um einen einfachen Fall anzuführen, die Kräfte oft in der Richtung der Tangente und der Normalen an die Bahn. Dies ist aber in Wirklichkeit dasselbe, als wenn wir ein System Cartesischer Axen benutzten, die sich so bewegen, dass sie der Tangente und Normalen beständig parallel bleiben. Diese Theorie wurde in Bd. 1, Kap. 4 verallgemeinert und die Bewegung auf zwei ganz beliebige Linien bezogen, die sich in einer Ebene bewegen. Unsre Aufgabe ist jetzt, die Theorie noch weiter auszudehnen. Wir werden die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Massenpunkte und alsdann die der starren Körper in Bezug auf ganz beliebige rechtwinklige Axen besprechen, die sich so bewegen, wie es uns am besten passt.

§ 2. Ertheilen wir den Axen, auf welche der Körper bezogen wird, eine Bewegung, so müssen wir offenbar irgend welche Mittel haben, die Lage und Bewegung dieser Axen im Raum zu bestimmen. Dies lässt sich durch ein zweites Axensystem erreichen, welches selbst im Raum festliegt und auf welches wir die beweglichen Axen beziehen können. Ein solches Verfahren hat Euler eingeschlagen, der in den Gleichungen, welche gewöhnlich seinen Namen tragen (Bd. 1, Kap. 5), zwei Axensysteme benutzt. Die Vortheile jedoch, die sich aus beweglichen Axen ziehen lassen, werden sehr vermindert, wenn man während der ganzen Bewegung noch ein zweites festes Axensystem benutzen muss. Aus diesem Grund *werden wir jetzt die Bewegung der beweglichen Axen durch die Winkelgeschwindigkeiten* $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

*um sie selbst bestimmen.* Mit anderen Worten, wir betrachten die Axen als ein materielles System von drei rechtwinkligen Geraden, deren Bewegung in jedem Augenblick durch drei gleichzeitige Winkelgeschwindigkeiten um augenblicklich mit ihnen zusammenfallende Axen gegeben ist. Auf diese Weise benutzen wir feste Axen nur am Anfang oder Ende der Lösung und nur auf eine solche Art, wie sie uns am besten passt.

§ 3. Um zu verstehen, wie die Bewegung der Körper auf bewegliche Axen bezogen wird, wollen wir zuerst annehmen, der Körper drehe sich um einen festen Punkt. Wir nehmen diesen Punkt zum Coordinatenanfang und bestimmen die Bewegung des Körpers durch die drei Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ um die Axen grade so, als lägen sie im Raum fest. Die Lage des Körpers zur Zeit $t + dt$ lässt sich aus der zur Zeit $t$ dadurch construiren, dass man den Körper der Reihe nach die Winkel $\omega_1 dt$, $\omega_2 dt$, $\omega_3 dt$ um die augenblickliche Lage der Axen beschreiben lässt. Man muss aber beachten, dass $\omega_3 dt$ dabei nicht den Winkel angibt, welchen der Körper in Bezug auf die $xz$-Ebene beschrieben hat, sondern in Bezug auf eine im Raum festliegende Ebene, welche durch die augenblickliche Lage der $z$-Axe geht. Der Winkel, der bez. der $xz$-Ebene beschrieben wurde, ist vielmehr $(\omega_3 - \theta_3)dt$.

Ist ein fester Punkt nicht vorhanden, so verfahren wir so, wie in Bd. 1, Kap. 5 erklärt wurde. Wir stellen die Bewegung des Körpers durch die sechs Componenten $u$, $v$, $w$; $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, auf irgend einen Anfangspunkt bezogen, dar und behandeln dabei die Axen, als lägen sie für den Augenblick fest. Hier sind $u$, $v$, $w$ die Componenten der Geschwindigkeit des Coordinatenanfangs oder des Reductionspunktes in der Richtung der Axen und $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ die Componenten der Winkelgeschwindigkeit des Körpers um dieselben Axen. Ebenso ist die Bewegung der Axen durch die Bewegungscomponenten $p$, $q$, $r$; $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ gegeben, wobei die beweglichen Axen selbst die augenblicklichen Bezugsaxen sind.

In den meisten Fällen jedoch lässt man die Axen um einen Punkt rotiren, der entweder festliegt oder doch so behandelt werden kann, als läge er fest. Ihre Richtung im Raum lässt man variiren, wie es dem Zweck entspricht, der grade erreicht werden soll. Es ist dann $p$ sowohl als $q$ und $r$ gleich Null. Da jeder Punkt auf die in Bd. 1, Kap. 4, § 204, erklärte Art zur Ruhe gebracht werden kann, so beschränkt diese Annahme, welche im Allgemeinen gemacht werden wird, unsre Auswahl der Axen in der That nicht.

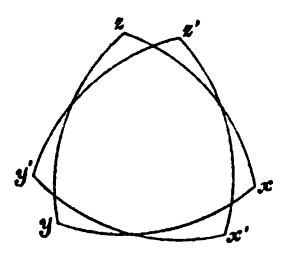
§ 4. **Die Fundamentalaufgabe.** *Ein System rechtwinkliger Axen bewegt sich auf beliebige Art um einen festen Punkt O; man soll die kinematischen Beziehungen zwischen diesen Axen und einem System von im*

*Raum festliegenden Axen feststellen, die zur Zeit $t$ mit ihnen zusammenfallen.*

$Ox$, $Oy$, $Oz$ seien die Lagen der beweglichen Axen zur Zeit $t$. Nach dem Intervall $dt$ nehmen sie neue Lagen ein, die wir mit $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$ bezeichnen wollen. Die Aenderung der Lage kann durch die Rotation $\theta\, dt$ um eine Momentanaxe dargestellt werden, die $OI$ sein möge. $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ seien die Componenten der Winkelgeschwindigkeit $\theta$, so dass sich die Axen von ihren Lagen $Ox$, $Oy$, $Oz$ zur Zeit $t$ in die Lagen $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$ zur Zeit $t + dt$ bewegen, indem sie die drei Rotationen $\theta_1 dt$, $\theta_2 dt$, $\theta_3 dt$ um $Ox$, $Oy$, $Oz$ in beliebiger Reihenfolge ausführen.

Wir wollen ferner mit dem Symbol $R$ eine Grösse mit Richtung oder einen *Vector* darstellen, wie z. B. eine Kraft, eine Geschwindigkeit, das Moment eines Paares um seine Axe oder eine Winkelbewegungsgrösse. Wir wollen annehmen, der Vector könne nach dem Parallelogrammgesetz zerlegt und zusammengesetzt werden. Seine Componenten, parallel zu den drei Axen $Ox$, $Oy$, $Oz$, mögen die Symbole $U$, $V$, $W$ darstellen. In der Zeit $dt$ ändert der Vector $R$ seine Grösse und Richtung; in derselben Zeit haben sich auch die Axen geändert. Die Componenten des Vectors zur Zeit $t + dt$ in der jetzigen Richtung der Bezugsaxen, d. h. in den Richtungen $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$, sind $U + dU$, $V + dV$, $W + dW$.

Wir haben den Zuwachs zu finden, welchen die Componente in der Richtung der im Raum festliegenden $Ox$-Axe in der Zeit $dt$ erfährt. Man beschreibe eine Kugel mit der Einheit als Radius, deren Mittelpunkt $O$ ist und die Axen mögen die Kugel in $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$ treffen. Man erhält so zwei sphärische Dreiecke $xyz$, $x'y'z'$, deren Seiten sämmtlich rechte Winkel sind. Die Componente des Vectors zur Zeit $t + dt$ in der Richtung der $Ox$-Axe ist




$$(U + dU) \cos xx' + (V + dV) \cos xy' + (W + dW) \cos xz'.$$

Die Rotationen um $Ox$ und $Oy$ können den Bogen $xy$ nicht ändern, dagegen bewegt die Rotation um $Oz$ den Punkt $y'$ von $x$ um den Bogen $\theta_3 dt$ hinweg. Ebenso ändern die Rotationen um $Ox$, $Oz$ den Bogen $xz$ nicht; sondern nur die Rotation um $Oy$ bewegt $z'$ nach $x$ hin durch den Bogen $\theta_2 dt$. Daher ist

$$xy' = xy + \theta_3 dt,$$
$$xz' = xz - \theta_2 dt.$$

Ferner unterscheidet sich der Cosinus des Bogens $xx'$ von der Einheit nur um das Quadrat einer kleinen Grösse. Substituirt man, so ergibt sich die Componente des Vectors zur Zeit $t + dt$ längs $Ox$ gleich

$$U + dU - V\theta_3 dt + W\theta_2 dt$$

und die Zuwachsgeschwindigkeit der Componente des Vectors in der Richtung $Ox$

$$U_1 = \frac{dU}{dt} - V\theta_3 + W\theta_2.$$

Ebenso findet man die Zuwachsgeschwindigkeiten der Componenten in den Richtungen $Oy$, $Oz$

$$V_1 = \frac{dV}{dt} - W\theta_1 + U\theta_3,$$

$u_1 = \dot{u} + w \wedge u$

$$W_1 = \frac{dW}{dt} - U\theta_2 + V\theta_1.$$

Wir haben dabei in Wirklichkeit zwei Axensysteme benutzt. Das eine System $Ox$, $Oy$, $Oz$ bewegt sich um den festen Anfang der Coordinaten dem durch die Winkelgeschwindigkeiten $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ bestimmten Gesetz gemäss; es sind dies die Bezugsaxen. Das zweite System fällt mit $Ox$, $Oy$, $Oz$ zur Zeit $t$ zusammen, liegt aber im Raum fest und wird daher von den Bezugsaxen bei ihrer Bewegung während der Zeit $dt$ zurück gelassen. Die Symbole $U$, $V$, $W$ stellen die Componenten des Vectors in der Richtung der *beiden* Axensysteme zur Zeit $t$ dar; die Symbole $U + dU$, $V + dV$, $W + dW$ dagegen die Componenten in der Richtung *der beweglichen Axen* zur Zeit $t + dt$ und $U + U_1 dt$, $V + V_1 dt$, $W + W_1 dt$ die Componenten nach den *festen Axen* zu derselben Zeit $t + dt$.

§ 5. **Wichtige Anwendungen.** Man kann diesen allgemeinen Satz jetzt auf verschiedene Vectoren anwenden[1]).

(1) Ist der Vector $R$ der Radiusvector eines sich bewegenden Punktes $P$, so stellen $U$, $V$, $W$ die Coordinaten $x, y, z$ vor, während $U_1$, $V_1$, $W_1$ die Componenten der Geschwindigkeit im Raum sind. Wir bezeichnen sie jetzt mit $u$, $v$, $w$. Man hat daher

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} - y\theta_3 + z\theta_2 \\ v &= \frac{dy}{dt} - z\theta_1 + x\theta_3 \\ w &= \frac{dz}{dt} - x\theta_2 + y\theta_1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (1).$$

(2) Ist der Vector $R$ die Geschwindigkeit eines sich bewegenden Punktes $P$, so stellen $U$, $V$, $W$ die Componenten $u$, $v$, $w$ der Ge-

1) Die Gleichungen unter (1), (2), (3) hat in dieser Form der verstorbene Prof. Slesser (*Cambridge Quarterly Journal*, Bd. 2, 1858) aufgestellt, welchem der Verfasser vorher von den beiden speciellen Fällen in § 12, sowie von ihrer Anwendung auf die Bewegung von Kugeln Mittheilung gemacht hatte. Auf eine andere Art hat sie Rev. P. Frost in der folgenden Nummer des *Quarterly Journal* bewiesen. Die sämmtlichen vier Reihen von Gleichungen veröffentlichte R. B. Hayward in Bd. 10 der *Cambridge Transactions*, 1858. Aehnliche Resultate findet man auch in einer Arbeit von Liouville in Liouville's Journal, 1858.

schwindigkeit dar, während $U_1$, $V_1$, $W_1$ die Beschleunigungen sind. Wir bezeichnen sie mit $X$, $Y$, $Z$. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{du}{dt} - v\theta_3 + w\theta_2 \\ Y &= \frac{dv}{dt} - w\theta_1 + u\theta_3 \\ Z &= \frac{dw}{dt} - u\theta_2 + v\theta_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

(3) Ist der Vector $R$ die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ eines Körpers, so sind $U$, $V$, $W$ die Componenten von $\omega$ um die beweglichen Axen; sie mögen $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ heissen. Sind dann $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ die Componenten um die festen Axen, so wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt} &= \frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2\theta_3 + \omega_3\theta_2 \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= \frac{d\omega_2}{dt} - \omega_3\theta_1 + \omega_1\theta_3 \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1\theta_2 + \omega_2\theta_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

(4) Ist der Vector $R$ die Winkelbewegungsgrösse eines Körpers und sind $h_1$, $h_2$, $h_3$ ihre Componenten um die beweglichen Axen, $h_x$, $h_y$, $h_z$ die Componenten um die festen Axen, so ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{dh_x}{dt} &= \frac{dh_1}{dt} - h_2\theta_3 + h_3\theta_2 \\ \frac{dh_y}{dt} &= \frac{dh_2}{dt} - h_3\theta_1 + h_1\theta_3 \\ \frac{dh_z}{dt} &= \frac{dh_3}{dt} - h_1\theta_2 + h_2\theta_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Befindet sich der Anfangspunkt der Coordinaten ebenfalls in Bewegung, so muss man die Gleichungen etwas abändern. Es seien $(p, q, r)$ die Componenten der Geschwindigkeit des Anfangspunktes in den Richtungen der Axen; $u$, $v$, $w$ die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes im Raum, d. h. auf im Raum festliegende Axen bezogen. Man hat dann $p$, $q$ bez. $r$ zu den in (1) gegebenen Ausdrücken für $u$, $v$, $w$ zu addiren. Nimmt man an, $(u, v, w)$ führen fort, die Geschwindigkeiten auf im Raum festliegende Axen darzustellen, so bleiben die Ausdrücke (2) unverändert. Bei derselben Annahme muss man

$$m(-vr + wq), \quad m(-wp + ur) \quad \text{bez.} \quad m(-uq + vp)$$

zu den in (4) gegebenen Ausdrücken für $dh_x/dt$ etc. addiren, wobei $m$ die Masse des Körpers ist.

Um es zu beweisen, wollen wir die Theile von $dh_x$ und $dh_1$, welche der Translations- und Rotationsbewegung der Axen zu verdanken sind, getrennt bestimmen. Die Theile der letzteren sind durch die Formeln (4) gegeben; um die der ersteren zu finden, seien $H_x, H_y, H_z$ die Winkelbewegungsgrössen um parallele, durch den Schwerpunkt gehende Axen. Nach Bd. 1, § 74 ist dann

$$h_x = h_1 = H_x - mvz + mvy.$$

Den Differentialquotienten $dh_x/dt$ erhält man daraus, wenn man $r + dz/dt$, $q + dy/dt$ für $dz/dt$ und $dy/dt$ schreibt, weil dies die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes im Raum sind. Den Differentialquotienten $dh_1/dt$ erhält man ohne Addition von $r$ und $q$. Man findet so

$$\frac{dh_x}{dt} = \frac{dh_1}{dt} - mvr + mwq.$$

Man beachte, dass in dem Fall, in welchem das bewegliche Axensystem im Körper festliegt und sich mit ihm bewegt, $\theta_1 = \omega_1$, $\theta_2 = \omega_2$, $\theta_3 = \omega_3$ ist. Aus den Gleichungen (3) ergibt sich dann

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt}, \quad \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt}, \quad \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt}.$$

Diese einfachen Formeln hat Euler benutzt, um seine Gleichungen der Bewegung starrer Körper um einen festen Punkt zu erhalten. Siehe Bd. 1, Kap. 5. § 248.

§ 6. Zu den obigen Resultaten kann man auch auf andere Art kommen; es ist jedoch offenbar von Vortheil, sie alle mittelst einer Methode abzuleiten.

Die Gleichungen, welche $(u, v, w)$ mit den Coordinaten $(x, y, z)$ verbinden, kann man folgendermassen erhalten: Die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes $P$ im Raum sind durch $dx/dt$, $dy/dt$, $dz/dt$ noch nicht gegeben. Dies sind die Componenten der *relativen* Geschwindigkeit bezüglich der beweglichen Axen. Um die Bewegung *im Raum* zu finden, muss man zu ihnen die Componenten der Geschwindigkeit in Folge der Bewegung der Axen addiren. Nimmt man an, der Massenpunkt sei starr mit den Axen verbunden, so würden seine Geschwindigkeiten durch $\theta_2 z - \theta_3 y$, etc., wie in Bd. 1, Kap. 5 erklärt wurde, ausgedrückt werden. Addirt man die einzelnen Theile, so erhält man die Componenten der absoluten Geschwindigkeit des Massenpunktes, wie oben angegeben wurde.

Da die Beschleunigung das Mass für die Geschwindigkeitszunahme ist, grade wie die Geschwindigkeit das Mass für die Zunahme des zurückgelegten Weges, so müssen offenbar die Beziehungen, welche zwischen Beschleunigungen und Geschwindigkeiten bestehen, dieselben sein, wie die zwischen Geschwindigkeiten und Raumstrecken. Die Beziehungen (2) zwischen $(X, Y, Z)$ und $(u, v, w)$ folgen daher unmittelbar aus denen zwischen $(u, v, w)$ und $(x, y, z)$.

§ 7. Beisp. 1. Die Bewegung werde auf *schiefe* bewegliche Axen bezogen; die Seiten des sphärischen Dreiecks $xyz$ seien jetzt $a$, $b$, $c$ und die Winkel $A$, $B$, $C$. Die gleichen Grössen $\sin a \sin b \sin C$, $\sin b \sin c \sin A$, $\sin c \sin a \sin B$ mögen $\mu$ heissen. Man beweise, dass, wenn die Geschwindigkeit durch die drei *Componenten* $u$, $v$, $w$ parallel zu diesen Axen dargestellt wird, die *resultirende* Beschleunigung parallel zur $z$-Axe

$$Z = \frac{dw}{dt} + \frac{du}{dt}\cos b + \frac{dv}{dt}\cos a - u\theta_2\mu + v\theta_1\mu$$

mit ähnlichen Ausdrücken für $X$ und $Y$ ist.

Man benutze die sphärischen Dreiecke $xyz$, $x'y'z'$, beweise zuerst, dass

$$zx' = b + \theta_2\, dt \sin c \sin A, \qquad zy' = a - \theta_1\, dt \sin c \sin B$$

ist und substituire dann, wie zuvor.

Beisp. 2. Man beweise auf dieselbe Art, dass, wenn $x, y, z$ die Coordinaten in Bezug auf schiefe, sich um einen festen Anfangspunkt bewegende Axen und $u', v', w'$ die *resultirenden* Geschwindigkeiten parallel den Axen sind,

$$w' = \frac{dz}{dt} + \frac{dx}{dt}\cos b + \frac{dy}{dt}\cos a - x\theta_2\mu + y\theta_1\mu$$

mit ähnlichen Ausdrücken für $u'$ und $v'$ ist.

Beisp. 3. Man beweise auch, dass die Gleichungen, welche die Componenten $u, v, w$ mit den Coordinaten $x, y, z$ in Bezug auf Axen mit festliegendem Anfangspunkt verbinden,

$$w = \frac{dz}{dt} + \begin{vmatrix} \mu^{-1}\sin^2 c, & -\cot B, & -\cot A \\ \theta_2 \quad , & \theta_1 \quad , & \theta_2 \\ z \quad , & x \quad , & y \end{vmatrix}$$

und zwei ähnliche für $u$ und $v$ sind.

Da $w'$ die Componente von $(u, v, w)$ parallel zu $z$ ist, so hat man

$$u\cos b + v\cos a + w = w'$$

und ähnliche Gleichungen für $u'$ und $v'$. Löst man sie auf, so ergeben sich die gesuchten Werthe von $u, v, w$.

Beisp. 4. Wenn die ganze Beschleunigung durch die drei Componenten $X, Y, Z$ parallel den Axen dargestellt wird, zu beweisen, dass man ihre durch $u, v, w$ ausgedrückten Werthe aus denen des letzten Beispiels erhält, wenn man $x, y, z$ mit $u, v, w$ und $u, v, w$ mit $X, Y, Z$ vertauscht.

§ 8. *Eine andre allgemeine Methode, die kinematische Beziehung zwischen festen und beweglichen Axen zu erhalten.*

$U, V, W$ seien wie zuvor die Componenten eines Vectors $R$. Es sei $OL$ eine *im Raum festliegende* Gerade, welche mit den beweglichen Axen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ macht. $R_1$ sei die Componente des Vectors in der Richtung $OL$. Alsdann ist

$$R_1 = U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma,$$

daher

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{dU}{dt}\cos\alpha + \frac{dV}{dt}\cos\beta + \frac{dW}{dt}\cos\gamma - \\ U\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} - V\sin\beta\frac{d\beta}{dt} - W\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt}.$$

Da $OL$ zunächst eine beliebige im Raum festliegende Linie ist, können wir sie so wählen, dass die bewegliche $z$-Axe zur Zeit $t$ mit ihr zusammenfällt. Es wird dann

$$\alpha = \frac{1}{2}\pi, \quad \beta = \frac{1}{2}\pi, \quad \gamma = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dR_1}{dt} = W_1.$$

Weil nun $\alpha$ der Winkel ist, den $OL$ mit der beweglichen $x$-Axe macht, so drückt $d\alpha/dt$ die Geschwindigkeit aus, mit welcher sich die $x$-Axe von einer festen mit der $z$-Axe zusammenfallenden Geraden entfernt und ist daher offenbar $\theta_2$. Ebenso ist $d\beta/dt = -\theta_1$ und daher

$$W_1 = \frac{dW}{dt} - U\theta_2 + V\theta_1,$$

worin $W_1$ die Geschwindigkeit ausdrückt, mit welcher die Componente $W$ in der Richtung der festen $z$-Axe zunimmt. Die beiden andern Gleichungen ergeben sich ebenso. Diese Methode verdankt man dem verstorbenen Prof. Slesser.

Man kann die Beziehungen zwischen den zweiten und höheren Differentialquotienten auf dieselbe Weise erhalten, nur werden die Ausdrücke complicirter. Da $U_1$, $V_1$, $W_1$ dem Parallelogrammgesetz unterliegen, so ist

$$\frac{dR_1}{dt} = \left(\frac{dU}{dt} - V\theta_3 + W\theta_2\right)\cos\alpha + \left(\frac{dV}{dt} - W\theta_1 + U\theta_3\right)\cos\beta + \left(\frac{dW}{dt} - U\theta_2 + V\theta_1\right)\cos\gamma$$

und durch Wiederholung desselben Verfahrens schliesslich

$$\frac{dW_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dW}{dt} - U\theta_2 + V\theta_1\right) - \theta_2\left(\frac{dU}{dt} - V\theta_3 + W\theta_2\right) + \theta_1\left(\frac{dV}{dt} - W\theta_1 + U\theta_3\right).$$

§ 9. Wir haben damit eine Methode zur Transformation der Bewegungsgleichungen in Bezug auf feste Axen in Gleichungen bez. solcher Axen erhalten, die sich um einen festen Anfangspunkt bewegen.

Die allgemeine für *alle* festen Axen mit gegebenem Coordinatenanfang geltende Gleichung sei

$$\psi\{\omega_x,\ d\omega_x/dt,\ \text{etc.}\} = 0,$$

worin $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ die Winkelgeschwindigkeiten um die festen Axen sind.

Da die festen Axen *ihrer Lage nach willkürlich* sind, so mögen sie so gewählt werden, dass die drei beweglichen Axen in dem betrachteten Moment durch sie gehen und daher in diesem Augenblick die beiden Axensysteme zusammenfallen. Die Gleichungen bez. der beweglichen Axen erhält man alsdann, indem man $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ in der allgemeinen Gleichung $\psi = 0$ durch die entsprechenden Grössen $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ für die beweglichen Axen und $d\omega_x/dt$ etc. durch die gleichwerthigen oben in § 5 angegebenen Ausdrücke ersetzt.

Dasselbe gilt, wenn statt $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ die Componenten irgend eines andern Vectors in der Gleichung auftreten.

§ 10. **Die allgemeinen Bewegungsgleichungen.** *Die allgemeinen Bewegungsgleichungen für ein System sich bewegender Körper aufzustellen, welches auf beliebige rechtwinklige sich um einen festen Coordinatenanfang bewegende Axen bezogen wird.*

Es sei $m$ die Masse irgend eines Körpers des Systems. Die für den Körper gegebenen Kräfte mögen durch die drei an seinem Schwerpunkt angreifenden Kräfte $mX$, $mY$, $mZ$ und die drei Paare $L$, $M$, $N$ dargestellt werden. Wir nehmen an, die unbekannten Reactionen der übrigen Körper des Systems seien in diesen Ausdrücken einbegriffen.

$(u, v, w)$ seien die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Körpers im Raum. Die Bewegungsgleichungen für feste Axen sind $u = dx/dt$, $X = du/dt$ etc. Bewegen sich die Axen, so werden sie

$$u = \frac{dx}{dt} - \theta_3 y + \theta_2 z \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$X = \frac{du}{dt} - \theta_3 v + \theta_2 w \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

mit den entsprechenden Ausdrücken für die übrigen Coordinatenaxen.

$(h_1, h_2, h_3)$ seien die Winkelbewegungsgrössen des Körpers um drei den Coordinatenaxen parallele, durch den Schwerpunkt gezogene Gerade. Die Gleichungen der Momente für feste Axen sind $dh_x/dt = L$, etc., Bd. 1, Kap. 2, § 71.

Sind die Axen in Bewegung, so werden sie

$$L = \frac{dh_1}{dt} - h_2\theta_3 + h_3\theta_2 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

mit ähnlichen Ausdrücken für $M$ und $N$.

Die durch die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers ausgedrückten Werthe von $(h_1, h_2, h_3)$ sind in Bd. 1, Kap. 5 angegeben worden. Wenn $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um Axen sind, die parallel zu den Axen durch den Schwerpunkt gehen, und $A$, $F$, etc. die Trägheits- und Deviationsmomente bedeuten, so ist die Fundamentalbeziehung

$$h_1 = A\omega_1 - F\omega_2 - E\omega_3$$

und ähnlich für $h_2$ und $h_3$. Es existiren aber noch viele andre, welche wir hier nicht wiederholen können.

Zu den dynamischen Gleichungen kommen die geometrischen, welche die Verbindungen des Systems ausdrücken. Da jede solche Zwangsverbindung von einer Reaction begleitet ist, so muss die Anzahl der geometrischen Gleichungen dieselbe wie die der unbekannten Reactionen sein. Es sind daher genug Gleichungen zur Bestimmung der Bewegung vorhanden.

Beisp. Ein schwerer starrer Körper wird über einen glatten Stab von der Gestalt eines Kreiscylinders geschoben, auf welchem er gleiten kann. Der Stab geht durch den Schwerpunkt des Körpers und rotirt gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um eine verticale Axe in einem graden Kreiskegel, dessen halber Winkel an der Spitze $\alpha$ ist. Wenn $C$ das Trägheitsmoment für den Stab ist, $A$ und $B$ die Trägheitsmomente für zwei in dem Körper festliegende auf dem Stab senkrechte Gerade sind, von denen die eine mit der durch die verticale Axe und den Stab gehenden Ebene den Winkel $\varphi$ macht, und wenn $D$, $E$, $F$ die Deviationsmomente bedeuten, zu beweisen, dass

$$C\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \omega^2 \sin^2\alpha \{(B - A)\sin\varphi\cos\varphi + F\cos 2\varphi\} - \omega^2 \sin\alpha\cos\alpha(E\sin\varphi + D\cos\varphi) \quad \text{ist.}$$

Durch Zerlegung der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ findet man

$$\omega_1 = -\omega \sin\alpha \cos\varphi, \quad \omega_2 = \omega \sin\alpha \sin\varphi, \quad \omega_3 = d\varphi/dt + \omega \cos\alpha.$$

Siehe die Fig. in § 12. Substituirt man diese Werthe in die Ausdrücke für $h_1, h_2, h_3$ in § 10 und setzt das Moment der Effectivkräfte um den Stab gleich Null, so ergibt sich das Resultat unmittelbar. [Math. Tripos, 1885.]

§ 11. Es wurde angenommen, die Bewegung der beweglichen Axen werde durch die drei Winkelgeschwindigkeiten $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ bestimmt. Um ihre absolute Lage im Raum zu finden, benutzen wir die Euler-schen geometrischen Gleichungen, die früher in Bd. 1, Kap. 5 gegeben wurden. $\theta, \varphi, \psi$ seien die Euler'schen Winkelcoordinaten der beweglichen Axen, auf irgend welche im Raum festliegende Axen bezogen. Es ist dann

$$\theta_1 = \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi - \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi,$$

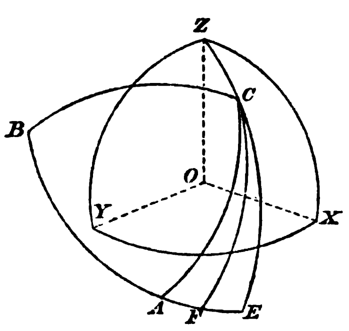
$$\theta_2 = \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi + \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi,$$

$$\theta_3 = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta.$$

Diese geometrischen Gleichungen bestimmen $\theta, \varphi, \psi$, wenn $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ bekannt sind. Siehe auch § 18.

§ 12. **Zwei wichtige Specialfälle.** Es gibt zwei Fälle, in denen die eben gefundenen Bewegungsgleichungen sich sehr vereinfachen lassen. Da sie oft vorkommen, lohnt es sich, sie gesondert zu besprechen.

**Erster Specialfall.** Zuerst nehmen wir an, der Körper drehe sich um einen im Raum festliegenden Punkt $O$ und sei derart, *dass zwei der Hauptträgheitsmomente für den festen Punkt gleich sind.*




$OC$ sei die Axe des ungleichen Trägheitsmomentes. Wir wollen sie zur beweglichen $z$-Axe nehmen und als die andern Bezugsaxen die beiden Axen $OA$, $OB$ wählen, die sich in irgend einer beliebigen Art um $OC$ drehen.

Um diese Art festzulegen, sei $\chi$ der Winkel, den die Ebene $COA$ mit einer im Körper festliegenden durch $OC$ gehenden Ebene $OCF$ macht. Alsdann ist $\theta_1 = \omega_1$, $\theta_2 = \omega_2$ und $\theta_3 = \omega_3 + d\chi/dt$; ferner $h_1 = A\omega_1$, $h_2 = B\omega_2$, $h_3 = C\omega_3$. Die Bewegungsgleichungen, § 10, sind jetzt

$$\left.\begin{aligned} A\left(\frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2\frac{d\chi}{dt}\right) - (A-C)\,\omega_2\omega_3 &= L \\ A\left(\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\frac{d\chi}{dt}\right) + (A-C)\,\omega_3\omega_1 &= M \\ C\frac{d\omega_3}{dt} \qquad\qquad &= N \end{aligned}\right\}.$$

In diesem Fall passt es am besten, wenn wir die sogenannten Eulerschen geometrischen Gleichungen dazu wählen, die Beziehungen dieser beweglichen Axen zu den im Raum festliegenden Axen $OX$, $OY$, $OZ$ auszudrücken. Diese Gleichungen wurden in dem letzten Paragraphen ausführlich angegeben; nur muss man selbstverständlich auf ihrer linken Seite $\omega_1$, $\omega_2$ und $\omega_3 + d\chi/dt$ statt $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ schreiben. In der Figur ist $ZC = \theta$, $XZC = \psi$, $ECA = \varphi$.

§ 13. Da $d\chi/dt$ willkürlich ist, so kann man es so wählen, dass entweder die dynamischen oder die geometrischen Gleichungen vereinfacht werden.

I. Setzt man $d\chi/dt = -\omega_3$, so drehen sich die beweglichen Bezugsaxen um die Axe $OC$ mit einer relativen Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf den Körper, welche derjenigen des Körpers gleich und entgegengesetzt ist, so dass die Bezugsaxen, wenn die Axe $OC$ im Raum festläge, ebenfalls im Raum festliegen würden. Die dynamischen Gleichungen werden dann

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} + C\omega_2\omega_3 &= L \\ A\frac{d\omega_2}{dt} - C\omega_1\omega_3 &= M \\ C\frac{d\omega_3}{dt} \qquad &= N \end{aligned}\right\};$$

die geometrischen dagegen werden nicht viel einfacher.

Man kann auch $d\chi/dt = -\omega_3(A-C)/A$ wählen, in welchem Fall die dynamischen Gleichungen die einfache Form

$$A\frac{d\omega_1}{dt} = L, \quad A\frac{d\omega_2}{dt} = M, \quad C\frac{d\omega_3}{dt} = N$$

annehmen.

II. Wählt man $d\chi/dt$ so, dass $\varphi = 0$ ist, so geht die Ebene $COA$ immer durch eine im Raum festliegende Gerade $OZ$. Die Eulerschen geometrischen Gleichungen werden dann

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_2, \quad -\frac{d\psi}{dt}\sin\theta = \omega_1, \quad -\frac{d\chi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta = \omega_3.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen § 12 ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} -\frac{A}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}\right) + C\omega_3\frac{d\theta}{dt} &= L \\ A\left\{\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right\} + C\sin\theta\,\omega_3\frac{d\psi}{dt} &= M \\ C\frac{d\omega_3}{dt} &= N \end{aligned}\right\}.$$

§ 14. **Zweiter Specialfall.** In dem zweiten Specialfall nehmen wir an, der Körper drehe sich, wie zuvor, um einen festen Punkt, *doch seien seine Trägheitsmomente für diesen festen Punkt sämmtlich gleich.* Alsdann gibt es drei Systeme von Axen, die man mit Vortheil wählen kann.

*Erstens* kann man im Raum festliegende Axen wählen. Da jede Axe eine Hauptaxe in dem Körper ist, so werden die allgemeinen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{L}{A}, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{M}{A}, \quad \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{N}{A}.$$

*Zweitens* kann man eine Axe z. B. die $OC$-Axe als im Raum festliegend annehmen und die beiden andern sich beliebig um sie drehen lassen; man hat dann, wie in dem ersten Specialfall, die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2\frac{d\chi}{dt} &= \frac{L}{A} \\ \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\frac{d\chi}{dt} &= \frac{M}{A} \\ \frac{d\omega_3}{dt} \qquad\quad &= \frac{N}{A} \end{aligned}\right\}.$$

*Drittens* kann man drei beliebige senkrecht auf einander stehende Gerade, die sich auf irgend eine gegebene Art im Raum bewegen, zu Axen nehmen. Die Bewegungsgleichungen lassen sich aus der ersten Gruppe von Gleichungen ableiten, die soeben mit Hülfe der allgemeinen Regel für den Uebergang von festen auf bewegliche Axen aufgestellt wurden. Man hat mithin

$$\frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2\theta_3 + \omega_3\theta_2 = \frac{L}{A},$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} - \omega_3\theta_1 + \omega_1\theta_3 = \frac{M}{A},$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1\theta_2 + \omega_2\theta_1 = \frac{N}{A}.$$

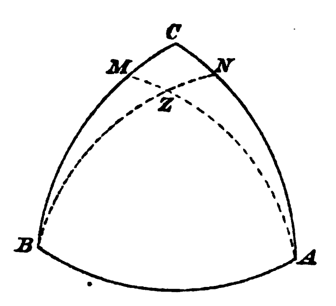
Den geometrischen Gleichungen gibt man am besten die Form, wie in § 18.

§ 15. Zahlreiche Beispiele, welche den Vortheil der obigen Gestalt der dynamischen Gleichungen darthun, wird man in den folgenden

Kapiteln, besonders in dem *über die Bewegung unter dem Einfluss beliebiger Kräfte* finden. Das folgende Beispiel zeigt ihre Anwendung auf ein Problem kleiner Schwingungen, in welchem viele oft vorkommende Fälle enthalten sind[1]).

*Ein Körper, der sich frei um einen festen Punkt O drehen kann, rotirt mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um eine der Hauptaxen für O und steht unter der Einwirkung gegebener Kräfte. Wenn ihm eine kleine Störung gegeben wird, die kleinen Schwingungen zu finden.*

$OC$ sei die Hauptaxe, um welche der Körper rotirt und $n$ die constante Winkelgeschwindigkeit. Nach der Störung macht $OC$, wie wir annehmen wollen, kleine Schwingungen um eine im Raum festliegende Gerade $OZ$. Man beschreibe eine Kugel mit dem Centrum $O$ und dem Radius gleich der Einheit; die Hauptaxen $OA$, $OB$, $OC$ mögen die Kugel in den Punkten $A$, $B$, $C$ schneiden und $OZ$ im Punkt $Z$. Man fälle die Lothe $ZM$, $ZN$ auf die Bogen $CB$, $CA$ und es sei $p = ZM$, $q = ZN$; dann sind $(p, q, 1)$ die Richtungscosinusse von $OZ$, auf die Hauptaxen bezogen. Auch sind $p$ und $q$ die Coordinaten von $C$ in Bezug auf Axen $OX$, $OY$, die sich um $OZ$ mit der Winkelgeschwindigkeit $n$ drehen. Die Componenten der Geschwindigkeit von $C$ parallel zu $MC$ und $CN$ sind daher $q' + pn$ und $-p' + qn$ (siehe Bd. 1, § 211), wenn die Accente Differentiationen nach der Zeit angeben. Diese Geschwindigkeiten sind aber $\omega_1$ und $\omega_2$. Man hat also




$$\omega_1 = q' + pn\,, \quad \omega_2 = -p' + qn \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Setzt man diese Werthe in die Euler'schen Gleichungen, so wird

$$\left.\begin{aligned} Aq'' + (A + B - C)np' - (B - C)n^2 q = L \\ -Bp'' + (A + B - C)nq' + (A - C)n^2 p = M \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2).$$

Die Momente $L$ und $M$ der Kräfte sind in der ungestörten Lage Null und müssen mit Hülfe der geometrischen Besonderheiten des Problems durch $p$ und $q$ ausgedrückt werden. Da die Quadrate von $p$ und $q$ vernachlässigt werden, so ist

$$L = a_1 p + a_2 q\,, \quad M = b_1 p + b_2 q \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

worin $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ Constante sind.

Wenn $\theta$, $\varphi$, $\psi$ die Euler'schen Winkel bedeuten und positiv auf die in Bd. 1, § 256 beschriebene Art genommen werden, so geht aus der Figur dieses Paragraphen sofort hervor, dass

$$p = -\sin\theta\cos\varphi\,, \quad q = \sin\theta\sin\varphi\,, \quad r = \cos\theta$$

ist.

Man beachte auch, dass die *Annäherungs*gleichungen (1) unmittelbar aus den *genauen* Gleichungen

$$\omega_1 \cos\theta = q' + p\omega_3\,, \quad \omega_2 \cos\theta = -p' + q\omega_3$$

folgen, die unter der Ueberschrift: *Die geometrischen Bedingungen bei beweglichen Axen* in § 18 gegeben werden.

---

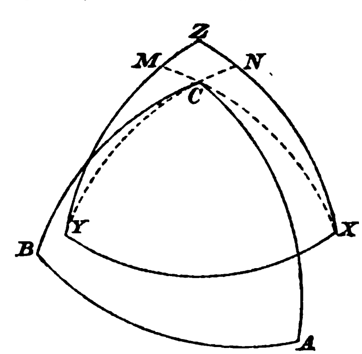
1) Eine detaillirte Besprechung der in diesem Paragraphen erörterten Gleichungen enthielt die erste Ausgabe dieses Buches, 1860. Da es aber im Allgemeinen leichter ist, diese Gleichungen immer wieder aus allgemeinen Principien abzuleiten, als sie aus dem Gedächtniss zu citiren, so schien uns die hier gegebene kurze Uebersicht ausreichend zu sein.

Die Grössen $L$, $M$, $N$ sind, genau genommen, die Momente der gegebenen Kräfte um die Axen $OA$, $OB$ bez. $OC$. Bei der Bestimmung ihrer Werthe in einem speciellen Fall ist es von Vortheil, wenn man beachtet, dass sie klein und daher in erster Annäherung den Momenten um die Axen $OX$, $OY$ und $OZ$ gleich sind, von denen die beiden ersten sich um die letzte mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $n$ drehen.

Wir bemerken ferner, dass die Gerade $OP$ in der Nähe von $OC$, deren Richtungscosinusse, auf die Axen $OA$, $OB$, $OC$ bezogen, $(p', q', 1)$ sind, in Bezug auf $OX$, $OY$, $OZ$ die Richtungscosinusse $(p' - p, q' - q, 1)$ hat. Daraus folgt der Zusatz, dass die Richtungscosinusse von $OC$, in Bezug auf $OX$, $OY$, $OZ$, $(-p, -q, 1)$ sind.

Auf diese Art wird *die Bestimmung der Bewegung von der Lösung zweier linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten abhängig gemacht.*

Wenn der Körper einaxig, also $A = B$ ist, lässt sich manchmal eines der in § 13 beschriebenen Axensysteme mit Vortheil benutzen. Nimmt man z. B. das System, für welches $d\chi/dt = -n$ ist, zu Axen der $OA$, $OB$, $OC$, so liegen diese Axen nahezu im Raum fest. $OX$, $OY$, $OZ$ seien ihre mittleren Lagen; $(P, Q, 1)$ seien die Richtungscosinusse von $OC$ in Bezug auf diese festen Axen, so dass also $P = \sin\theta \cos\psi$, $Q = \sin\theta \sin\psi$ ist. Construiren wir nun, wie zuvor, eine Kugel mit dem Radius gleich der Einheit und ziehen $CM$, $CN$ senkrecht zu den Bogen $YZ$, $ZX$, so wird $CM = P$ und $CN = Q$. Man hat daher




$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{d(CN)}{dt} = -Q', \\ \omega_2 &= \frac{d(CM)}{dt} = P' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4),$$

Substituirt man, so nehmen die Bewegungsgleichungen die Form an

$$\left.\begin{aligned} -AQ'' + CnP' &= L \\ AP'' + CnQ' &= M \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Wie zuvor, beachte man, dass $L$, $M$, $N$ genau genommen die Momente der Kräfte um die schwingenden Axen $OA$, $OB$, $OC$ sind, dass man sie aber als kleine Grössen durch die Momente der Kräfte um die festen Axen $OX$, $OY$, $OZ$ ersetzen kann. Es wird uns dadurch oft möglich gemacht, die Momente ohne Schwierigkeit zu ermitteln und $L$ und $M$ in den linearen Formen auszudrücken:

$$L = a_1 P + a_2 Q, \quad M = b_1 P + b_2 Q.$$

**§ 16. Die geometrischen Bedingungen bei beweglichen Axen.** Um bewegliche Axen benutzen zu können, muss man im Stande sein, beliebige Bedingungen, die in Bezug auf Gerade oder Punkte, welche sich unabhängig im Raum bewegen, existiren mögen, bezüglich dieser Axen auszudrücken. Wir haben daher in den folgenden Paragraphen einige der wichtigeren zusammengestellt.

§ 17. *Die geometrischen Bedingungen auszudrücken, unter welchen ein Punkt, dessen Coordinaten $(x, y, z)$ sind, im Raum festliegt.*

Dies kann in der Weise geschehen, dass man die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes, wie sie in § 5 gegeben sind, gleich Null setzt. Man erhält so die Bedingung

$$p + \frac{dx}{dt} - y\theta_3 + z\theta_2 = 0$$

und zwei andre, ihr ähnliche.

§ 18. *Die geometrischen Bedingungen auszudrücken, unter welchen eine Gerade, deren Richtungscosinusse $(l, m, n)$ sind, sich parallel zu sich selbst im Raum bewegt, oder ihre Richtung im Raum festliegt.*

Man ziehe eine Gerade $OL$, deren Länge die Einheit ist, von irgend einem im Raum festliegenden Punkt $O$ aus parallel zu der gegebenen Geraden. Die Coordinaten von $L$ in Bezug auf Axen, welche sich um $O$ als Anfangspunkt so drehen, dass sie den beweglichen Axen immer parallel bleiben, sind $l, m, n$. Da $OL$ im Raum festliegt, so sind die Componenten der Geschwindigkeit von $L$ Null. Die geometrische Bedingung ist daher

$$\frac{dl}{dt} - m\theta_3 + n\theta_2 = 0$$

und zwei ihr ähnliche. Weil $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ist, so sind diese drei Gleichungen zwei unabhängigen Bedingungen äquivalent.

Man hat manchmal die Richtung der Geraden durch die Euler'schen Winkel $\theta, \varphi, \psi$ auszudrücken, wie Bd. 1, Kap. 5 erklärt wurde. Die beweglichen Axen wurden dort $OA$, $OB$, $OC$ genannt und die Gerade, deren Richtung im Raum festliegen soll, durch $OZ$ dargestellt. Wie man sieht, sind die eben aufgestellten Gleichungen zweien der sogenannten *Euler'schen geometrischen Gleichungen* äquivalent, aber in symmetrischer Form ausgedrückt. Die dritte Euler'sche Gleichung folgt aus § 19.

§ 19. *Es kommt zuweilen vor, dass man bei dem Gebrauch beweglicher Axen die Bewegung einer mit den beweglichen Axen verbundenen Geraden $OM$ auf eine im Raum festliegende Gerade zu beziehen hat.* Der folgende Satz soll zeigen, auf welche Art dies geschehen kann.

Die Richtungscosinusse einer in Bezug auf die beweglichen Axen festliegenden Geraden $OM$ seien $\lambda, \mu, \nu$; man soll die Bewegung von $OM$ auf eine Gerade $OL$ beziehen, die im Raum festliegt und deren Richtungscosinusse, zur Zeit $t$, $(l, m, n)$ sind. Der Winkel $LOM$ werde mit $\theta$ und mit $\psi$ der Winkel bezeichnet, den die Ebene $LOM$ mit einer im Raum festliegenden durch $OL$ gehenden Ebene macht. Es lässt sich dann zeigen, dass

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= l\lambda + m\mu + n\nu, \\ \sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} &= \theta_1(l - \lambda\cos\theta) + \theta_2(m - \mu\cos\theta) + \theta_3(n - \nu\cos\theta) \end{aligned}\right\}$$

ist.

Sind $\theta_l$, $\theta_m$ die Componenten der Winkelgeschwindigkeiten um $OL$ bez. $OM$, so kann man der letzten Gleichung die Gestalt geben

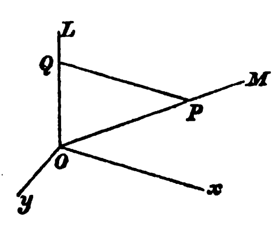
$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \theta_l - \theta_m \cos\theta.$$

Liegt die Gerade $OM$ bez. der Axen nicht fest, so sind $(\lambda, \mu, \nu)$ variabel und wir müssen der rechten Seite der zweiten Gleichung die Determinante hinzufügen

$$\left(\lambda \frac{d\mu}{dt} - \mu \frac{d\lambda}{dt}\right) n + \left(\mu \frac{d\nu}{dt} - \nu \frac{d\mu}{dt}\right) l + \left(\nu \frac{d\lambda}{dt} - \lambda \frac{d\nu}{dt}\right) m.$$

In dieser Determinante kann man $\lambda$, $\mu$, $\nu$ durch beliebige ihnen proportionale Grössen $\lambda\varkappa$, $\mu\varkappa$, $\nu\varkappa$ ersetzen, wobei $\varkappa$ variabel sein kann oder nicht, vorausgesetzt, dass man die Determinante durch $\varkappa^2$ dividirt.

Den Beweis kann man auf die folgende Art führen. Es sei $P$ ein Punkt in $OM$ in einem Abstand gleich der Einheit von $O$ und $P$ bewege sich mit $OM$. Man ziehe $PQ$ senkrecht zu $OL$. Zuerst sei $OM$ mit dem Axensystem fest verbunden. Die Winkelgeschwindigkeit des Systems um die Momentanaxe werde in drei Componenten zerlegt, nämlich $\theta_l$ um $OL$, $\theta_x$ um ein Loth auf $OL$ in der Ebene $LOM$ und $\theta_y$ um ein Loth auf die Ebene $LOM$. Die Geschwindigkeit von $P$ ist $\theta_l \cdot PQ - \theta_x \cdot OQ$. Da die $y$-Componente der Geschwindigkeit von $P$ auch $PQ \cdot d\psi/dt$ ist, so wird




$$\sin\theta\, d\psi/dt = \theta_l \sin\theta - \theta_x \cos\theta.$$

Weil nun $\theta_l \cos\theta + \theta_x \sin\theta = \theta_m$ ist, so erhält man durch Substitution des Werthes von $\theta_x$ das fragliche Resultat.

Das zusätzliche Glied in Folge der relativen Bewegung von $OM$ in Bezug auf das System lässt sich leicht ermitteln, wenn man das System so behandelt, als ob es sich in Ruhe befände. Die in den Klammern eingeschlossenen Grössen der Determinante sind die Momente der Geschwindigkeit von $P$ um die Axen. Sucht man ihre Componente um $OL$, so sieht man, dass die Determinante das Moment der Geschwindigkeit von $P$ um $OL$ ausdrückt und dasselbe Moment wird auch durch $\sin^2\theta\, d\psi/dt$ dargestellt.

§ 20. Wenn die Bewegung eines Körpers in Bezug auf im Körper festliegende Axen durch die Winkelgeschwindigkeiten $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ gegeben ist, so hat man manchmal nöthig, die Bewegung der Momentanaxe im Raum zu finden. Dies ist offenbar nur ein Specialfall des Satzes in § 19. Wenn $OM$ die Momentanaxe und $OL$, wie zuvor, die im Raum festliegende Gerade bezeichnet, so ist $\theta_l = \theta_m \cos\theta$. Der Ausdruck für $\sin^2\theta\, d\psi/dt$ reducirt sich daher auf die obige Determinante. Die folgenden Beispiele erhält man durch Combination der §§ 18 und 19, wobei Accente Differentiationen nach der Zeit angeben.

Beisp. 1. Wenn $\Omega$ die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe $OM$ bedeutet, zu beweisen, dass

$$\sin^2\theta\,\Omega^2 \frac{d\psi}{dt} = \omega_1' l' + \omega_2' m' + \omega_3' n', \quad n \frac{d\psi}{dt} = \omega_3 + \frac{l' m'' - l'' m'}{l'^2 + m'^2 + n'^2} \text{ ist.}$$

Beisp. 2. Man zeige, dass $d\psi/dt = \theta_l + D/(l'^2 + m'^2 + n'^2)$ ist, worin, wie zuvor, $\theta_l$ die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um $OL$ und $D$ die Determinante $l(m'n'' - m''n') + m(n'l'' - n''l') + n(l'm'' - l''m')$ bedeutet.

Beisp. 3. Man zeige, dass $\Omega^2 - \theta_l^2 = l'^2 + m'^2 + n'^2$ ist.

Beisp. 4. Man zeige, dass die Gleichung der Ebene $LOM$ in Bezug auf im Körper festliegende Axen $l'x + m'y + n'z = 0$ ist.

§ 21. **Der Gebrauch beweglicher Axen in der Raumgeometrie.** Da wir manchmal die Coordinatenaxen unabhängig von der Bewegung des Körpers zu verrücken haben, ja selbst die Axen wechseln müssen, ohne die Zeit zu ändern, so ist es von Vortheil, die Fundamentalaufgabe in § 4 ohne Bezugnahme auf dynamische Ideen zu behandeln. Dies geschieht in dem folgenden Satz.

Ein System beweglicher Axen möge aus einer Lage $Ox$, $Oy$, $Oz$ in die folgende Lage $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$ mittelst der kleinen Rotationen $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$ um ihre augenblicklichen Lagen geschraubt werden. Es seien $U$, $V$, $W$ die Projectionen oder Componenten einer Geraden oder eines Vectors $OL$ auf $Ox$, $Oy$, $Oz$, wobei $U$, $V$, $W$ entweder constant oder variabel sind. Es seien $U + dU$, $V + dV$, $W + dW$ die Projectionen der folgenden Lage $OL'$ der Geraden auf $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$ und $U + \delta U$, $V + \delta V$, $W + \delta W$ die Projectionen von $OL'$ auf $Ox$, $Oy$, $Oz$. Alsdann ist

$$\begin{aligned} \delta U &= dU - V d\varphi_3 + W d\varphi_2, \\ \delta V &= dV - W d\varphi_1 + U d\varphi_3, \\ \delta W &= dW - U d\varphi_2 + V d\varphi_1. \end{aligned}$$

Dies folgt aus § 4, wenn man $\theta_1 dt = d\varphi_1$, $\theta_2 dt = d\varphi_2$, $\theta_3 dt = d\varphi_3$ setzt.

Nimmt man die Länge $OL$ der Einheit gleich, so werden die Projectionen $U$, $V$, $W$ die Richtungscosinusse der Linie. Die Gleichungen geben uns dann unmittelbar die Aenderungen der Richtungscosinusse im Raum an, wenn die Aenderungen bezüglich der beweglichen Axen bekannt sind.

Wenn z. B. $\delta\chi$ der Winkel zwischen zwei folgenden Lagen einer Linie $OL$ ist, deren Richtungscosinusse in Bezug auf die beweglichen Axen $U$, $V$, $W$ sind, so hat man

$$(\delta\chi)^2 = (\delta U)^2 + (\delta V)^2 + (\delta W)^2.$$

Auch sind die Richtungscosinusse der durch zwei aufeinander folgende Lagen von $OL$ gehenden Ebene proportional $V\delta W - W\delta V$, $W\delta U - U\delta W$, $U\delta V - V\delta U$.

Es kann hier unsere Aufgabe nicht sein, die Benutzung beweglicher Axen in der Raumgeometrie weiter auszuführen, als für den Beweis der Theoreme, die in der Dynamik gebraucht werden, nöthig ist. Wir bemerken nur, dass Curven sowohl wie Flächen sich manchmal sehr leicht behandeln lassen, wenn man sie auf ein System beweglicher Axen bezieht, deren Coordinatenanfang auf der Curve oder

Fläche fortrückt und deren Richtungen solche Tangenten und Normalen sind, wie sie am besten für den zur Discussion stehenden Fall passen. Der Leser wird auf eine Abhandlung des Verfassers in dem *Cambridge Mathematical Journal* (Bd. 7, 1866) verwiesen, worin die Anwendung beweglicher Axen auf die Krümmung der Curven durch verschiedene Beispiele erläutert wird. Die folgenden Aufgaben sind für den Augenblick von keiner grossen Bedeutung; man wird sich weiter unten von ihrem Nutzen überzeugen.

Beisp. 1. Als Hauptaxen für einen Punkt $P$ einer Curve nehmen wir den Krümmungsradius, die Tangente und die Binormale. Sie seien die Axen der $x$, $y$ bez. $z$; zu beweisen, dass die Componenten der Bewegung, durch welche die Axen auf der Curve um den Bogen $dy$ fortgeschraubt werden,

$$p=0,\quad q=dy,\quad r=0;\quad d\varphi_1=0,\quad d\varphi_2=-d\tau,\quad d\varphi_3=-d\varepsilon$$

sind, worin $d\tau$ und $d\varepsilon$ den Torsions- und Contingenzwinkel bedeuten.

Beisp. 2. Als Hauptaxen für einen Punkt $O$ einer Fläche nehmen wir die Tangenten an die Krümmungslinien und die Normale zur Fläche. Sie seien die Axen der $x$, $y$, $z$. Man soll die Axen von $O$ aus in die Lage der Hauptaxen für den benachbarten Punkt $O'$ auf der $x$-Axe bewegen. Setzt man $OO'=dx$, so sind die sechs Componenten der Bewegung für den Reductionspunkt $O$ gegeben durch

$$p=dx,\ q=0,\ r=0;\ d\varphi_1=0,\ d\varphi_2=-\frac{dx}{\varrho},\ \left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right)d\varphi_3=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\right)dx,$$

worin $\varrho$, $\varrho'$ die Hauptkrümmungsradien der Schnitte $xz$ bez. $yz$ sind. Durch Combination mit einer entsprechenden Bewegung auf der $y$-Axe kann man die Axen von $O$ aus in die Lagen der Hauptaxen für jeden benachbarten Punkt $O'$ auf der Fläche bewegen.

Beisp. 3. Man zeige, dass die Gleichung einer Fläche auf die Hauptaxen für einen Punkt $O$ bezogen,

$$z=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{\varrho}+\frac{y^2}{\varrho'}\right\}+$$
$$+\tfrac{1}{6}\left\{x^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\right)+3x^2y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\right)+3xy^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)+y^3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\right\}+\text{etc.}$$

ist. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Taylor'schen Theorem.

§ 22. **Die Bewegungsgleichungen eines veränderlichen Körpers.** Es ist zu beachten, dass die Geltung der drei allgemeinen Bewegungsgleichungen, deren Typus

$$dh_1/dt-\theta_3 h_2+\theta_2 h_3=L\,.\quad\quad(1)$$

ist, sich nicht auf starre Körper beschränkt. Sie bestehen auch dann, wenn das System eine Sammlung von Massenpunkten ist, welche sich untereinander bewegen. Man kann sie daher auf die Bewegung eines Körpers anwenden, der seine Gestalt durch Uebertragung von Wärme oder aus einem andern Grund ändert und sich auch frei im Raum um seinen Schwerpunkt als festen Punkt herumdreht[1]).

---

1) Die Bewegungsgleichungen veränderlicher Körper wurden von Liouville 1858 in dem 3. Band seines Journals in der Form der Gleichungen (6) des Textes gegeben. Die mit (9) bezeichneten Gleichungen stimmen mit denen von Darwin in den *Phil. Trans.* 1876, *On the influence of geological changes on the earth's axis of rotation* gegebenen überein. Die unter (10) sind im Wesentlichen dieselben wie die Lord Kelvin's in Appendix C von Darwin's Abhandlung. Man findet sie auch in der *Mécanique Céleste* von Tisserand, 1891. Den ersten Gebrauch mittlerer Axen schreibt Tisserand Herrn Gyldén zu, *Société Royale d'Upsala,* 1871.

In vielen Fällen ist die Art, wie der Körper seine Gestalt verändert, gegeben, so dass die Bewegung eines jeden Theils des Körpers bekannt ist, wenn man die Bewegung beliebiger dreier rechtwinkliger Axen im Raum ermittelt, welche auf gegebene Weise mit dem veränderlichen Körper verbunden sind. Die so zur Definition der Bewegung des Körpers im Raum gewählten Axen mögen der Kürze wegen *die Axen des Körpers* heissen.

Es gibt eine Methode, diese Axen zu wählen, welche den Vortheil hat, dass sie die Bewegungsgleichungen vereinfacht. Ein Axensystem $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ möge sich um den Schwerpunkt als Coordinatenanfang mit solchen Winkelgeschwindigkeiten bewegen, dass die Bewegung der Axen, wenn in irgend einem Augenblick der veränderliche Körper plötzlich starr würde, in der Zeit $dt$ dieselbe sein würde, als wenn die Axen im Körper festlägen. Diese Axen besitzen die Eigenschaft, dass die Winkelbewegungsgrösse des veränderlichen Körpers um jede von ihnen dieselbe ist, wie die eines idealen starren Körpers, welcher an den Axen befestigt ist und die gleichen augenblicklichen Trägheits- und Deviationsmomente, wie der veränderliche Körper, hat. Die Winkelbewegungsgrössen lassen sich daher durch die gewöhnlichen Formeln für einen starren Körper ausdrücken, nämlich

$$h_1 = A\Omega_1 - F\Omega_2 - E\Omega_3\,, \text{ etc.}$$

Um sich darüber klar zu werden, nehme man an, $U$, $V$, $W$ seien die Componenten der Geschwindigkeit im Raum für einen Punkt von der Masse $m$ und $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten der Axen. Alsdann ist, wie in § 5,

$$U = \xi' - \eta\Omega_3 + \zeta\Omega_2\,, \quad V = \eta' - \zeta\Omega_1 + \xi\Omega_3\,, \text{ etc.,}$$

wobei die Accente Differentiationen nach der Zeit angeben.

Es seien ferner

$$A_\xi = \Sigma m(\eta\zeta' - \zeta\eta')\,, \quad A_\eta = \Sigma m(\zeta\xi' - \xi\zeta'), \quad A_\zeta = \Sigma m(\xi\eta' - \eta\xi'),$$

so dass also $A_\xi$, $A_\eta$, $A_\zeta$ die Winkelbewegungsgrössen der Relativbewegung der Massenpunkte des Körpers gegen die Axen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ bedeuten. Sind $h_\xi$, $h_\eta$, $h_\zeta$ die ganzen Winkelbewegungsgrössen um die Axen, so erhält man durch Substitution

$$h_\zeta = \Sigma m(\xi V - \eta U) = A_\zeta + C\Omega_3 - E\Omega_1 - D\Omega_2 \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

und zwei ähnliche Gleichungen, worin $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ die Trägheits- und Deviationsmomente des Körpers für die Axen der $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sind.

Die getroffene Wahl der Axen hat zur Folge, dass

$$A_\xi = 0\,, \quad A_\eta = 0\,, \quad A_\zeta = 0 \text{ wird} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Solche Axen hat Tisserand in seiner *Mécanique Céleste „mittlere Axen“* genannt. Er bemerkt, dass sie durch die Eigenschaft charakterisirt werden, dass die Aenderungen in dem Körper nicht die Form von Strömungen um die Axen annehmen.

Man beachte, dass die Lage der Axen durch die Eigenschaft $A_\xi = 0$, $A_\eta = 0$, $A_\zeta = 0$ nicht genau definirt ist. Diese Gleichungen bestimmen nur die Bewegung, wenn die Anfangslage der Axen gewählt worden ist. Befindet sich z. B. der Körper anfangs in Ruhe und alteriren in irgend einem Augenblick beginnende *innere* Aenderungen seine Gestalt und Structur, so bleibt offenbar im Anfang und während aller dieser Aenderungen die Winkelbewegungsgrösse um irgend eine im Raum festliegende Gerade Null. Daraus folgt, dass beliebige im Raum festliegende Axen ein mittleres System bilden. Die Winkelbewegungsgrössen $A_\xi$, $A_\eta$, $A_\zeta$ hängen von der relativen Bewegung bez. der Axen der $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ab und sind von $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ unabhängig. Wir können daher jetzt dem Körper und den Axen denselben Bewegungszustand superponiren; die Axen werden fortfahren, ein mittleres System zu sein.

Es kommt manchmal vor, dass die betrachteten Aenderungen zwar lange andauern, aber so langsam vor sich gehen, dass der Körper, wenn man ihn nur kurze Zeit betrachtet, aussieht, als ändere er sich nicht und sei starr. Offenbar liegen in diesen Fällen die mittleren Axen auch merkbar im Körper fest.

§ 23. Es seien $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ die Axen des Körpers, entweder mittlere oder nicht. $Ox$, $Oy$, $Oz$ sei ein anderes Axensystem, auf welches wir die Bewegung zu beziehen wünschen. $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ seien die Winkelgeschwindigkeiten der Axen des Körpers um die Bezugsaxen, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ die der Bezugsaxen selbst. Die Winkelbewegungsgrössen des Körpers um die Bezugsaxen sind dann

$$\left.\begin{aligned} h_x &= A_x + A\omega_1 - F\omega_2 - E\omega_3 \\ h_y &= A_y + B\omega_2 - D\omega_3 - F\omega_1 \\ h_z &= A_z + C\omega_3 - E\omega_1 - D\omega_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

worin $A_x$, $A_y$, $A_z$ die Componenten von $A_\xi$, $A_\eta$, $A_\zeta$ um die Bezugsaxen und Null sind, wenn die Axen des Körpers mittlere Axen sind. Ebenso stellen hier $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ die Trägheits- und Deviationsmomente des Körpers für die Bezugsaxen vor.

Um die Bewegungsgleichungen zu erhalten, substituire man diese Werthe von $h_x$, $h_y$, $h_z$ in die Gleichungen

$$h_x' - \theta_3 h_y + \theta_2 h_z = L, \text{ etc., etc.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Wenn die Axen des Körpers zu Bezugsaxen gewählt werden, so ist $\theta_1 = \omega_1$, $\theta_2 = \omega_2$, $\theta_3 = \omega_3$, etc. Die Gleichungen erhalten nach der Einsetzung der Werthe von $h_x$, etc. die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\{A\omega_1 - F\omega_2 - E\omega_3 + A_x\} + (C - B)\,\omega_2\omega_3 + \\ &+ D(\omega_3^2 - \omega_2^2) + F\omega_1\omega_3 - E\omega_1\omega_2 + \omega_2 A_z - \omega_3 A_y = L \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

und eine ähnliche die beiden andern Gleichungen.

Darin sind $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ die Trägheits- und Deviationsmomente für die Axen des Körpers, während sich die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$, etc. und die Momente $L$, $M$, $N$ auf sie als Coordinatenaxen beziehen.

Wenn die augenblicklichen Lagen der Hauptaxen zu Bezugsaxen genommen werden, so nehmen die Ausdrücke (4) für $h_x$, $h_y$, $h_z$ eine sehr einfache Form an. Die Bewegungsgleichungen (5) werden dann

$$\frac{d}{dt}(A\omega_1 + A_x) - \theta_3(B\omega_2 + A_y) + \theta_2(C\omega_3 + A_z) = L \quad \ldots \quad (7)$$

mit zwei ähnlichen. In diesen setzen wir

$$\theta_1 = \omega_1 + \alpha_1, \quad \theta_2 = \omega_2 + \alpha_2, \quad \theta_3 = \omega_3 + \alpha_3 \quad \ldots \ldots \quad (8),$$

so dass also $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ die Winkelgeschwindigkeiten sind, mit welchen sich die Hauptaxen von den Axen des Körpers trennen. Diese Substitution wird gemacht, weil $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ in den meisten Fällen sehr klein sind. Die Gleichungen erhalten jetzt die Gestalt

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(A\omega_1) - (B - C)\,\omega_2\omega_3 - B\omega_2\alpha_3 + C\omega_3\alpha_2 + \frac{d}{dt}A_x - A_y(\omega_3 + \alpha_3) + \\ &\qquad + A_z(\omega_2 + \alpha_2) = L \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9) \end{aligned}$$

mit zwei ähnlichen. In diesen Gleichungen sind $A$, $B$, $C$ die augenblicklichen Werthe der Hauptträgheitsmomente des Körpers und werden die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$, etc., $\alpha_1$, etc. auf die Hauptaxen als Coordinatenaxen bezogen.

§ 24. Die letzten Gleichungen lassen eine Vereinfachung zu, wenn die Momentanaxe nahezu mit einer Hauptaxe zusammenfällt. Nimmt man sie zur $z$-Axe, so sind sowohl $\omega_1$ als $\omega_2$ kleine Grössen. Sind ferner die inneren Aenderungen klein und periodisch oder langsam und begrenzt, so dass die Hauptaxen keine grossen Lagenänderungen in dem Körper erfahren, so bleiben die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$ und $\omega_2$ während der Bewegung klein. Alsdann ist es manchmal gestattet, die Winkelbewegungsgrössen $A_x$, $A_y$, $A_z$, welche die Folge dieser inneren Aenderungen sind, zu vernachlässigen. Nimmt man ein Axensystem in dem Körper derart an, dass die Hauptaxen nicht weit von ihm abweichen, so sind auch die Winkelgeschwindigkeiten $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ klein. Wir wollen auch annehmen, es sei $N = 0$ und $L$, $M$ kleine Grössen.

Aus der dritten der Gleichungen (9) ergibt sich dann, dass $d(C\omega_3)/dt$ sich von Null um die Quadrate kleiner Grössen unterscheidet. Man kann daher in den kleinen Gliedern der beiden ersten Gleichungen $C\omega_3 = G$ setzen, worin $G$ eine Constante ist. Es wird so

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}(A\omega_1) - \left(\frac{B-C}{BC}G - \alpha_3\right)B\omega_2 + G\alpha_2 = L\\ \frac{d}{dt}(B\omega_2) - \left(\frac{C-A}{CA}G - \alpha_3\right)A\omega_1 - G\alpha_1 = M\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (10).$$

Ist der Körper einaxig und bleibt er es während aller Veränderungen, so ist $A = B$. Da wir nun beliebige Axen in der Aequatorebene des Körpers zu Hauptaxen nehmen können, so kann man die Gleichungen noch weiter vereinfachen, indem man diese Axen so wählt, dass $\alpha_3 = 0$ wird.

Bei dem Gebrauch dieser Gleichungen werden die inneren Veränderungen in dem Körper in Bezug auf die Axen des Körpers als gegeben vorausgesetzt, so dass $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ und $A$, $B$, $C$ bekannte Functionen von $t$ sind. Durch die Auflösung der Differentialgleichungen werden dann $\omega_1$ und $\omega_2$ bestimmt. Die Bewegung der Momentanaxe in dem Körper folgt daraus unmittelbar. Wenn es verlangt wird, kann man auch $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ finden und die Bewegung der Hauptaxen im Raum aus den Euler'schen Gleichungen ableiten.

Nehmen wir an, es handle sich um einen einaxigen Körper und die in dem Körper erfolgende Bewegung der Axe $Oz$ der Figur sei durch ihre Winkelcoordinaten $(\xi, \eta, 1)$ in Bezug auf die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ gegeben, so sind $\xi$, $\eta$ bekannte Functionen der Zeit. Da $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ die Winkelgeschwindigkeiten sind, mit denen sich die Hauptaxen in Bezug auf die Axen in dem Körper bewegen, so ist $\alpha_1 = -d\eta/dt$ und $\alpha_2 = d\xi/dt$.

Nehmen wir ferner an, die Aenderungen in dem Körper seien der Art, dass sich zwar die Lage der Hauptaxen merklich in dem Körper verschiebt, die Grössenveränderungen von $A$, $A$, $C$ jedoch so klein bleiben, dass man ihre Variationen, mit $\omega_1$, $\omega_2$ multiplicirt, vernachlässigen kann, so werden die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt} + \mu\omega_2 + \nu\frac{d\xi}{dt} = \frac{L}{A}\\ \frac{d\omega_2}{dt} - \mu\omega_1 + \nu\frac{d\eta}{dt} = \frac{M}{A}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11),$$

worin $\mu = G(C-A)/AC$ und $\nu = G/A$ ist.

In anderen Problemen können die Hauptaxen in dem Körper festliegen, während die Aenderungen in den Trägheitsmomenten gegeben sind. Alsdann ist $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ zu setzen und $A$, $B$, $C$ sind als bekannte Functionen der Zeit anzusehen.

Beisp. 1. Die Erde werde als einaxiger Körper angesehen, dessen Hauptträgheitsmomente sämmtlich nahezu gleich sind und der um die Axe der Figur mit der Winkelgeschwindigkeit $n$ rotirt. Wenn die inneren Aenderungen der Erde derart sind, dass der Pol der Axe der Figur eine kleine jährliche Bewegung um seine mittlere Lage ausführt und seine Coordinaten dabei $\xi = p \cos mt$, $\eta = q \sin mt$ sind, während sich die Grösse der Hauptträgheitsmomente nicht merklich ändert, zu beweisen, dass die Coordinaten des Pols der Momentanaxe

$$\xi_1 = \frac{\mu^2 p + \mu m q}{\mu^2 - m^2} \cos mt + H \cos(\mu t + K)$$

$$\eta_1 = \frac{\mu^2 q + \mu m p}{\mu^2 - m^2} \sin mt + H \sin(\mu t + K)$$

sind, worin $H$ und $K$ beliebige zwei Constante bedeuten. Helmert's Problem. *Astron. Nachr.* Bd. 126.

Um es zu beweisen, setze man in den Gleichungen (11), $L = 0$, $M = 0$ und substituire für $\xi$, $\eta$ ihre gegebenen Werthe; es wird $\xi_1 = \xi + \omega_1/n$ und $\eta_1 = \eta + \omega_2/n$.

In dem vorliegenden Fall, in welchem es sich um die Erde handelt, ist $2\pi/\mu$ etwa zehn Monaten und $2\pi/m$ einem Jahre gleich.

Beisp. 2. *Ein Ellipsoid, dessen Centrum O festliegt, zieht sich durch Abkühlung zusammen; es wird auf irgend eine Art in Bewegung gesetzt und steht nicht unter der Einwirkung äusserer Kräfte. Man finde die Bewegung.*

Die Hauptdurchmesser sind während der Bewegung Hauptaxen für $O$. Wir wollen sie zu Bezugsaxen nehmen. Die Ausdrücke für die Winkelbewegungsgrössen um die Axen sind dann $h_1 = A\omega_1$, $h_2 = B\omega_2$, $h_3 = C\omega_3$. Die Gleichungen (6) werden

$$\frac{d}{dt}(A\omega_1) - (B - C)\omega_2\omega_3 = 0$$

und zwei ähnliche.

Multiplicirt man sie mit $A\omega_1$, $B\omega_2$, $C\omega_3$, addirt und integrirt, so sieht man, dass $A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2$ während der Bewegung constant bleibt. Um ein weiteres Integral zu erhalten, setze man $A = A_0 f(t)$, $B = B_0 f(t)$, $C = C_0 f(t)$, worin $f(t)$ das Gesetz der Abkühlung ausdrückt, welches derart vorausgesetzt wird, dass der Körper seine Gestalt sehr langsam verändert. Setzt man ferner $\omega_1 f(t) = \Omega_1$, $\omega_2 f(t) = \Omega_2$, $\omega_3 f(t) = \Omega_3$ und $dt/dt' = f(t)$, so werden die Gleichungen

$$A_0 \frac{d\Omega_1}{dt'} - (B_0 - C_0)\Omega_2\Omega_3 = 0$$

und zwei ähnliche. Man kann sie behandeln, wie in dem Kapitel über die Bewegung der Körper, auf welche keine Kräfte einwirken. Liouville's Journal, 1858.

## Ueber relative Bewegung.

§ 25. **Clairaut's Theorem**[1]). Die Theorie der relativen Bewegung versteht man am besten, wenn man sie von möglichst vielen Seiten ansieht. Wir wollen daher jetzt eine Methode zur Bestimmung der

1) Die Art, wie die relative Bewegung eines Massenpunktes zu bestimmen ist, wurde zuerst von Clairaut 1742 angegeben und später von Coriolis auf andere Art bewiesen. Bertrand, dessen Beweisführung unabhängig von Coordinaten ist, kritisirte und verbesserte Clairaut's Darstellung in Bd. 19 des *Journal de l'École polytechnique*. Einen andern Beweis mit Hülfe von Polarcoordinaten gab H. W. Watson in Bd. 12 des *Quaterly Journal of Mathematics*.

Bewegung betrachten, die mehr elementar ist und in ihrem Resultat keinen ausschliesslichen Gebrauch von Cartesischen Coordinaten macht.

Es werde verlangt, die Bewegung eines Massenpunktes $P$ auf ein gegebenes System beweglicher Axen zu beziehen. $P_0$ sei die Lage von $P$ zu irgend einer Zeit $t$, $P_0$ sei an die Axen befestigt und bewege sich während eines kurzen Intervalles mit ihnen. Es stelle $f$ die Beschleunigung von $P_0$ zur Zeit $t$ der Richtung und Grösse nach dar. Der Massenpunkt $P$ wird sich selbstverständlich von $P_0$ trennen; die absolute Beschleunigung von $P$ im Raum ist aber, wie aus der Dynamik der Massenpunkte bekannt ist, die Resultante seiner relativen Beschleunigung in Bezug auf $P_0$ als festen Punkt und der Beschleunigung $f$ von $P_0$. Die Beschleunigung von $P_0$ heisse *die Beschleunigung des beweglichen Raums*[1]).

Es seien $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des Massenpunktes $P$ in Bezug auf die beweglichen Axen und $X$, $Y$, $Z$ die Componenten der gegebenen an dem Massenpunkt angreifenden Kräfte parallel den Axen. Es seien ferner $p$, $q$, $r$ die Componenten der Geschwindigkeit des Coordinatenanfangs; addirt man sie zu den rechten Seiten der Gleichungen (1) in § 5 und substituirt in (2), so erhält man

$$\frac{X}{m} = \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt}\theta_3 + 2\frac{dz}{dt}\theta_2 + Ax + By + Cz + D$$

$A = -\theta_2^2 - \theta_3^2$
$B = \theta_1\theta_2 - \dot\theta_3$
$C = \theta_3\theta_1 - \dot\theta_2$
$D = \dot p - \theta_3 q + \theta_2 r$

und ähnliche Ausdrücke für $Y$ und $Z$. Darin sind $A$, $B$, $C$, $D$ Functionen von $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$; $p$, $q$, $r$ und ihren Differentialquotienten nach $t$, welche man nicht niederzuschreiben braucht. Wären $x$, $y$, $z$ constant, so würden alle Glieder in dem Ausdruck für $X$ mit Ausnahme der letzten vier verschwinden. Diese letzteren mit den entsprechenden für $Y$ und $Z$ drücken daher die Beschleunigung $f$ eines Punktes $P_0$ aus, der starr mit den Axen verbunden ist, aber die augenblickliche Lage von $P$ einnimmt.

Wir haben nun die Wirkung der übrigen Glieder zu prüfen. Die Bewegung der Bezugsaxen während eines Intervalls $dt$ kann durch eine Bewegung des Coordinatenanfangs und eine Rotation $\Omega\, dt$ um eine Axe $OI$ ersetzt werden. $V$ stelle die relative Geschwindigkeit von $P$ bez. der Axen $x, y, z$ dar und $\theta$ sei der Winkel, den die Richtung von $V$ mit $OI$ macht. Man nehme nun das zweite und dritte Glied in dem Ausdruck für $X$ zusammen und ebenso die entsprechenden in den Ausdrücken für $Y$ und $Z$ und sehe für den Augenblick von allen andern Gliedern ab. Multiplicirt man die Ausdrücke für $X$, $Y$, $Z$ mit $\theta_1$, $\theta_2$ bez. $\theta_3$, so ist die Summe dieser Glieder Null. Die Resultante der Beschleunigungen steht

1) Im Original steht „acceleration of the moving space", die Italiener sagen „accelerazione nel moto di strascinamento". Einen *kurzen* deutschen allgemein angenommenen Namen kennt der Uebersetzer nicht. Vergl. auch Lüroth, Grundriss der Mechanik S. 13, der das Wort „Führungsbeschleunigung" gebraucht.

daher senkrecht auf $OI$. Multiplicirt man weiter die Ausdrücke für $X$, $Y$, $Z$ mit $dx/dt$, $dy/dt$ bez. $dz/dt$, so wird die Summe der Glieder wiederum Null. Die Resultante der Beschleunigungen steht daher auch senkrecht auf der Richtung der relativen Geschwindigkeit $V$. Addirt man schliesslich die Quadrate der Glieder, so ergibt sich als Grösse der resultirenden Beschleunigung $2\Omega V \sin\theta$.

Um nun die Art zu bestimmen, wie diese Kräfte anzubringen sind, muss man die Glieder, welche sie darstellen, auf die andere Seite der Gleichungen bringen. Die erste Gleichung wird dann

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + 2m\left(\frac{dy}{dt}\theta_3 - \frac{dz}{dt}\theta_2\right) - m(Ax + By + Cz + D)$$

und die beiden andern erhalten ähnliche Formen. Es sind dies die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes in Bezug auf feste Axen, an welchen dieselben gegebenen Kräfte, wie zuvor, und ausserdem zwei Zusatzkräfte angreifen. Die letzteren sind: erstens eine Kraft, welche der durch $mf$ dargestellten gleich und entgegengesetzt ist, worin $f$ die Beschleunigung des von dem Massenpunkt eingenommenen Punktes des beweglichen Raumes darstellt und zweitens eine Kraft, deren Grösse, wie gezeigt wurde, $2mV\Omega \sin\theta$ ist. Um ihre Richtung zu bestimmen, nehme man die $z$-Axe längs der Axe $OI$ und die $yz$-Ebene parallel zur Bewegungsrichtung des Massenpunktes; alsdann ist $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ und $dx/dt = 0$. Wie leicht zu sehen, verschwindet die Kraft aus den Gleichungen für $m\,d^2y/dt^2$ und $m\,d^2z/dt^2$, während sie in der für $m\,d^2x/dt^2$ sich auf das Glied $2m\theta_3\,dy/dt$ reducirt. Die Grösse dieser Kraft ist offenbar $2mV\Omega \sin\theta$ und sie wirkt in der positiven Richtung der $x$-Axe. Es ist dies die linke Seite, wenn man den fortrückenden Massenpunkt von der Axe $OI$ aus beobachtet (§ 26).

Nach der Integration der Gleichungen sind die willkürlichen Constanten aus den Anfangswerthen von $x$, $y$, $z$, $dx/dt$, $dy/dt$, $dz/dt$ zu bestimmen. Diese Differentialquotienten sind offenbar die Componenten der relativen Anfangsgeschwindigkeit des Massenpunktes in Bezug auf die beweglichen Axen.

§ 26. **Relative Bewegung eines Massenpunktes.** *Man kann diese Schlüsse in die folgende Regel bringen:*

Bei der Ermittelung der Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse $m$ in Bezug auf beliebige bewegliche Axen kann man die Axen so behandeln, als lägen sie im Raum fest, vorausgesetzt dass man annimmt, an dem Massenpunkt griffen ausser den gegebenen Kräften noch zwei andere an:

(1) eine Kraft gleich und entgegengesetzt $mf$, worin $f$ der Richtung und Grösse nach die Beschleunigung des von dem Massenpunkt eingenommenen Punktes des beweglichen Raumes darstellt. Die Kraft $mf$ heisst *„die Kraft des beweglichen Raumes“ (Centrifugalkraft).*

(2) eine Kraft, die senkrecht auf der Richtung der relativen Bewegung des Massenpunktes steht und ebenso auf der Rotationsaxe $OI$ der beweglichen Axen. Diese Kraft wird durch $2mV\Omega \sin\theta$ gemessen, worin $V$ die relative Geschwindigkeit des Massenpunktes, $\Omega$ die resultirende Winkelgeschwindigkeit der beweglichen Axen und $\theta$ der Winkel zwischen der Richtung der Geschwindigkeit und der Rotationsaxe ist. Diese Kraft heisst *die zusammengesetzte Centrifugalkraft oder Coriolis'sche Kraft.*

Um die Richtung zu finden, in welcher die Kraft anzubringen ist, stelle man sich mit dem Rücken so gegen die Axe $OI$, dass die Rotation die Richtung der Zeiger einer Uhr hat; beobachtet man dann den Massenpunkt, wie er von der Axe $OI$ sich entfernt, so wirkt die Kraft nach der linken Seite. Die Axe $OI$ kann man passender Weise *die Axe der Centrifugalkräfte* nennen.

§ 27. Beisp. Wenn der Massenpunkt gezwungen wird, sich längs einer Curve zu bewegen, die sich selbst auf beliebige Art bewegt, so kann man die zusammengesetzte Centrifugalkraft, da sie senkrecht zur Richtung der relativen Geschwindigkeit des Massenpunktes ist, in die Reaction der Curve einschliessen. Die einzige Kraft, die man an dem Massenpunkt angreifen lassen muss, ist die Kraft des beweglichen Raumes. Dreht sich die Curve um eine feste Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega$, so sind die Componenten der beschleunigenden Kraft des beweglichen Raumes offenbar $\Omega^2 r$ in der Richtung von der Rotationsaxe weg und $r\,d\Omega/dt$ senkrecht zu der Ebene, welche den Massenpunkt und die Axe enthält, wenn man unter $r$ den Abstand des Massenpunktes von der Axe versteht. Dies stimmt mit den Ausführungen in dem Abschnitt über relative Bewegung Bd. 1, Kap. 4, § 213 überein.

§ 28. Bei der Ermittelung der zusammengesetzten Centrifugalkraft darf man nicht vergessen, dass man die Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ sowohl, als die lineare Geschwindigkeit $V$ durchaus beliebig zerlegen und die Kräfte, welche jede Componente zur Folge hat, gesondert aufsuchen kann. Obgleich man auf diese Art mehr als zwei Kräfte erhält, welche an dem Massenpunkt angebracht werden müssen, so lässt sich doch durch geeignete Zerlegung erreichen, dass entweder einige von ihnen keine Wirkung hervorbringen und daher weggelassen werden können oder eine solche Wirkung, die leicht in Rechnung zu ziehen ist.

§ 29. **Relative Bewegung der starren Körper.** Soll das Clairaut'sche Theorem auf die Bewegung eines starren Körpers angewandt werden, so muss man annehmen, an jedem Massenpunkt griffen die zwei Kräfte an, welche von der Lage und Geschwindigkeit des Massenpunktes abhängen. Um die Resultante aller dieser Kräfte zu ermitteln, hat man im Allgemeinen eine Integration über den ganzen Körper auszuführen. Diese Integration ist, wenn nicht schwierig, doch zuweilen langwierig. Man hat Methoden zur Abkürzung des Verfahrens vorgeschlagen; wir übergehen sie aber hier, weil man solche Probleme im Allgemeinen leichter mit Hülfe der in § 10 beschriebenen Methoden löst.

§ 30. **Die Anwendung des Princips der lebendigen Kraft auf bewegliche Axen.** *Man nehme an, das System würde in irgend einem Augenblick mit den beweglichen Axen, in Bezug auf welche die Bewegung gesucht wird, fest verbunden und berechne unter dieser Voraussetzung die Effectivkräfte des Systems. Sie wurden in § 25 die Kräfte des beweglichen Raumes genannt. Bringen wir sie zusätzlich zu den gegebenen Kräften, aber in umgekehrter Richtung an dem System an, so lässt sich die Gleichung der lebendigen Kraft zur Bestimmung der relativen Bewegung so benutzen, als lägen die Axen im Raum fest.* Dieses Theorem verdankt man Coriolis, *Journ. de l'Éc. polytech.*, 1831.

1) Behält man die Bezeichnung des § 25 bei, so sind die Componenten der Beschleunigungen eines Punktes $P$ parallel zu den rechtwinkligen beweglichen Axen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt}\theta_3 + 2\frac{dz}{dt}\theta_2 + Ax + By + Cz + D$$

mit zwei ähnlichen Ausdrücken für die $y$- und $z$-Axe. Die letzten vier Glieder mit den entsprechenden Gliedern der andern Ausdrücke sind die Componenten der Beschleunigung eines Punktes $P_0$, der mit den Axen fest verbunden ist, aber die augenblickliche Lage von $P$ einnimmt. Wir wollen sie $X_0$, $Y_0$, $Z_0$ nennen.

Greifen wir nun auf den Beweis des Princips der lebendigen Kraft, wie er in Bd. 1, Kap. VII, § 350 gegeben wurde, zurück. Um ihn dem vorliegenden Fall anzupassen, hat man nur die obigen Ausdrücke an die Stelle von $d^2x/dt^2$, etc. in die allgemeine Gleichung der virtuellen Momente einzusetzen. Substituirt man für die Verschiebungen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ ihre Werthe $dx$, $dy$, $dz$, so verschwinden offenbar die Glieder, die $dx/dt$, $dy/dt$, $dz/dt$ enthalten. Nachdem man integrirt hat, wird die Gleichung

$$\Sigma m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$
$$= 2\Sigma m\int\{(X - X_0)\,dx + (Y - Y_0)\,dy + (Z - Z_0)\,dz\} + C.$$

§ 31. 2) *Ein zweiter Beweis.* Das Coriolis'sche Theorem folgt auch unmittelbar aus dem in § 25 für alle Arten relativer Bewegung gegebenen Satz. Der eben gegebene Beweis hat den Vorzug, dass er aus den Grundprincipien abgeleitet wird.

Offenbar muss, wenn man das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten benutzt, jede Kraft, deren Richtungslinie senkrecht auf der ihrem Angriffspunkt gegebenen Verschiebung steht, aus der Gleichung verschwinden. In dem Princip der lebendigen Kraft ist nun die Verschiebung, welche jedem Punkt gegeben wird, das Bogenelement, das dieser Punkt in der Zeit $dt$ bez. der Axen beschreibt. Die zusammengesetzte Centrifugalkraft wirkt aber senkrecht zu diesem Bogen und verschwindet daher aus der Gleichung. Die virtuellen Momente der Kräfte des beweglichen Raumes dagegen sind nicht Null und müssen in der Gleichung berücksichtigt werden.

§ 32. Beisp. *Eine Kugel rollt auf einer vollkommen rauhen Ebene, die sich mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit n um eine horizontale in ihr gelegene Axe herumdreht. Wenn man annimmt, die Bewegung der Kugel geschehe in einer auf der Rotationsaxe senkrechten verticalen Ebene, die relative Bewegung der Kugel in Bezug auf die Ebene zu finden.*

Es sei $Ox$ die von der Kugel bei ihrem Rollen auf der Ebene beschriebene Bahn und $Oy$ werde durch die Rotationsaxe senkrecht zu $Ox$ in der Ebene der Bewegung der Kugel gezogen. $nt$ sei der Winkel, den $Ox$ mit einer horizontalen durch die Rotationsaxe gelegten Ebene macht, und $\varphi$ der Winkel, den der Radius der Kugel, der anfangs senkrecht auf der Ebene stand, mit der $x$-Axe macht.

$x$, $y$ seien die Coordinaten von $P$, dem Centrum der Kugel und $Mk^2$ das Trägheitsmoment der Kugel für einen Durchmesser.

Läge die Kugel bez. der Ebene fest, so wären ihre Effectivkräfte: $Mn^2x$ und $Mn^2y$ am Schwerpunkt angreifend und ein Paar $Mk^2\,dn/dt = 0$ um den Schwerpunkt. Siehe Bd. 1, Kap. 4; Anm. zu § 450. Ferner sind die Componenten der gegebenen Kraft, nämlich der Schwere, parallel zu den beweglichen Axen $g \sin nt$ und $-g \cos nt$. Die Gleichung der lebendigen Kraft für die relative Bewegung lautet daher:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + k^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} = n^2x\frac{dx}{dt} + n^2y\frac{dy}{dt} + \\ + g \sin nt\frac{dx}{dt} - g\cos nt\frac{dy}{dt}.$$

Hierin ist $dx/dt = a\,d\varphi/dt$ und $dy/dt = 0$. Man erhält mithin

$$\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2} = n^2x + g \sin nt.$$

Diese Gleichung hätte sich auch aus den Formeln für bewegliche Axen in Bd. 1, Kap. 4, § 211 ableiten lassen.

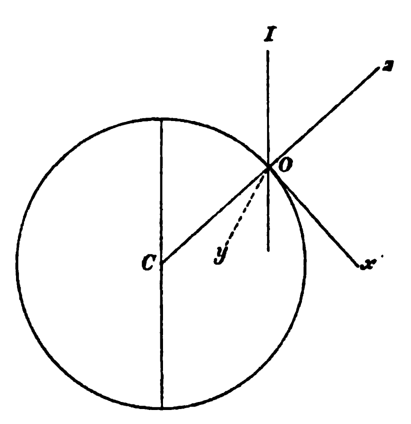
Da bei der Kugel $k^2 = \frac{2}{5}a^2$ ist, so ergibt sich aus der Gleichung

$$x = -\frac{5}{12}\frac{g}{n^2}\sin nt + Ae^{n\sqrt{\frac{5}{7}}\,t} + Be^{-n\sqrt{\frac{5}{7}}\,t},$$

worin $A$ und $B$ zwei Constante bedeuten, die von den Anfangsbedingungen der Kugel abhängen.

## Relative Bewegung in Bezug auf die Erde.

§ 33. Die Bewegung eines Körpers auf der Oberfläche der Erde ist nicht genau so, wie sie wäre, wenn sich die Erde in Ruhe befände. Als eine Erläuterung zu dem Gebrauch der Gleichungen dieses Kapitels wollen wir im Folgenden die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes in Bezug auf Coordinatenaxen bestimmen, die in der Erde festliegen und sich mit ihr bewegen.




$O$ sei irgend ein Punkt auf der Oberfläche der Erde, dessen Breite $\lambda$ ist. $\lambda$ ist alsdann der Winkel, den die Normale auf die Oberfläche stillen Wassers in $O$ mit der Ebene des Aequators macht. Die $z$-Axe sei die Verticale in $O$ und positiv in der zur Schwere entgegengesetzten Richtung. Die Axen der $x$ und $y$ seien eine Tangente an den Meridian bez. ein Loth auf ihn und positiv nach Süden bez. Westen. In der Figur ist die $y$-Axe punktirt, um anzudeuten, dass sie senkrecht auf der Ebene des Papiers steht. $\omega$ sei die Winkelgeschwindigkeit der Erde, $b$ der Abstand des Punktes $O$ von der Rotationsaxe.

Wir können den Punkt $O$ zur Ruhe bringen, indem wir an jedem betrachteten Punkt eine Beschleunigung anbringen, die derjenigen von $O$ gleich und entgegengesetzt, mithin gleich $\omega^2 b$ ist und die Richtung von der Rotationsaxe weg hat. Ferner muss man eine Geschwindigkeit anbringen, die der Anfangsgeschwindigkeit von $O$ gleich und entgegengesetzt ist. Diese Geschwindigkeit ist $\omega b$. Die ganze Figur dreht sich dann um die Axe $OI$, die der Rotationsaxe der Erde parallel ist, mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$.

Ist der Massenpunkt von der Erde weggeschleudert worden, so greifen an ihm die Anziehung der Erde und die ihm mitgetheilte Beschleunigung $\omega^2 b$ an. Die Anziehung der Erde ist nicht das, was wir Schwere nennen. Die Schwere ist die Resultante aus der Anziehung der Erde und der Centrifugalkraft und die Erde hat eine solche Gestalt, dass diese Resultante in einer auf der Oberfläche stillen Wassers senkrechten Richtung wirkt. Wäre es nicht so, dann würden auf der Erde ruhende Massenpunkte das Bestreben haben, auf ihrer Oberfläche zu gleiten. Es ergibt sich daher, dass die an einem Massenpunkt in $O$ angreifende Kraft, *nachdem $O$ zur Ruhe gekommen ist*, der Schwere gleich kommt. Sie werde durch $g$ dargestellt.

Die Bewegungsgleichungen werden viel einfacher, wenn man so kleine Grössen, wie den Unterschied zwischen den Anziehungen der Erde an verschiedenen Punkten in der Nähe von $O$ vernachlässigt. Wenn $a$ den Radius des Erdäquators bedeutet, so ist die Anziehung in der Höhe $z$ über $O$ nahezu $g(1-2z/a)$. Da $a$ etwa 6000 km und $2\pi/\omega$ etwas weniger als 24 Stunden beträgt, so findet man für die Centrifugalkraft am Aequator $\omega^2 a$ leicht $g/289$. Vernachlässigt man daher das kleine Glied $2gz/a$, so muss man auch $\omega^2 z$ für alle Punkte in der Nähe von $O$ weglassen. Dagegen wird $\omega^2 b$ beibehalten, weil an Orten in der Nähe des Aequators $b$ nahezu so gross wie der Radius der Erde wird.

Da die Erde sich um $OI$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ dreht und der Winkel $IOz$ das Complement von $\lambda$ ist, so wird die Componente um $Oz$ gleich $\omega \sin \lambda$. Da ferner die Rotation von Westen nach Osten stattfindet, so geht die Componente der Winkelgeschwindigkeit von $y$ nach $x$ hin, hat also negative Richtung. Daher ist $\theta_3 = -\omega \sin \lambda$. Die Componente der Winkelgeschwindigkeit um $Ox$ ist $\omega \cos \lambda$ und hat die Richtung von $y$ nach $z$, also die positive; daher ist $\theta_1 = \omega \cos \lambda$. Weil $OI$ senkrecht auf $Oy$ steht, ist $\theta_2 = 0$. Daraus folgt, nach § 5, dass die absoluten Geschwindigkeiten eines Massenpunktes mit den Coordinaten $(x, y, z)$

$$u = \frac{dx}{dt} + \omega \sin \lambda y,$$

$$v = \frac{dy}{dt} - \omega \cos \lambda z - \omega \sin \lambda x,$$

$$w = \frac{dz}{dt} + \omega \cos \lambda y$$

sind. Um die Bewegungsgleichungen zu finden, hat man diese Werthe nur in die Gleichungen § 5 einzusetzen. Man erhält so

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt} = X,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt} - 2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} = Y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt} = -g + Z,$$

worin die Glieder $(X, Y, Z)$ sämmtliche beschleunigenden an dem Punkt angreifenden Kräfte mit Ausnahme der Schwere enthalten.

Behält man die Glieder, die $\omega^2$ enthalten, bei und schliesst den Unterschied zwischen den Anziehungskräften, die auf $(x, y, z)$ und $O$ wirken, in die Kräfte $X, Y, Z$ ein, so werden die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt} - \omega^2\sin^2\lambda\, x - \omega^2\sin\lambda\cos\lambda\, z = X,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt} - 2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} - \omega^2 y = Y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt} - \omega^2\cos^2\lambda\, z - \omega^2\sin\lambda\cos\lambda\, x = -g + Z.$$

Diese Gleichungen stimmen mit denen überein, die Poisson im *Journal de l'Éc. polytechnique*, 1838 gegeben hat.

§ 34. Beisp. 1. Als Beispiel nehme man den Fall eines Massenpunktes, der von der Höhe $h$ herabfällt. Die Anfangsbedingungen sind: $x$, $y$, $dx/dt$, $dy/dt$, $dz/dt$ sämmtlich gleich Null und $z = h$. Als erste Annäherung vernachlässige man alle Glieder, die den kleinen Factor $\omega$ enthalten. Man erhält $x = 0$, $y = 0$, $z = h - \frac{1}{2}gt^2$.

Für eine zweite Annäherung setzen wir diese Werthe von $(x, y, z)$ in die kleinen Glieder ein. Man integrire und erhält

$$x = 0,\ y = -\frac{1}{3}\omega\cos\lambda\, gt^3,\ z = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Es findet also eine kleine Abweichung nach Osten hin statt, die der dritten Potenz der Fallzeit proportional ist. Eine südliche Abweichung existirt nicht und die verticale Bewegung ist dieselbe, wie wenn die Erde in Ruhe wäre.

Ein elementarer Beweis wird die Sache klarer machen. Der Massenpunkt falle von der Höhe $h$ vertical über $O$ herab. Wird nun $O$ zur Ruhe gebracht, so wird der Massenpunkt thatsächlich nach Osten mit der Geschwindigkeit $\omega h\cos\lambda$ in Bewegung gesetzt. Würde daher die Schwere, wie es in Folge der Rotation der Erde um $OI$ in der That geschieht, ihre Richtung nicht ändern, so beschriebe der Massenpunkt eine Parabel und die östliche Abweichung wäre $(\omega h\cos\lambda)\,t$, unter $t$ die Fallzeit verstanden. Da $h = \frac{1}{2}gt^2$, so beträgt diese Abweichung $\frac{1}{2}\omega\cos\lambda\, gt^3$. Die Rotation $\omega$ um $OI$ hat die Componenten $\omega\sin\lambda$ um $Oz$ und $\omega\cos\lambda$ um $Ox$. Die erstere ändert die Lage der Normalen $OC$ auf die Oberfläche der Erde, welche die Richtung der Schwere hat, nicht. Die letztere dreht $OC$ in

der Zeit $t$ um einen Winkel $\omega \cos \lambda t$. Auf diese Art ändert die Schwere bei dem Fallen des Massenpunktes nach und nach ihre Richtung. An dem Massenpunkt greift daher eine westliche Componente gleich $g \sin(\omega \cos \lambda\, t)$ an, die, weil $\omega t$ klein ist, nahezu $g\, \omega \cos \lambda t$ gleich kommt. Ist $y'$ der Abstand des Massenpunktes von der Lage der $xz$-Ebene im Raum in dem Augenblick, in welchem der Massenpunkt zu fallen begann und wird $y'$ positiv nach Westen gerechnet, so wird die Bewegungsgleichung des Massenpunktes im Raum $d^2y'/dt^2 = g\omega t \cos \lambda$. Integrirt man und beachtet, dass, wie oben erklärt wurde, $dy'/dt = -\omega h \cos \lambda$ für $t = 0$ ist, so erhält man $y' = -\omega h t \cos \lambda + \frac{1}{6} g\omega t^3 \cos \lambda$. Wenn der Massenpunkt den Boden erreicht, so ist $y'$ nahezu gleich $y$ und $h = \frac{1}{2} g t^2$, die westliche Abweichung beträgt daher $-\frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \lambda$, wie zuvor. Sollte es nicht von selbst einleuchten, dass $y' = y$ ist, so lässt es sich folgendermassen beweisen. In der Zeit $t$ haben sich $Oy$, $Oz$ um einen sehr kleinen Winkel $\theta = \omega \cos \lambda t$ gedreht; daher ist, wie bei der Transformation der Axen, $y' = y \cos \theta - z \sin \theta$, woraus sich, bei Vernachlässigung der Quadrate von $\theta$, $y' = y$ ergibt.

Beisp. 2. Ein Massenpunkt wird im luftleeren Raum mit der Geschwindigkeit $V$ vertical in die Höhe geworfen. Man zeige, dass bei seiner Rückkunft auf den Boden keine Abweichung nach Süden stattgefunden hat, die nach Westen dagegen $4\omega \cos \lambda V^3/3g^2$ beträgt. [Laplace, 4. S. 341.]

Beisp. 3. Man lässt einen Massenpunkt aus der Höhe $h$ auf die Erde fallen. Wenn der Widerstand der Luft $kv^n$ ist, unter $v$ die relative Geschwindigkeit des Massenpunktes und der Luft verstanden, zu zeigen, dass die Abweichung nach Süden wieder Null, die nach Osten dagegen

$$\frac{1}{3}\, \omega \cos \lambda\, g t^3 \left\{ 1 - \frac{3 k g^{n-1} t^n}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

ist, worin $t$ die Zeit des Fallens ist und die Quadrate von $k$ vernachlässigt wurden. Laplace gibt die Entwickelung für verschiedene Potenzen von $k$, wenn der Widerstand wie das Quadrat der relativen Geschwindigkeit variirt. [Méc. Céleste, 4. S. 337.]

## Experimenteller Nachweis der Erdrotation. (Vergl. auch §§ 39 und 42.)

§ 35. Der Gedanke, die Rotation der Erde durch Beobachtung fallender Körper zu beweisen, rührt von Newton her. In Folge dieser Anregung stellten Versuche an: Hooke in England 1680, Guglielmini in Bologna 1791, Benzenberg in Hamburg 1802, besonders aber Reich in den Freiberger Bergwerken 1831. Aus verschiedenen Ursachen sind sie sämmtlich mit Ausnahme der letzten nicht besonders erfolgreich gewesen. Poisson untersuchte 1838 die Theorie und fand bei einem Vergleich seiner Resultate mit den Versuchen Reich's eine sehr genaue Uebereinstimmung mit den letzteren. Die Schwierigkeit bei den Versuchen an fallenden Körpern besteht in der Kleinheit der Grösse, die zu messen ist. Obgleich Reich eine Fallhöhe von 158 m hatte, so betrug die Abweichung nach Osten nur $28\frac{1}{2}$ mm und die Fallzeit etwa 6 Secunden. Im Jahre 1851 erfand Foucault eine neue Methode [1]); er zeigte, dass die Schwingungsebene eines einfachen Pendels um die Verticale mit einer Winkelgeschwindigkeit zu rotiren scheint, welche von der Erdrotation herrührt. Der Vorzug dieser Methode besteht darin, dass der Versuch mehrere Stunden fortgesetzt werden kann, so dass die

1) Siehe Foucault, *Comptes Rendus,* 1851.

langsame Abweichung der Ebene des Pendels sich eine Zeit hindurch beobachten lässt, die lang genug ist, um die ganze Verrückung sehr gross zu machen. Foucault's Experiment wurde vielfach wiederholt und verbessert. Von in England angestellten Versuchen sind zu erwähnen die von Worms 1859 in King's College zu London, von Galbraith und Haughton in Dublin und die zu Bristol, Aberdeen und Waterford im Jahr 1895.[1]) Die Genauigkeit ist gross genug, um die Rotationszeit der Erde aus ihnen ableiten zu können. Foucault's Beobachtungen ergaben 23 h 33 m 57 s während die zu Waterford (siehe *Engineering* 5. Juli, 1895) zu 24 h 7 m 30 s führten und die wahre Zeit zwischen beiden liegt. Es ist zwar leicht, ein ungefähr richtiges Resultat zu erhalten, erhebliche Schwierigkeiten stellen sich aber ein, wenn man die Abweichung genau feststellen will. Foucault gibt denn auch zu, dass ihm der Versuch erst nach jahrelangen Proben gelang. (Siehe *Bulletin de la Société Astronomique de France,* Dec. 1896.)

Im Jahr 1852 überreichte Foucault der Akademie der Wissenschaften einen anderen experimentellen Beweis für die Umdrehung der Erde, der sich auf die gegenüber äusseren Störungen merklich unveränderliche Lage der Rotationsebene eines Körpers gründet, welcher frei aufgehängt ist und um eine seiner Hauptaxen rotirt.

§ 36. *In vielen Fällen ist es von Vortheil, die Bewegung auf Axen zu beziehen, die eine allgemeinere Lage haben, als die in § 33 beschriebenen.* $O$ sei der Coordinatenanfang; die Bewegung der Axen sei durch die Winkelgeschwindigkeiten $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ um sich selbst gegeben. Wir nehmen an, sie seien kleine Grössen von derselben Ordnung wie $\omega$, so dass ihre Quadrate und Producte vernachlässigt werden können.

*Werden diese Axen in Beziehung auf die Erde festgelegt,* so sind $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ die Componenten von $\omega$ und constant. Nach Substitution der Werthe von $u$, $v$, $w$ (§ 5) in die Ausdrücke für $X$, $Y$, $Z$ desselben Paragraphen findet man, da die Differentialquotienten von $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ verschwinden,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt}\theta_3 + 2\frac{dz}{dt}\theta_2 = X$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dz}{dt}\theta_1 + 2\frac{dx}{dt}\theta_3 = Y$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt}\theta_2 + 2\frac{dy}{dt}\theta_1 = -g + Z.$$

Wünscht man z. B. die Bewegung eines Geschosses zu bestimmen, so ist es am vortheilhaftesten, die $z$-Axe vertical und die $xz$-Ebene zur Wurfebene zu nehmen. Macht die $x$-Axe den Winkel $\beta$ mit dem Meridian und wird der Winkel von Süden aus nach Westen gemessen, so ist

$$\theta_1 = \omega \cos\lambda \cos\beta, \quad \theta_2 = -\omega \cos\lambda \sin\beta, \quad \theta_3 = -\omega \sin\lambda.$$

1) In Holland hat neuerdings Kamerlingh Onnes in Gröningen Versuche mit einem Pendel von nur 1,m2 Länge angestellt, welches im luftleeren Raum schwang. Ein anderes Verfahren hat Poinsot, *Comptes rendus*, 1851 und Andrade, ibid., 1895 eingeschlagen.

*Manchmal ist es besser, die Bewegung auf Axen zu beziehen, welche sich in Bezug auf die Erde bewegen.* Nehmen wir z. B. an, wir behielten die Verticale als $z$-Axe bei und die $x$- und $y$-Axe bewegten sich um die Verticale mit der Winkelgeschwindigkeit $p$, so haben $\theta_1$, $\theta_2$ die eben angegebenen Werthe, während $\theta_3 = p - \omega \sin \lambda$ wird. Es ist jetzt $d\beta/dt = p$, und wenn $p$ von derselben Ordnung wie $\omega$ ist, so sind die Differentialquotienten $d\theta_1/dt$, etc. von der Ordnung $\omega^2$ und daher wieder zu vernachlässigen. Die obigen allgemeinen Bewegungsgleichungen gelten also auch für diese beweglichen Axen. *Im Allgemeinen kann man daher diese Gleichungen für beliebige rechtwinklige Axen benutzen, mögen sie nun festliegen oder sich um einen festen Anfang bewegen, vorausgesetzt, dass ihre Winkelbewegungen bezüglich der Erde von derselben Ordnung, wie $\omega$, sind.*

Man kann die Gleichungen in jedem speciellen Fall mit Hülfe der Methode fortgesetzter Annäherung lösen. Vernachlässigt man die kleinen Glieder, so erhält man eine erste Annäherung an die Werthe von $(x, y, z)$. Um die zweite zu finden, setzt man diese Werthe in die Glieder, die $\omega$ enthalten, ein und integrirt die sich ergebenden Gleichungen. Da die Gleichungen nur unter der Voraussetzung gelten, dass $\omega^2$ vernachlässigt werden darf, so kann eine dritte Annäherung nicht vorgenommen werden.

*Zwei specielle Fälle verdienen Beachtung*: (1), *wenn der Massenpunkt sich bei seiner Bewegung nicht weit von der Verticalen entfernt und* (2), *wenn die Bewegung nahezu horizontal ist.* Nimmt man an, die $z$-Axe sei vertical, so sind in dem ersten Fall die Horizontalgeschwindigkeiten $dx/dt$ und $dy/dt$ klein im Vergleich zur verticalen Geschwindigkeit $dz/dt$. Die Producte aus den ersteren und $\omega$ sind daher kleine Grössen von höherer Ordnung als das Product aus der letzten und $\omega$ und können bei einer ersten Annäherung vernachlässigt werden. In dem zweiten Fall ist dagegen $dz/dt$ klein und sein Product mit $\theta_1$, $\theta_2$ wegzulassen. Wir stellen die beiden Reihen von Gleichungen zum Vergleich nebeneinander.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\theta_2 = X, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt}\theta_3 = X,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dz}{dt}\theta_1 = Y, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt}\theta_3 = Y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + Z, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt}\theta_2 + 2\frac{dy}{dt}\theta_1 = -g + Z.$$

Man beachte, dass bei einer nahezu verticalen Bewegung die Componenten $\theta_1$, $\theta_2$ in den Gleichungen auftreten, während $\theta_3$ erst erscheint, wenn man zu genaueren Annäherungen übergeht. Dadurch wird auch erklärt, weshalb bei der Berechnung der Abweichung eines fallenden Körpers nach Osten die Componente der Winkelgeschwindigkeit der Erde um die Horizontale und die sich daraus ergebende Aenderung

der Richtung der Schwere nicht vernachlässigt werden kann, § 34. Andrerseits spielt, wenn die Bewegung nahezu horizontal ist, die Componente der Erdrotation um die Verticale, nämlich $\theta_3$, die Hauptrolle.

Wenn man die Gleichungen für den Fall einer nahezu horizontalen Bewegung mit denen in Bd. 1, § 211 vergleicht, in welchen das Quadrat von $\omega$ vernachlässigt wird, so ist ersichtlich, dass die beiden ersten Gleichungen die Bewegung eines Massenpunktes ausdrücken, welche frei im Raum stattfindet, aber auf Axen bezogen wird, die sich um die Verticale mit der Winkelgeschwindigkeit $\theta_3$ drehen. Sind, wie es im Allgemeinen der Fall ist, die Kräfte $X$, $Y$ von den Variationen der nahezu constanten Grösse $z$ unabhängig, *so lassen sich auf solche Art diese Gleichungen auf elementarem Weg ableiten.* Der Massenpunkt bewegt sich unbehelligt von der Rotation der Erde frei im Raum, die Bezugsaxen aber rotiren um die Verticale und verlassen den Punkt. Wir wollen diese geometrische Auslegung der Gleichungen an einigen einfachen Fällen erläutern.

Eine Kugel werde aus einem Geschütz mit grosser Geschwindigkeit $V$ in einer Richtung, die einen kleinen Winkel $\alpha$ mit dem Horizont macht, so abgeschossen, dass *die Flugbahn nahezu flach ist.* Die Kugel beschreibt nach dem Verlassen des Geschützes im Raum eine Parabel, während sich die Bezugsaxen mit der Erde um die in dem Standpunkt des Geschützes errichtete Verticale drehen. Die Kugel wird von den Axen verlassen und nach der Zeit $t$ sind ihre Coordinaten $x = Vt\cos\alpha$, $y = -x\theta_3 t$. Da $\theta_3 = -\omega\sin\lambda$ ist, so geht die Abweichung $y$ auf der nördlichen Halbkugel immer nach der rechten Seite der Schussebene hin, auf der südlichen dagegen nach der linken. Versteht man unter $R$ die Schussweite, so beträgt die ganze Abweichung $Rt\omega\sin\lambda$. In den *Comptes Rendus*, 1866, wird angegeben, dass die mittelst dieser Formel berechnete Abweichung in Folge der Erdrotation die Hälfte der thatsächlichen Abweichung bei einem Whitworthgeschütz ausmache. Wir bemerken noch, dass die Abweichung $y$ von dem Azimuth der Schussebene nicht abhängt und dass die Zeit, in der ein gegebener Abstand $x$ zurückgelegt wird, von der Rotation der Erde unabhängig ist. Die dritte Bewegungsgleichung gibt

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\theta_2\frac{dx}{dt};$$

daher

$$z = Vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 - V\omega t^2\cos\alpha\cos\lambda\sin\beta.$$

Die verticale Abweichung der Kugel von ihrer parabolischen Bahn beträgt daher in dem Moment, in welchem sie die Scheibe in dem Abstand $x$ von dem Geschütz erreicht, $-xt\omega\cos\lambda\sin\beta$.

Betrachten wir einen andern Fall. Wenn die Linse eines Pendels kleine Schwingungen macht, so ist ihre Bewegung nahezu horizontal. Um ihre Bahn zu finden, nehmen wir an, das Pendel schwinge frei

im Raum (mit den richtigen Anfangsbedingungen) und die Axen drehten sich um eine verticale, durch den Aufhängungspunkt gehende Linie mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie die Erde. Die Schwingungsebene scheint daher um die Verticale mit der Winkelgeschwindigkeit $-\theta_3$, d. h. mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin\lambda$ von Süden nach Westen zu rotiren.

§ 37. **Abweichung der Geschosse.** Beisp. 1. Ein Massenpunkt wird mit der Geschwindigkeit $V$ in einer Richtung fortgeschleudert, die den Winkel $\alpha$ mit der Horizontalebene macht, und so, dass die Verticalebene durch die Wurfrichtung den Winkel $\beta$, von Süden nach Westen gemessen, mit der Meridianebene bildet. Wenn die $x$ horizontal in der Wurfebene, die $y$ horizontal in einer Richtung gemessen werden, die den Winkel $\beta + \frac{1}{2}\pi$ mit dem Meridian macht und $z$ vertical aufwärts von dem Anfangspunkt der Bahn aus, zu beweisen, dass

$$x = V\cos\alpha t + \left(V\sin\alpha t^2 - \frac{1}{3}gt^3\right)\omega\cos\lambda\sin\beta,$$

$$y = \left(V\sin\alpha t^2 - \frac{1}{3}gt^3\right)\omega\cos\lambda\cos\beta + V\cos\alpha t^2\omega\sin\lambda,$$

$$z = V\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 - V\cos\alpha t^2\omega\cos\lambda\sin\beta$$

ist, worin $\lambda$ die geographische Breite des Ortes und $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde um die Axe ihrer Figur bedeutet.

Man zeige, dass die Flugzeit $T$ um $2T\cos\alpha\cos\lambda\sin\beta\cdot V\omega/g$ vermindert wird, die Schussweite in der durch den Anfangspunkt der Bahn gehenden Horizontalebene um

$$4\omega\sin\beta\cos\lambda\sin\alpha\left(\frac{1}{3}\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\cdot V^3/g^3$$

vergrössert wird und dass die Abweichung nach der rechten Seite der Wurfebene

$$4\omega\sin^2\alpha\left(\frac{1}{3}\cos\lambda\cos\beta\sin\alpha + \sin\lambda\cos\alpha\right)\cdot V^3/g^2 \quad \text{ist.}$$

Man wird vielleicht einwenden, dass bei diesen Resultaten der Widerstand der Luft vernachlässigt worden sei, dessen Wirkung auf die Aenderung der parabolischen Bahn viel grösser ist, als die der Rotation der Erde. So lange man jedoch die Quadrate sowohl von $\omega$ als von der Constanten des Widerstandes vernachlässigt, ist die Abweichung in Folge von $\omega$ bei einer Bahn ohne Widerstand dieselbe, wie bei einer Bahn mit Widerstand.

§ 38. **Der Einfluss der Erdrotation auf das Pendel.** Wir wollen die Bewegung etwas ausführlicher, wie in § 36, betrachten und die Erörterungen in anderer Form wiederholen, um die Sache klarer zu machen.

Ein Punkt von der Masse $m$ wird mittelst eines dünnen Fadens von der Länge $l$ an einem bez. der Erde festliegenden Punkt $O$ aufgehängt; er wird zur Seite gezogen, so dass der Faden einen kleinen Winkel $\alpha$ mit der Verticalen durch $O$ macht, und dann losgelassen.

Die Bewegungsgleichungen sind die im Anfang des § 36 gegebenen. Nimmt man an, die $z$-Axe sei vertical und der Coordinatenanfang liege in der Gleichgewichtslage des Massenpunktes $m$, so sind die Glieder, welche $dz/dt$ enthalten, von derselben Ordnung, wie $\alpha^2\omega$,

und sollen daher vernachlässigt werden. Wir wollen ferner die $x$- und $y$-Axe sich langsam mit einer solchen Winkelgeschwindigkeit $p$ um die Verticale drehen lassen, dass $\theta_3 = 0$ wird; alsdann ist, wie in § 36 erklärt wurde, $p = \omega \sin \lambda$. Die Bewegungsgleichungen sind jetzt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{T}{m}\frac{x}{l}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{T}{m}\frac{y}{l},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt}\theta_2 + 2\frac{dy}{dt}\theta_1 = -g + \frac{T}{m}\frac{l-z}{l},$$

worin $T$ die Spannung des Fadens bedeutet. Die dritte Gleichung zeigt, dass die Spannung sich von $mg$ mindestens durch Grössen von derselben Ordnung wie $\omega\alpha$ unterscheidet. Da $x/l$ und $y/l$ von der Ordnung $\alpha$ sind und wir übereinkamen, Glieder von der Ordnung $\omega\alpha^2$ zu verwerfen, so müssen wir in den beiden ersten Gleichungen $T = mg$ setzen. Da $\theta_3 = 0$ ist, so kann man die $x$- und $y$-Axe als im Raum festliegend annehmen. Weil ferner die beiden ersten Gleichungen unabhängig von $\omega$ sind, so ist die Bewegung eines von der Rotation der Erde beeinflussten Pendels dieselbe, wie die eines idealen von der Rotation nicht afficirten Pendels, dessen Bahn jedoch, von einer Person beobachtet, die sich mit der Erde bewegt, sich um die Verticale mit der Winkelgeschwindigkeit $p = \omega \sin \lambda$ in der Richtung von Süden nach Westen zu drehen scheint.

Ist $ln^2 = g$, so sind die Lösungen der Gleichungen

$$x = A\cos(nt + C), \qquad y = B\sin(nt + D).$$

Man sieht, dass die Schwingungsdauer d. h. $2\pi/n$ von der Rotation der Erde nicht beeinflusst wird. Zur Bestimmung der Integrationsconstanten beachte man: der Massenpunkt nimmt, wenn er aus seiner verticalen Lage weggezogen ist und ehe er wieder losgelassen wird, an der Bewegung der Erde Theil und hat daher eine kleine Geschwindigkeit $-l\alpha\omega \sin\lambda$ transversal zu der Anfangsebene der Störung. Nimmt man diese Ebene zur $xz$-Ebene, so sind die Anfangsbedingungen bez. der Axen $t = 0$, $x = l\alpha$, $y = 0$, $dx/dt = 0$, $dy/dt = -l\alpha\omega\sin\lambda$. Es ergibt sich dann leicht, dass $A = l\alpha$, $Bn = -l\alpha\omega\sin\lambda$, $C = 0$, $D = 0$ ist. Der Massenpunkt beschreibt daher in erster Annäherung eine Ellipse, deren Halbaxen $A$ und $-B$ sind. Da das Verhältniss der Axen, nämlich $\omega \sin\lambda\,(l/g)^{\frac{1}{2}}$ sehr klein ist, so hat die Ellipse eine sehr gestreckte Gestalt und der Massenpunkt scheint in einer verticalen Ebene zu schwingen. Die Rotation der Erde hat die Wirkung, dass sich diese Ebene um die Verticale mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin\lambda$ dreht.

Wie in der Dynamik der Massenpunkte bewiesen wird, ist die Bahn der Linse eines Pendels auch ohne jede Rücksichtnahme auf die Rotation der Erde annähernd eine Ellipse, deren Axen eine kleine nahezu gleichförmige Bewegung um die Verticale machen. Dieses Fortschreiten der Scheitel der Ellipse verschwindet, wenn der zu einer

der beiden Ellipsenaxen am Aufhängungspunkt gehörige Winkel Null wird, siehe § 39, Beisp. 2. Da das Auftreten dieser Bewegung den Versuch complicirt, so ist es wesentlich: (1) die Länge $l$ des Pendels sehr gross zu machen und (2) das Pendel, wenn es bei Seite gezogen ist, so loszulassen, dass die Linse keine grössere seitliche Geschwindigkeit erhält, als unvermeidlich ist. Man bewirkt dies in der Regel dadurch, dass man die Linse in ihrer verschobenen Lage durch einen Faden mit einem festen Punkt verbindet und den Faden, wenn die Linse scheinbar zur Ruhe gekommen ist, verbrennt, um sie in Freiheit zu setzen. Das Fortschreiten der Ellipsenscheitel, welches von der Winkelgrösse der Verschiebung abhängt, findet in der entgegengesetzten Richtung statt wie dasjenige, welches die Rotation der Erde verursacht.

Bei der Verwendung eines langen Pendels hat man auch den Vortheil, dass die lineare Verrückung der Linse beträchtlich sein kann, auch wenn die Winkelverrückung sehr klein ist. Die Linse soll nicht zu leicht sein, weil sonst ihre Bewegung durch den Widerstand der Luft schnell vernichtet wird.

§ 39. Beisp 1. Bei dem Foucault'schen Experiment wird ein langes Pendel an einem Punkt über dem Centrum eines kreisförmigen Tisches aufgehängt und der Schwingungsbogen beobachtet, wie er von einem Durchmesser zu einem andern übergeht. Man zeige, dass der von der Schwingungsebene an einem Tag auf dem kreisförmigen Rand des Tisches beschriebene Bogen dem Unterschied in der Länge zwischen zwei Parallelkreisen gleich ist, von denen die eine durch das Centrum und die andre durch den Nord- oder Südpunkt des Randes geht. Diesen Satz verdankt man Prof. J. R. Young.

Beisp. 2. Ein schwerer Massenpunkt wird an einem festen Punkt mittelst eines Fadens von der Länge $a$ aufgehängt und von der Wirkung der Rotation der Erde abgesehen. In den beiden folgenden Fällen ist die Bahn des Massenpunktes nahezu eine Ellipse, deren Scheitel bei jedem vollständigen Umlauf des Massenpunktes um den Winkel $\beta \cdot 2\pi$ vorwärts schreiten. Wenn $b$ und $c$ die grosse und kleine Halbaxe der Ellipse sind, zu beweisen: (1) dass $\beta = \frac{3}{8} bc/a^2$ ist, wenn $b$ und $c$ im Vergleich mit $a$ klein sind; (2) dass $(\beta + 1)^{-2} = 1 - \frac{3}{4} b^2/a^2$ ist, wenn $b$ und $c$ im Vergleich mit $a$ nicht klein und nahezu gleich sind.

Beisp. 3. Ein Pendel, welches sich bezüglich der Erde in Ruhe befindet, wird in einer beliebigen Richtung mit einer kleinen Winkelgeschwindigkeit in Bewegung gesetzt; man zeige, dass die Schwingungen in einer Verticalebene stattfinden, welche sich gleichförmig um die Verticale so dreht, dass das Pendel bei jeder halben Schwingung einmal vertical wird.

Beisp. 4. Es sei $\theta$ der Winkel, den ein Pendel von der Länge $l$ mit der Verticalen macht und $\varphi$ der Winkel, welchen die das Pendel enthaltende senkrechte Ebene mit einer senkrechten Ebene bildet, die sich um die Verticale mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin \lambda$ von Süden nach Westen dreht. Wenn die von $\omega^2$ abhängigen Glieder vernachlässigt werden, zu beweisen, dass die Bewegungsgleichungen $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + A,$

$$\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt}\right) = 2\sin^2\theta \cos(\varphi + \beta)\,\omega \cos\lambda \frac{d\theta}{dt}$$

werden, worin $A$ eine willkürliche Constante ist und die übrigen Buchstaben dieselbe Bedeutung wie in § 36 haben. Siehe Quet, Liouville's Journal, 1853.

Diese Gleichungen eignen sich ganz besonders zur Behandlung der Bewegung eines Pendels. Man erhält sie leicht, wenn man die in § 38 gegebenen Formeln für Polarcoordinaten umformt.

§ 40. **Der Einfluss der Erdrotation auf die Bewegung in der Ebene.** In dem ersten Band wurde ein besonderes Kapitel der Bewegung der Körper oder Systeme von Körpern gewidmet, die gezwungen sind, in einer festen Ebene zu bleiben. Es wurde dabei angenommen, diese Ebene liege in der That im Raum fest. Da aber überhaupt keine Ebene zu finden ist, die sich nicht mit der Erde bewegt, so ist es wichtig, die Wirkung der Rotation der Erde auf die Bewegung dieser Körper zu bestimmen. Wir wollen dieses Problem als Beispiel zu der Methode von Clairaut und Coriolis in § 25 behandeln.

Die Ebene mache mit der Erdaxe den Winkel $\lambda$. Ein Punkt $O$ der Ebene möge auf der Oberfläche der Erde liegen und zur Ruhe gebracht werden. Dann greifen, wie in § 33 bewiesen wurde, an den in Bewegung befindlichen Körpern, solange sie in der Nachbarschaft von $O$ sind, ihre Gewichte in einer Richtung an, die normal zur Oberfläche der Erde ist. Die Erde dreht sich nun um eine durch $O$ gehende, der Axe der Figur parallele Axe mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $\omega$. Diese Winkelgeschwindigkeit zerlege man in zwei, nämlich $-\omega \sin \lambda$ um eine auf der Ebene senkrechte Axe und $\omega \cos \lambda$ um eine Axe in der Ebene. Weil nun das Quadrat von $\omega$ vernachlässigt werden soll, so lässt sich nach dem Princip der Uebereinanderlagerung kleiner Bewegungen der ganze Effect dieser beiden Rotationen durch Addition der Wirkungen bestimmen, die jede für sich hervorbringt.

Es existirt ein bekanntes Theorem, dass sich die Bewegung eines Massenpunktes, welcher gezwungen ist, in einer Ebene zu bleiben, die sich um eine in ihr liegende Axe mit constanter Winkelgeschwindigkeit $\omega \cos \lambda$ dreht, dadurch ermitteln lässt, dass man die Ebene als festliegend ansieht und dem Massenpunkt die Beschleunigung $\omega^2 r \cos^2 \lambda$ ertheilt, worin $r$ den Abstand des Massenpunktes von der Axe bedeutet. Man kann diesen Satz, wie in § 26, aus dem Clairaut'schen Theorem ableiten. Diese mitgetheilte Beschleunigung ist zu vernachlässigen, weil sie von dem Quadrat von $\omega$ abhängt. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega \cos \lambda$ hat daher keine merkbare Wirkung.

Wenn sich die Körper frei in der Ebene bewegen können, so besteht der Effect der Rotation $-\omega \sin \lambda$ darin, dass sie die Bezugsaxen um das in dem Punkt $O$ auf der Ebene errichtete Loth dreht. Berechnet man daher die Bewegung ohne Rücksicht auf die Rotation der Erde und nimmt die Anfangsbedingungen in Bezug auf den festliegenden Raum, so lässt sich die Wirkung der Rotation der Erde dadurch zur Geltung bringen, dass man die Bewegung auf Axen bezieht, die sich um die Normale mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega \sin \lambda$ drehen. Ist z. B. der Körper ein schwerer Punkt, der mittelst eines langen Fadens an einem in Bezug auf die Erde festliegenden Punkt hängt, so ist er in Wirklichkeit gezwungen, sich in einer horizontalen Ebene zu bewegen und aus dem eben Gesagten geht hervor, dass die Schwingungsebene für einen Zuschauer auf der Erde mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega \sin \lambda$ um die Verticale zu rotiren scheint.

Wenn die Körper aber gezwungen werden, sich mit der Ebene zu drehen, so ist es nöthig, ihre Bewegung bez. dieser Ebene zu finden. Wir müssen daher jedem Massenpunkt die Kraft des beweglichen Raumes und die zusammengesetzte Centrifugalkraft mittheilen. Bedeutet $r$ den Abstand eines Punktes von der Masse $m$ von $O$, so ist die erstere $mr\omega^2 \sin^2 \lambda$. Sie ist zu vernachlässigen, weil sie von dem Quadrat von $\omega$ abhängt. Die letztere kommt daher allein in Betracht. Wir wollen sie durch eine resultirende, an dem Schwerpunkt des Körpers angreifende Kraft und ein Paar ersetzen. Man beachte, dass nach § 24 die Componenten der

an einem Massenpunkt angreifenden zusammengesetzten Centrifugalkraft ganze Functionen ersten Grades von $dx/dt$, $dy/dt$, $dz/dt$ sind. Nach Bd. 1, § 14 ist ihr Moment um den Schwerpunkt dem der zusammengesetzten Centrifugalkräfte, nachdem der Schwerpunkt zur Ruhe gebracht worden ist, gleich. Da jeder Massenpunkt des Körpers sich alsdann in der Ebene, in welcher er zu bleiben gezwungen ist, senkrecht zu seinem von dem Schwerpunkt als Coordinatenanfang gezogenen Radiusvector bewegt, so wirkt die zusammengesetzte Centrifugalkraft in der Richtung des Radiusvectors auf ihn ein und hat mithin kein Moment um den Schwerpunkt. Das Paar ist daher Null. Die resultirende Kraft am Schwerpunkt ist ferner dieselbe, wie wenn die ganze Masse in diesem Punkt vereinigt würde, und daher gleich $-2MV\omega \sin\lambda$, worin $M$ die Masse des Körpers und $V$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes bezeichnet.

Die Wirkung der Rotation der Erde kann daher derart in Rechnung gezogen werden, dass man die Erde als festliegend betrachtet und diese Kraft an dem Schwerpunkt des Körpers anbringt. Für einen Massenpunkt, der sich etwa 9—10 m in der Secunde bewegt, ist das Verhältniss dieser Kraft zur Schwere höchstens $4\pi/24 \times 60 \times 60$, also weniger als $1/5000$. Es ist dies so wenig, dass mit Ausnahme besonderer Umstände ihre Wirkung unmerkbar ist.

§ 41. **Der Einfluss der Erdrotation auf die Bewegung der starren Körper.** Bisher haben wir hauptsächlich die Bewegung eines *einzelnen Massenpunktes* betrachtet. Der Einfluss der Rotation der Erde auf die Bewegung *starrer Körper* ist jedoch leichter zu verstehen, wenn man vorher die in den folgenden Kapiteln beschriebenen Methoden gelesen hat. Lässt man z. B. einen Körper um seinen Schwerpunkt rotiren, so ist seine Bewegung, wie sie ein Beobachter auf der Erde sieht, nicht schwer zu bestimmen, wenn wir seine Bewegung im Raum kennen. Es wird daher hier wohl ausreichen, wenn wir vorerst die Besonderheiten, welche diese Probleme darbieten, betrachten und Erläuterungen dazu suchen, ohne einen ausgedehnten Gebrauch von den Bewegungsgleichungen zu machen.

§ 42. Die Wirkung der Rotation der Erde ist im Allgemeinen, mit derjenigen der Schwere verglichen, so klein, dass man den Schwerpunkt festlegen muss, um den Einfluss der ersteren bemerkbar zu machen. Auch wenn dies geschieht, so stehen doch noch die Reibung an den Stützpunkten und die übrigen Widerstände im Wege. Nur wenn der Apparat so sorgfältig gearbeitet ist, dass diese Widerstände klein sind, kann man die Wirkung der Rotation der Erde sich so ansammeln lassen, dass sie nach einiger Zeit gross genug wird, um deutlich wahrnehmbar zu werden.

Wird ein Körper in Bezug auf die Erde in den Zustand der Ruhe versetzt und ihm zugleich die Freiheit gelassen, sich um seinen Schwerpunkt als festen Punkt zu drehen, so rotirt er thatsächlich um eine der Erdaxe parallele Axe. Nur wenn diese Axe eine Hauptaxe ist, setzt der Körper seine Rotation um sie fort; im andern Falle tritt eine Aenderung in seinem Bewegungszustand ein. Aus den Eulerschen Gleichungen geht hervor, dass die Veränderung der Lage der

Rotationsaxe den Gliedern $(A-B)\omega_1\omega_2$, $(B-C)\omega_2\omega_3$, $(C-A)\omega_3\omega_1$ zu verdanken ist. Ist der Körper in den Zustand scheinbarer Ruhe gebracht worden, so sind $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ kleine Grössen von derselben Ordnung, wie die Winkelgeschwindigkeit der Erde; die obigen Glieder sind daher von der Ordnung der Quadrate kleiner Grössen. Ob sie gross genug sind, um eine sichtbare Wirkung hervorzubringen, hängt von ihrem Verhältniss zu den Reibungskräften ab, die in Thätigkeit kommen können. Da aber diese Reibungskräfte zur Verhütung einer jeden relativen Bewegung ausreichen, so werden jene Glieder durch die auf der rechten Seite der Euler'schen Gleichungen auftretenden Reibungspaare im Allgemeinen grade aufgehoben. Der Körper bleibt daher in Bezug auf die Erde im Zustand der Ruhe.

Um eine sichtbare Wirkung hervorzubringen, ertheilt man dem Körper gewöhnlich eine sehr grosse Winkelgeschwindigkeit um irgend eine Axe. Ist dies die Axe von $\omega_3$, so werden die Glieder in den Euler'schen Gleichungen, welche den Centrifugalkräften zu verdanken sind und $\omega_3$ als Factor enthalten, grösser, als wenn $\omega_3$ diesen Anfangswerth nicht hätte. Je grösser diese Anfangswinkelgeschwindigkeit ist, um so grösser werden diese Glieder und um so sichtbarer wird ihre Wirkung auf den Körper sein.

Reicht die dem Körper so mitgetheilte Winkelgeschwindigkeit hin, um ihn nur einmal in der Secunde herumzudrehen, so ist sie immer noch $24 \times 60 \times 60$ mal so gross als die Winkelgeschwindigkeit der Erde. Bei solchen Problemen kann man daher die Winkelgeschwindigkeit der Erde im Vergleich zu den vorhandenen Winkelgeschwindigkeiten des Körpers als so klein ansehen, dass das *Quadrat* ihres Verhältnisses vernachlässigt werden darf.

Als Beispiel[1]) für die Anwendung dieser Principien haben wir einen speciellen Fall des Gyroscops ausgewählt, der eine elementare Lösung zulässt. Allgemeinere Fälle kommen weiter unten zur Behandlung.

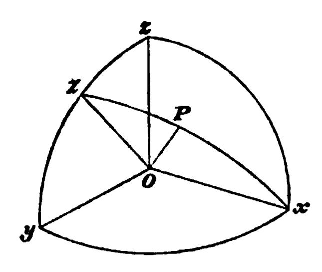
---

1) Quet hat in Liouville's Journal, 1853, eine Abhandlung über relative Bewegung und ihre Anwendung auf das Pendel und verschiedene Formen des Gyroscops veröffentlicht. Das in § 43 behandelte Problem ist eines derjenigen, die er, wenn auch in andrer Art, gelöst hat.

Die Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen auf relative Bewegung hat Ed. Bour in einem der französischen Academie 1856 überreichten Mémoire besprochen, das später in Liouville's Journal, 1863 veröffentlicht wurde. Er bildet einen Ausdruck für die lebendige Kraft, der dem in § 44, Gl. (1) ähnlich ist und wendet ihn auf verschiedene Probleme an. Der Hauptzweck seiner Abhandlung ist, durch die Auflösung einiger Probleme, die etwas complicirter als diejenigen sind, welche man gewöhnlich in den Büchern über Mechanik findet, zu zeigen, welche Vortheile man aus der Benutzung der kanonischen Formen Hamilton's und Jacobi's ziehen kann. Er benutzt daher fortwährend die Hauptfunction Hamilton's, um zu den Lösungen seiner Probleme zu kommen. Die Lagrange-schen Gleichungen hat auch Lottner in Crelle's Journal, 1857, benutzt. Sein Verfahren ist etwas complicirt, doch hat es Prof. Gilbert in Löwen abgekürzt,

§ 43. Beisp. *Der Schwerpunkt eines Umdrehungskörpers liegt fest, während die Axe der Figur gezwungen ist, in einer bez. der Erde festliegenden Ebene zu bleiben. Der Körper wird um seine Axe der Figur in Rotation gesetzt; man soll die Bewegung finden.*

Wir wollen die Bewegung auf bewegliche Axen beziehen. Der Schwerpunkt sei der Coordinatenanfang und die $yz$-Ebene die bez. der Erde festliegende Ebene. Die Axe der Figur sei die $z$-Axe und sie mache den Winkel $\chi$ mit der Projection der Rotationsaxe der Erde auf die $yz$-Ebene. Diese Projection heisse der Kürze wegen die $\chi$-Axe. Es sei $p$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde um ihre Axe und $\alpha$ der Winkel, den das Loth auf der $yz$-Ebene mit der Erdaxe macht. $p$ werde positiv gerechnet, wenn die Rotation ihre gewöhnlich als positiv angenommene Normalrichtung hat, d. h. wenn sie von dem positiven Ende der Axe aus gesehen in der Richtung der Zeiger einer Uhr stattfindet. Da sich die Erde von Westen über Süden nach Osten dreht, so ergibt sich, dass, wenn der Winkel $\alpha$ von dem nördlichen Ende $P$ der Axe aus gemessen wird, $p$ in der That negativ ist und in § 33 durch $-\omega$ dargestellt wird. Die Bewegung der beweglichen Axen ist durch




$$\theta_1 = p\cos\alpha + d\chi/dt,$$
$$\theta_2 = p\sin\alpha\sin\chi,$$
$$\theta_3 = p\sin\alpha\cos\chi$$

gegeben. Es seien $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um die beweglichen Axen; $A$, $A$, $C$ die Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt. $R$ sei die Reaction, durch welche die Axe der Figur gezwungen wird, in der festen Ebene zu bleiben, und welche parallel der $x$-Axe wirkt, und $h$ der Abstand ihres Angriffspunktes vom Coordinatenanfang. Die Winkelbewegungsgrössen um die Axen sind bez.

$$h_1 = A\omega_1, \quad h_2 = A\omega_2, \quad h_3 = C\omega_3.$$

Substituirt man in § 10, so werden die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} - A\omega_2\theta_3 + C\omega_3\theta_2 &= 0 \\ A\frac{d\omega_2}{dt} - C\omega_3\theta_1 + A\omega_1\theta_3 &= Rh \\ C\frac{d\omega_3}{dt} - A\omega_1\theta_2 + A\omega_2\theta_1 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Da die $z$-Axe im Körper fest liegt, so folgt aus § 3, dass $\omega_1 = \theta_1$, $\omega_2 = \theta_2$ ist. *Die letzte Bewegungsgleichung zeigt daher, dass $\omega_3$ constant ist.* Man muss übrigens beachten, dass $\omega_3$ nicht die scheinbare von einem Zuschauer auf der Erde gesehene Winkelgeschwindigkeit des Körpers ist. Wenn $\Omega_3$ die Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf die beweglichen Axen bedeutet, so ergibt sich aus § 3, $\Omega_3 = \omega_3 - \theta_3$, so dass also

---

welcher der *Association Française*, 1878, einen „*Compte rendu*" überreichte und einen zweiten der Academie, 1882, Bd. 94. In beiden bezieht er sich wiederholt auf eine von ihm veröffentlichte Abhandlung, die der Verfasser jedoch nicht kennt. Siehe auch Guyon, *Comptes rendus*, 16. April 1888.

$$\Omega_3 + p \sin\alpha \cos\chi = \text{Constante}$$

ist. Der Körper würde daher, wenn man einen so kleinen Unterschied bemerken könnte, langsamer oder schneller zu rotiren scheinen, je mehr seine Axe sich dem einen oder andern Ende der Projection der Axe der Erdrotation auf die feste Ebene nähert.

Die erste Bewegungsgleichung wird, wenn man $\omega_1$, $\omega_2$, $\theta_2$, $\theta_3$ durch $\chi$ ausdrückt,

$$A\frac{d^2\chi}{dt^2} - Ap^2 \sin^2\alpha \sin\chi \cos\chi + Cnp \sin\alpha \sin\chi = 0,$$

worin $n$ für $\omega_3$ geschrieben wurde. Das zweite Glied ist im Vergleich mit dem dritten zu verwerfen, da es von dem Quadrat der kleinen Grösse $p$ abhängt, § 33. Man hat daher

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = -\frac{C}{A}np \sin\alpha \sin\chi.$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines Pendels unter der Einwirkung einer Kraft, die der Grösse nach constant ist und welche die Richtung der $\chi$-Axe hat, d. h. der Projection der Rotationsaxe der Erde auf die feste Ebene. Wird nun der Körper in Rotation um die Axe seiner Figur gesetzt, so beginnt diese Axe, wie man sieht, sich sofort dem einen oder andern Ende der $\chi$-Axe mit stets wachsender Winkelgeschwindigkeit zu nähern. Wenn die Axe der Figur die $\chi$-Axe erreicht hat, so beginnt ihre Winkelgeschwindigkeit abzunehmen und sie kommt zur Ruhe, wenn sie auf der andern Seite einen seinem Anfangswerth gleichen Winkel mit der $\chi$-Axe macht. Die Schwingung wiederholt sich dann fortwährend.

Die Axe der Figur schwingt um dasjenige Ende der $\chi$-Axe, welches, wenn der Winkel $\chi$ von ihm aus gemessen wird, den Coefficienten auf der rechten Seite der letzten Gleichung negativ macht. Dieses Ende ist derart, dass bei dem Durchgang der Axe der Figur durch dasselbe die Rotation $n$ des Körpers dieselbe Richtung wie die Componente der Erdrotation $p$ hat.

Vergleicht man Körper von verschiedener Form miteinander, so sieht man, dass die Schwingungsdauer nur von dem Verhältniss von $C$ zu $A$ abhängt. Im Uebrigen ist sie von der Structur oder Gestalt des Körpers unabhängig. Je grösser dieses Verhältniss ist, um so schneller geht die Schwingung vor sich. Für einen Umdrehungskörper ist das Verhältniss am grössten, wenn $\Sigma mz^2 = 0$ ist. Es wird in diesem Fall gleich 2 und der Körper wird zur Kreisscheibe oder zu einem Kreisring.

Vergleicht man ferner die verschiedenen Ebenen, in welchen die Axe zu bleiben gezwungen werden kann, so sieht man, dass die Bewegung für alle Ebenen, die denselben Winkel mit der Erdaxe machen, dieselbe ist. Sie hängt daher nicht von der Neigung der Ebene gegen den Horizont am Beobachtungsort ab. Die Schwingungsdauer ist am geringsten und die Bewegung der Axe am merkbarsten, wenn $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, d. h. die Ebene der Rotationsaxe der Erde parallel ist. Wenn die Ebene auf der Erdaxe senkrecht steht, so schwingt die Axe der Figur nicht; wenn aber der Anfangswerth von $d\chi/dt$ Null ist, so bleibt sie bei jeder Lage in Ruhe, in welche man sie bringen mag.

§ 44. **Die Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen.** Der Körper möge auf ein System von Axen mit festem Anfangspunkt $O$ bezogen werden, deren Winkelbewegungen um sich selbst durch $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ gegeben sind. Sind $\lambda, \mu, \nu$ die Richtungscosinusse ihrer Momentanaxe

$OI$ und $\theta$ die Winkelgeschwindigkeit um sie, so ist $\theta_1 = \lambda\theta$, $\theta_2 = \mu\theta$, $\theta_3 = \nu\theta$. Die lebendige Kraft des Körpers ist

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m\{(x' - y\theta_3 + z\theta_2)^2 + (y' - z\theta_1 + x\theta_3)^2 + (z' - x\theta_2 + y\theta_1)^2\},$$

worin die Accente Differentialquotienten nach der Zeit bedeuten. Bezeichnet $R$ die lebendige Kraft der relativen Bewegung bez. der beweglichen Axen, so ist

$$2R = \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Durch Entwicklung erhält man

$$T = R + N\theta + \frac{1}{2}I\theta^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin

$$N = \lambda\Sigma m(yz' - zy') + \mu\Sigma m(zx' - xz') + \nu\Sigma m(xy' - yx'),$$

$$I = \nu^2\Sigma m(x^2 + y^2) + \text{etc.} - 2\lambda\mu\Sigma mxy - \text{etc. ist,}$$

*so dass also $N$ die Winkelbewegungsgrösse der relativen Bewegung um die Momentanaxe $OI$ und $I$ das Trägheitsmoment des Körpers für die Momentanaxe $OI$ der Bezugsaxen ist.*

Man kann die Probe auf das Resultat machen, wenn man einen starren Körper annimmt, der sich um den Coordinatenanfang als festen Punkt herumdreht, und beachtet, dass seine doppelte lebendige Kraft, auf Hauptaxen bezogen,

$$A(\Omega_1 + \theta\lambda)^2 + B(\Omega_2 + \theta\mu)^2 + C(\Omega_3 + \theta\nu)^2$$

ist, worin $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ die relativen Winkelgeschwindigkeiten des Körpers sind. Entwickelt man, so kommt man zur Gleichung (1).

Für den Fall, dass der Anfangspunkt $O$ der beweglichen Axen nicht festliegt, seien $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Componenten seiner Beschleunigung im Raum in der Richtung der Bezugsaxen. Um $O$ in den Zustand der Ruhe zu versetzen, bringe man sie mit umgekehrtem Vorzeichen an jedem Punkt des Systems an, § 33. Die Resultante eines jeden dieser Systeme paralleler Kräfte ist eine einzelne Kraft, die an dem Schwerpunkt des Körpers angreift. Man kann sie in die Kräftefunction einschliessen, indem man zu $U$ das Glied

$$K = -M(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

hinzufügt, worin $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Coordinaten des Schwerpunktes und $M$ die Masse des Körpers bedeuten.

Die Lagrange'sche Function ist daher

$$L = R + N\theta + \frac{1}{2}I\theta^2 + U + K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und wenn $q$ eine der unabhängigen Variablen bezeichnet, von denen die Lage des Körpers abhängig gemacht wird, so hat man die typische Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Bei der Anwendung dieser Gleichungen zur Ermittlung der Bewegung eines Körpers bezüglich der Erde wird, wie oben erklärt

wurde, das Glied $\frac{1}{2} I\theta^2$ vernachlässigt. Aus den in § 42 angegebenen Gründen liegt der Schwerpunkt des Körpers in Bezug auf die Erde gewöhnlich fest; die Glieder in der Kräftefunction, die von der Schwere herrühren, treten daher nicht auf. Auch das durch $K$ dargestellte Glied kann aus demselben Grund vernachlässigt werden. Wenn daher die Schwere die allein wirkende Kraft ist, so reducirt sich die Lagrange'sche Function auf

$$L = R + N\theta \quad \dots\dots\dots \quad (5).$$

Ein Integral der Gleichungen (4) kann man mittelst des Princips der lebendigen Kraft finden. Siehe Bd. 1, Kap. 8, § 407. Der grösseren Allgemeinheit wegen wollen wir annehmen, es sei $L = L_0 + L_1 +$ etc. $+ L_n$, worin $L_n$ eine homogene Function von $n$ Dimensionen der Geschwindigkeiten der Coordinaten ist. Wenn $L$ den in Gl. (3) gegebenen Werth hat, so reducirt sich dieser Ausdruck auf die drei ersten Glieder. Multiplicirt man jede der in der typischen Formel (4) enthaltenen Gleichungen mit dem entsprechenden $q'$ und addirt die Resultate, so hat man

$$\sum \left\{ \frac{d}{dt} q' \frac{\partial L}{\partial q'} - q'' \frac{\partial L}{\partial q'} \right\} - \sum q' \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \dots\dots \quad (6),$$

worin das Zeichen $\Sigma$ die Summirung für alle Variablen angibt. Nun ist

$$\sum q' \frac{\partial L_n}{\partial q'} = n L_n, \qquad \sum \left( q'' \frac{\partial L_n}{\partial q'} + q' \frac{\partial L_n}{\partial q} \right) = \frac{dL_n}{dt},$$

da $L_n$ die Zeit $t$ explicite nicht enthält. Durch Integration von (6) ergibt sich sofort

$$(n-1) L_n + (n-2) L_{n-1} + \text{etc.} + L_2 - L_0 = h \quad \dots\dots \quad (7),$$

worin das Glied $L_1$ nicht vorkommt und $h$ eine willkürliche Constante bezeichnet. Enthält der Ausdruck für $L$ nur drei Glieder, so reducirt sich (7) auf $L_2 - L_0 = h$ oder

$$R - \frac{1}{2} I\theta^2 - U - K = h \quad \dots\dots\dots \quad (8).$$

Bei der Anwendung dieser Gleichung auf eine relative Bewegung bez. der Erde, bei welcher $\theta^2$ verworfen wird und der Schwerpunkt festliegt, wird

$$R = h \quad \dots\dots\dots\dots \quad (9).$$

Beisp. 1. *Als Beispiel für den Gebrauch dieser Gleichungen wollen wir das in § 43 bereits gelöste Problem betrachten.*

Um $R$ und $N$ zu finden, beachte man, dass sich $Oz$ von $O\chi$ in einer festen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit $\chi'$ trennt; die relative Bewegung lässt sich daher durch die Winkelgeschwindigkeiten $\Omega_1 = \chi'$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = \varphi'$ darstellen, wobei $\varphi$ den Winkel bezeichnet, den eine durch $Oz$ gehende, im Körper festliegende Ebene mit der Ebene $\chi Oz$ macht. Man hat daher

$$2R = A\chi'^2 + C\varphi'^2, \qquad N = A\chi' \cos\alpha + C\varphi' \sin\alpha \cos\chi,$$

$$T = \frac{1}{2}(A\chi'^2 + C\varphi'^2) + p(A\chi' \cos\alpha + C\varphi' \sin\alpha \cos\chi) +$$

$$+ \frac{1}{2} p^2 \{ A(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \sin^2\chi) + C \sin^2\alpha \cos^2\chi \},$$

wenn man die Bezeichnung in § 43 beibehält. Benutzt man diesen Werth von $T$ als Lagrange'sche Function und lässt $q$ zuerst $\varphi$ und dann $\chi$ sein, so wird

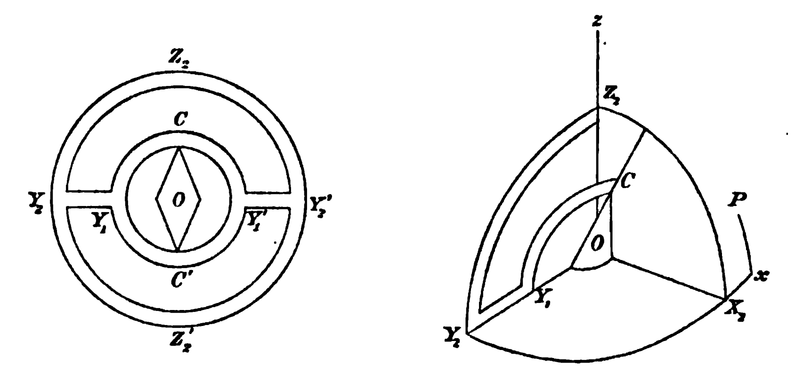
$$\varphi' + p \sin\alpha \cos\chi = n,$$
$$A\chi'' + pC\varphi' \sin\alpha \sin\chi - p^2 \sin^2\alpha (A - C) \sin\chi \cos\chi = 0.$$

Durch Elimination von $\varphi'$ aus der zweiten Gleichung kommt man zu demselben Resultat, wie in § 43.

Beisp. 2. Wenn die an jedem Punkt eines Körpers angreifende Schwere als die Resultante der Erdanziehung und der Centrifugalkraft an diesem Punkt betrachtet wird, zu beweisen, dass die Kräftefunction $U$ sich von derjenigen, die von der Schwere herrührt, um $-\frac{1}{2}I\theta^2 - \frac{1}{2}Mb^2\theta^2$ unterscheidet, worin $b$ der Abstand des Schwerpunktes von der Erdaxe ist. Man beachte, dass bei der Aufstellung der Lagrange'schen Function $L$ die Glieder $\frac{1}{2}I\theta^2$ in $U$ und $T$ einander aufheben und daher, wenn der Schwerpunkt des Körpers festliegt und die von der Schwere herrührende Kräftefunction als constant angesehen wird, der Ausdruck $L = R + N\theta$ bis einschliesslich des Quadrates von $\theta$ genau ist.

[Gilbert's Theorem.]

§ 45. Beisp. Eine sehr allgemeine Form des Gyroscops ist diejenige, bei welcher der Axe des rotirenden Körpers die Freiheit gegeben wird, sich in allen Richtungen um den Schwerpunkt zu drehen, welcher bez. der Erde festliegt. Eine Construction, durch welche diese Freiheit erzielt wird, ist die folgende.




Ein einaxiger Körper kann sich frei um die Axe seiner Figur $C'OC$ drehen, welche mittelst Stiften auf der Innenseite eines Metallringes $CY_1C'Y_1'$ derart lagert, dass $C'OC$ ein Durchmesser und $O$ der Schwerpunkt des Körpers und zugleich das Centrum des Ringes ist. Die äusseren Enden desjenigen Durchmessers $Y_1'OY_1$ des Ringes, welcher senkrecht auf $C'OC$ steht, sind mittelst Stiften auf der Innenseite eines zweiten ausserhalb des ersten befindlichen Ringes gelagert, dessen Durchmesser $Y_2'OY_2$ und dessen Centrum $O$ ist. Dieser äussere Ring kann sich frei um den zu $Y_2'OY_2$ senkrechten Durchmesser $Z_2'OZ_2$ bewegen. Der Durchmesser $OZ_2$ liegt bez. der Erde fest und möge zur $z$-Axe genommen werden und die ebenfalls bez. der Erde festliegende Ebene $xz$ möge die Gerade $OP$ enthalten, die parallel zur Nordrichtung der Rotationsaxe der Erde gezogen ist.

Die erste Figur zeigt den inneren und äusseren Ring in die Ebene $Y_2Z_2$ geklappt. In der zweiten wird der Theil der Figur dargestellt, welcher in dem positiven Octanten der Axen $X_2Y_2Z_2$ liegt. Der innere Ring ist dabei um seine Axe $Y_2Y_2'$ gedreht worden und hat den Winkel $\theta$ beschrieben. Die Axe $Ox$, die in Bezug auf die Erde festliegt und in der Ebene $X_2Y_2$ liegt, ist ebenfalls angegeben.

Der Winkel $xOX_2$, welcher die Lage des äusseren Ringes im Raum definirt, werde mit $\psi$, der Winkel $Z_2OC$, der die Lage des inneren Ringes bestimmt, mit $\theta$ und der Winkel zwischen einer durch $OC$ gehenden und in dem einaxigen Körper festliegenden Ebene und der Ebene $X_2Z_2$ mit $\varphi$ bezeichnet. Diese Winkel sind die Coordinaten des Gyroscops, das also drei Freiheitsgrade besitzt. Wie man sieht, werden auf diese Art mit nur zwei Ringen die Winkel $\theta$, $\psi$, $\varphi$, die Euler'schen Winkelcoordinaten des einaxigen Körpers, hergestellt.

Vermehrte man die Anzahl der Ringe, so würden sich auch die Freiheitsgrade vermehren und das Instrument würde allgemeiner werden. Auf der andern Seite lässt sich die Anzahl der unabhängigen Coordinaten durch beliebige Einschränkungen reduciren. So ist z. B. in dem Beispiel in § 43, worin die Axe $OC$ auf die Lage in einer Ebene eingeschränkt war, $\psi$ einer Constanten gleich.

Es seien $(A, A, C)$, $(A_1, A_1, C_1)$, $(A_2, A_2, C_2)$ die Hauptträgheitsmomente des einaxigen Körpers, des inneren und äusseren Ringes für $O$. Man hat dann

$$2R = A(\theta'^2 + \sin^2\theta\psi'^2) + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2 + A_1(\theta'^2 + \cos^2\theta\psi'^2) + C_1\psi'^2\sin^2\theta + A_2\psi'^2.$$

Die beiden ersten Glieder stellen die doppelte lebendige Kraft des einaxigen Körpers dar, das dritte und vierte die des inneren Ringes. Man erhält die beiden letzten aus den ersten, indem man $\varphi' = 0$ setzt, $A$ und $C$ in den Coefficienten von $\psi'^2$ vertauscht und die Indices hinzufügt.

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ seien die Richtungscosinusse von $OP$, auf $OC$ als Axe der $Z_1$, $OY_1Y_2$ als Axe der $Y_1$ und eine auf beiden senkrechte Axe $OX_1$ bezogen; $i$ sei der Winkel $zOP$. Die Winkelbewegungsgrösse um $OP$ ist dann

$$N = -A\sin\theta\psi'\lambda + A\theta'\mu + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\nu - C_1\sin\theta\psi'\lambda + A_1\theta'\mu + A_1\psi'\cos\theta\nu + A_2\psi'\cos i.$$

Wir haben ferner die geometrischen Beziehungen

$$\lambda = -\cos i\sin\theta + \sin i\cos\theta\cos\psi,$$
$$\mu = -\sin i\sin\psi,$$
$$\nu = \cos i\cos\theta + \sin i\sin\theta\cos\psi.$$

Stellt man die Winkelgeschwindigkeit der Erde durch $p$ dar, nimmt sie positiv in der Richtung $X_2Y_2$ und setzt

$$P = A_1 + A_2 + (A - A_1 + C_1)\sin^2\theta,$$

so wird die Lagrange'sche Function bei Vernachlässigung des Quadrates von $p$

$$L = \tfrac{1}{2}(A + A_1)\theta'^2 + \tfrac{1}{2}P\psi'^2 + \tfrac{1}{2}C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2 + p\cos i[P\psi' + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta] + p\sin i[\{C\varphi' + (C + A_1 - A - C_1)\psi'\cos\theta\}\sin\theta\cos\psi - (A + A_1)\theta'\sin\psi].$$

Die der lebendigen Kraft entsprechende Gleichung wird

$$(A + A_1)\theta'^2 + P\psi'^2 + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2 = \alpha.$$

Setzt man $q$ in Gleichung (4) einmal gleich $\varphi$ und dann gleich $\psi$, so hat man

$$\varphi' + (\psi' + p\cos i)\cos\theta + p\sin i\sin\theta\cos\psi = \beta,$$

$$\frac{d}{dt}[P(\psi' + p\cos i) + C\{\varphi' + (\psi' + p\cos i)\cos\theta\}\cos\theta] + p\sin i[C\varphi'\sin\theta\sin\psi + (2A_1 + C - C_1)\cos\psi\theta' + 2(A - A_1 - C + C_1)\sin^2\theta\cos\psi\theta'] = 0,$$

worin $\alpha$ und $\beta$ beliebige Constante bedeuten.

Wenn die feste Axe $Oz$ der Erdaxe parallel ist, wird $i = 0$. Die letzte Gleichung ist dann ein vollständiges Differential und wir erhalten so ein drittes Integral.

§ 46. Beisp. 1. Man zeige, dass eine Person, welche die specielle Gestalt des Gyroscops in § 43 hat, ohne astronomische Beobachtungen die geographische Breite des Ortes, die Richtung der Erdrotation und die Länge des Sternentags bestimmen könnte. Man verdankt diese Bemerkung Quet.

Beisp. 2. Wenn der Körper ein Stab ist und sein Schwerpunkt ohne Reibung getragen wird, zu beweisen, dass er in relativem Gleichgewicht entweder parallel oder senkrecht zur Projection der Erdaxe auf die Ebene, in welcher er zu bleiben gezwungen ist, ruhen könnte. Wird er in irgend eine andre Lage gebracht, so ist seine Bewegung sehr langsam, da sie von $p^2$ abhängt und seine Schwingungen finden um eine mittlere auf der Projection der Erdaxe senkrechte Lage statt.

Beisp. 3. Wenn an der Axe der Figur eine Reibungskraft angreift, die ein verzögerndes Paar erzeugt, dessen Moment um die $x$-Axe in constantem Verhältniss $\mu$ zu dem Moment des Reactionspaares um die $y$-Axe steht und wenn die feste Ebene der Erdaxe parallel ist, die kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage zu finden. Man zeige, dass die Lage zu irgend einer Zeit $t$ durch

$$\chi = Le^{-\lambda t}\cos[(Cnp/A - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}t + M]$$

gegeben ist, worin $2A\lambda = \mu(Cn - 2Ap)$ ist und $L$, $M$ zwei von den Anfangsbedingungen abhängige Constante bedeuten.

Beisp. 4. Der Schwerpunkt eines Umdrehungskörpers liegt fest, während die Axe der Figur gezwungen ist, auf der Oberfläche eines glatten graden Kegels zu bleiben, der in Bezug auf die Erde festliegt. Man zeige, dass die Axe der Figur um die Projection der Rotationsaxe der Erde auf die Oberfläche des Kegels schwingt und die Zeit einer vollständigen kleinen Schwingung um die mittlere Lage $2\pi(A\sin\varepsilon/Cpn\sin\beta)^{\frac{1}{2}}$ ist, worin $\varepsilon$ den halben Winkel an der Spitze des Kegels, $\beta$ die Neigung seiner Axe gegen die Erdaxe bezeichnet und die übrigen Buchstaben dieselbe Bedeutung wie früher haben. Dieses Problem haben Quet sowohl als Bour behandelt.

Beisp. 5. Die festliegende Axe $OZ_2$ des äusseren Ringes eines Gyroscops mit zwei Ringen wird parallel zur Umdrehungsaxe der Erde eingestellt; man beweise dass

$$(A + A_1)\theta'^2 + \frac{(E - Cn\cos\theta)^2}{(A + C_1)\sin^2\theta + A_1\cos^2\theta + A_2} = F$$

ist, worin $n$, $E$ und $F$ willkürliche Constante sind. [Lottner's Problem.]

Beisp. 6. Zwei gleiche schwere Stäbe $CA$, $CB$ sind durch ein Gelenk bei $C$ mit einer Feder so verbunden, dass sie das Bestreben haben, einen bekannten Winkel miteinander zu bilden. Die freien Enden $A$ und $B$ werden zusammengebunden und das Ganze an einem Faden $OC$ aufgehängt, der an dem Gelenk befestigt ist. Das System wird sich selbst überlassen, bis es in Bezug auf die Erde sich in Ruhe befindet. Wenn nun der Faden, welcher $A$ und $B$ zusammenhält, durchschnitten wird, so trennen sich die beiden Arme von einander. Man zeige, dass das System sofort eine scheinbare Winkelgeschwindigkeit $p\sin\lambda(I' - I)/I'$ um die Verticale annimmt, worin $I$, $I'$ die Trägheitsmomente des Systems für die Verticale $OC$ vor bez. nach dem Durchschneiden des Fadens sind, der $A$ mit $B$ verband, $p$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde um ihre Axe und $\lambda$ die geographische Breite des Ortes bedeutet. In welcher Richtung dreht sich das System? Diesen Apparat hat Poinsot erfunden, welcher der Ansicht war, das Experiment würde ermöglichen, die geographische Breite des Ortes aus der beobachteten Winkelgeschwindigkeit zu bestimmen. Siehe *Comptes Rendus*, 1851, Bd. 32, S. 206.

Beisp. 7. Wenn ein Strom genau nach Norden fliesst, zu beweisen, dass der Druck auf das östliche Ufer in der Tiefe $z$ durch die Aenderung der geographischen

Breite des fliessenden Wassers in dem Verhältniss $gz + bv\omega \sin l : gz$ vergrössert wird, worin $b$ die Breite des Stroms, $v$ seine Geschwindigkeit, $l$ die geographische Breite und $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde um ihre Axe bezeichnet.

[Math. Tripos, 1875.]

Beisp. 8. Eine Woge, wie die Fluthwelle, bewegt sich so durch einen Fluss, dass ihr Kamm rechtwinklig zu den Ufern ist. Man leite aus dem Clairaut'schen Satz, § 25, ab, dass die Fluth auf dem einen Ufer höher als auf dem andern ist und zeige, dass die Höhe der Fluth in geometrischer Progression für gleiche Zunahme des Abstandes von dem einen Ufer abnimmt.

Der Beweis wird im Allgemeinen, wie folgt, geführt. Da die Bewegung des Wassers nahezu in einer Horizontalebene stattfindet, so kann man nach § 40 die Rotation der Erde ausser Acht lassen, wenn man an jedem Massenpunkt die Beschleunigung $2\omega v \sin\lambda$ senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung, d. h. senkrecht zur Richtung des Flusses anbringt. Daher muss der Fluss auf der einen Seite um so viel höher als auf der andern sein, dass der Druck, den die Schwere in Folge der Niveaudifferenz erzeugt, dem Druck in Folge der gegebenen Beschleunigung gleich ist. Wenn $\zeta$ die Höhe der Fluth über dem mittleren Niveau im Abstand $y$ von der Seite des Flusses ist, auf welcher die Fluth ihren höchsten Stand hat, so findet man $-g d\zeta = 2\omega v \sin\lambda\, dy$. In der Theorie der Ebbe und Fluth wird aber bewiesen, dass, wenn von der Rotation abgesehen wird, $v = \zeta\sqrt{g/h}$ ist. Durch Integration erhält man $\zeta = Ce^{-2\omega y \sin\lambda/\sqrt{gh}}$.

Kapitel II.

# Schwingungen um die Gleichgewichtslage.

## Die Lagrange'sche Methode in Verbindung mit unbestimmten Multiplicatoren.

§ 47. In dem ersten Band wurde die Lagrange'sche Methode zur Ermittlung kleiner Schwingungen der Systeme um eine Gleichgewichtslage erklärt. Wir wollen hier diese Ausführungen nicht wiederholen, sondern untersuchen, auf welche Art die Theorie durch die Anwendung unbestimmter Multiplicatoren verändert wird. Bei den dynamischen Problemen wünschen wir meistens in Erfahrung zu bringen, wie sich einige specielle Grössen mit der Zeit verändern. Einer der Hauptvorzüge der Lagrange'schen Methode ist nun der, dass sie uns eine grosse Auswahl von Grössen bietet, die man zu Coordinaten nehmen kann. Die Grössen, welche man vor Allem zu finden wünscht, wählt man daher gewöhnlich zu unabhängigen Coordinaten und ihre Variationen ergeben sich dann aus den Lagrange'schen Gleichungen. Manchmal aber kommen wir auf diesem Weg zu einer sehr complicirten Menge von Symbolen. Vielleicht verlieren wir dadurch ein Symmetrieprincip, welches uns erlaubt hätte, das ganze Verfahren abzukürzen und zu vereinfachen. Wir wollen jetzt untersuchen, welche Modificationen in die Gleichungen eingeführt werden müssen, wenn die speciellen Grössen, deren Werthe wir vor Allem zu wissen wünschen, sich mit Vortheil nicht zu unabhängigen Variablen wählen lassen. Zu diesem Zweck empfiehlt sich ganz besonders die Methode der unbestimmten Multiplicatoren.

§ 48. Das System möge auf irgend welche Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. bezogen werden, die so klein sind, dass man alle Potenzen derselben mit Ausnahme der niedrigsten, die vorkommen, vernachlässigen kann. Sie mögen so gewählt werden, dass sie in der Gleichgewichtslage verschwinden. Ihre Anzahl sei $n$. Nimmt man an, die geometrischen Gleichungen enthielten die Zeit nicht explicite, so ist die lebendige Kraft $T$ eine quadratische Function der Geschwindigkeiten und kann in einer Reihe von der Form

$$2T = A_{11}\theta'^2 + 2A_{12}\theta'\varphi' + A_{22}\varphi'^2 + \text{etc.}$$

entwickelt werden.

Hier sind die Coefficienten $A_{11}$, etc. sämmtlich Functionen von $\theta$, $\varphi$, etc. und wir können annehmen, sie wären in eine Reihe von Potenzen dieser Coordinaten entwickelt. Da die Schwingungen so klein sind, dass man alle Potenzen der kleinen Grössen mit Ausnahme der niedrigsten, die vorkommen, verwerfen kann, so lassen sich alle Glieder dieser Reihen mit Ausnahme der constanten vernachlässigen. Man kann daher die Coefficienten $A_{11}$, etc. als constant ansehen.

Wir müssen jetzt die Kräftefunction $U$ in eine Reihe von Potenzen von $\theta$, $\varphi$, etc. entwickeln. Wären die Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. sämmtlich unabhängig, so würden die Glieder, welche die ersten Potenzen enthalten, verschwinden, weil nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten $\partial U/\partial\theta$, $\partial U/\partial\varphi$, etc. in der Gleichgewichtslage für alle Variationen von $\theta$, $\varphi$, etc., die sich mit den geometrischen Bedingungen vereinigen lassen, Null sind. Da dies aber, wenn $\theta$, $\varphi$, etc. durch geometrische Beziehungen verbunden sind, nicht nothwendigerweise der Fall sein muss, so nehmen wir als Entwicklung an

$$U - U_0 = C_1\theta + C_2\varphi + \text{etc.} + \frac{1}{2}C_{11}\theta^2 + C_{12}\theta\varphi + C_{22}\varphi^2 + \text{etc.},$$

worin $U_0$ eine Constante bedeutet, die, wie man leicht sieht, den Werth von $U$ in der Gleichgewichtslage angibt. Man beachte, dass die Coefficienten $C_1$, $C_2$, etc. nicht ohne Einschränkung zu nehmen sind. Sie müssen derart sein, dass alle Gleichgewichtsgleichungen erfüllt werden.

Da die Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. nicht unabhängig von einander sind, so existiren geometrische Beziehungen, welche sie verbinden. Um die Sache zu vereinfachen, wollen wir annehmen, es wären nur zwei solcher Beziehungen vorhanden. Sie seien

$$f(\theta, \varphi, \text{etc.}) = 0, \quad F(\theta, \varphi, \text{etc.}) = 0.$$

Auch sie können auf die folgende Art in Potenzen der Coordinaten entwickelt werden:

$$f = G_1\theta + G_2\varphi + \text{etc.} + \frac{1}{2}G_{11}\theta^2 + G_{12}\theta\varphi + \frac{1}{2}G_{22}\varphi^2 + \text{etc.},$$

$$F = H_1\theta + H_2\varphi + \text{etc.} + \frac{1}{2}H_{11}\theta^2 + H_{12}\theta\varphi + \frac{1}{2}H_{22}\varphi^2 + \text{etc.}$$

Die constanten Glieder dieser Reihen sind weggelassen, weil die geometrischen Gleichungen erfüllt sein müssen, wenn sich das System im Gleichgewicht befindet, d. h. für $\theta = 0$, $\varphi = 0$, etc.

Wir haben diese Reihen nun in die Lagrange'schen Gleichungen einzusetzen. Wie man aus Bd. 1, Kap. 8 weiss, werden die letzteren durch den Typus

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

dargestellt mit ähnlichen Gleichungen für $\varphi$, $\psi$, etc. Darin sind $\lambda$, $\mu$ unbestimmte Multiplicatoren, deren Werthe aus den so aufgestellten Gleichungen ermittelt werden müssen. Als Resultat dieser Substitutionen erhält man offenbar

$$A_{11}\theta'' + \text{etc.} = C_1 + C_{11}\theta + \text{etc.} + \lambda(G_1 + \text{etc.}) + \mu(H_1 + \text{etc.}),$$
$$A_{12}\theta'' + \text{etc.} = C_2 + C_{12}\theta + \text{etc.} + \lambda(G_2 + \text{etc.}) + \mu(H_2 + \text{etc.}),$$
$$\text{etc.} = \text{etc.}$$

§ 49. Da das System aus einer Gleichgewichtslage gestört worden ist, so wird allen Gleichungen durch $\theta = 0$, $\varphi = 0$, etc. genügt. Man erhält so die Gleichgewichtswerthe von $\lambda$, $\mu$. Sie seien $\lambda_0$, $\mu_0$. Alsdann ist

$$0 = C_1 + \lambda_0 G_1 + \mu_0 H_1,$$
$$0 = C_2 + \lambda_0 G_2 + \mu_0 H_2,$$
$$0 = \text{etc.}$$

Dies sind die Gleichgewichtsgleichungen, auf die schon hingewiesen wurde. Da die Kräftefunction $U$ eine bekannte Function der Coordinaten ist, so sind die sämmtlichen Coefficienten $C_1$, $C_2$, etc. gegeben; daher bestimmen zwei beliebige der Gleichungen $\lambda_0$, $\mu_0$. Die übrigen sind dann identisch erfüllt, weil die Grössen $C_1$, $C_2$, etc. nicht ohne Einschränkung, sondern derart sind, dass allen Gleichgewichtsgleichungen genügt wird.

Die dynamischen Werthe von $\lambda$ und $\mu$ seien $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, $\mu = \mu_0 + \mu_1$. Dann sind $\lambda_1$ und $\mu_1$ kleine Grössen, deren Quadrate verworfen werden können. Die Schwingungsgleichungen werden

$$\begin{aligned}
A_{11}\theta'' + A_{12}\varphi'' + \cdots = {} & C_{11}\theta + C_{12}\varphi + \cdots \\
& + \lambda_0(G_{11}\theta + G_{12}\varphi + \cdots) + \lambda_1 G_1 \\
& + \mu_0(H_{11}\theta + H_{12}\varphi + \cdots) + \mu_1 H_1, \\
A_{12}\theta'' + A_{22}\varphi'' + \cdots = {} & C_{12}\theta + C_{22}\varphi + \cdots \\
& + \lambda_0(G_{12}\theta + G_{22}\varphi + \cdots) + \lambda_1 G_2 \\
& + \mu_0(H_{12}\theta + H_{22}\varphi + \cdots) + \mu_1 H_2, \\
\text{etc.} = {} & \text{etc.}
\end{aligned}$$

Man hat hier so viel Gleichungen, als Coordinaten. Ausserdem existiren so viele geometrische Gleichungen, als unbestimmte Multiplicatoren vorhanden sind. Sie sind

$$G_1\theta + G_2\varphi + \cdots = 0,$$
$$H_1\theta + H_2\varphi + \cdots = 0.$$

Die Anzahl der Gleichungen reicht daher aus, um alle unbekannten Grössen $\theta, \varphi, \ldots, \lambda_1, \mu_1$ zu ermitteln.

§ 50. Um sie aufzulösen, verfahren wir genau so wie bei der entsprechenden Methode in Bd. 1, bei welcher die Coordinaten $\theta, \varphi$, etc. sämmtlich unabhängig waren, und schliessen hier nur $\lambda_1, \mu_1$ unter die zu bestimmenden Variablen ein. Als typische Auflösung nehmen wir

$$\theta = M \sin(pt + \alpha), \quad \varphi = N \sin(pt + \alpha), \text{ etc.,}$$
$$\lambda_1 = D \sin(pt + \alpha), \quad \mu_1 = E \sin(pt + \alpha).$$

Substituirt man sie in die Gleichungen, so ist ersichtlich, dass $\sin(pt + \alpha)$ durch Division aus jeder Gleichung entfernt werden kann. Setzt man

$$\begin{aligned} \overline{C}_{11} &= C_{11} + \lambda_0 G_{11} + \mu_0 H_{11}, \\ \overline{C}_{12} &= C_{12} + \lambda_0 G_{12} + \mu_0 H_{12}, \\ \text{etc.} &= \text{etc.}, \end{aligned}$$

so ergibt sich auf diese Weise

$$\begin{aligned} (A_{11}p^2 + \overline{C}_{11}) M + (A_{12}p^2 + \overline{C}_{12}) N + \cdots + G_1 D + H_1 E &= 0, \\ (A_{12}p^2 + \overline{C}_{12}) M + (A_{22}p^2 + \overline{C}_{22}) N + \cdots + G_2 D + H_2 E &= 0, \\ \text{etc.} &= 0, \\ G_1 M + G_2 N + \cdots \qquad &= 0, \\ H_1 M + H_2 N + \cdots \qquad &= 0 \end{aligned}$$

und durch Elimination der Verhältnisse von $M, N$, etc., $D, E$ die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} A_{11}p^2 + \overline{C}_{11}, & A_{12}p^2 + \overline{C}_{12}, & \cdots G_1, & H_1 \\ A_{12}p^2 + \overline{C}_{12}, & A_{22}p^2 + \overline{C}_{22}, & \cdots G_2, & H_2 \\ \text{etc}, & \text{etc.}, & \cdots \text{etc.}, & \text{etc.} \\ G_1, & G_2, & 0, & 0 \\ H_1, & H_2, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sind $n$ Coordinaten vorhanden, so ist diese Gleichung zur Ermittlung von $p^2$ vom $n^{\text{ten}}$ Grad. Nimmt man irgend eine positive oder negative Wurzel, so bestimmen die vorstehenden Gleichungen die entsprechenden Verhältnisse von $M, N$, etc. Nimmt man alle Wurzeln nacheinander und addirt diese partiellen Auflösungen, so erhält man eine vollständige Auflösung mit ihren $2n$ Constanten. Diese Constanten sind aus den Anfangswerthen der Coordinaten und ihrer Geschwindigkeiten zu bestimmen.

§ 51. Die obige Determinante unterscheidet sich von der früheren, die sich ergab, wenn keine unbestimmten Multiplicatoren vorhanden waren, in zweierlei Hinsicht. (1) Die Grössen $C_{11}$, $C_{12}$, etc. sind hier durch andre ersetzt, die durch den Strich über dem Buchstaben dargestellt werden; (2) die Determinante ist durch die Coefficienten $G_1, H_1$, etc. der *ersten* Potenzen der Coordinaten in den geometrischen Gleichungen gerändert.

Wir bemerken, dass eine grosse Vereinfachung des Verfahrens eintritt, *wenn die Kräftefunction derart ist, dass die Coefficienten der ersten Potenzen der Coordinaten in ihrer Reihenentwicklung sämmtlich Null werden.* Alsdann sind $C_1$, $C_2$, etc. Null und aus den Gleichgewichtsgleichungen folgt $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 0$. Daher ist $\overline{C}_{11} = C_{11}$, $\overline{C}_{12} = C_{12}$, etc. = etc. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass man die Glieder zweiter Ordnung in den geometrischen Gleichungen nicht zu berücksichtigen braucht, denn sie verschwinden aus den Bewegungsgleichungen. Das ist selbstverständlich eine wichtige Vereinfachung. Ferner unterscheidet sich die schliessliche Determinante von der früheren, bei der keine unbestimmten Multiplicatoren benutzt wurden, nur dadurch, dass sie durch die Coefficienten $G_1$, etc., $H_1$, etc. gerändert ist.

Diese Vereinfachung kommt vor, *wenn die Lage, um die das System schwingt, eine Gleichgewichtslage für alle Variationen der Coordinaten ist, obgleich die Zwangsbedingungen das System nöthigen, in einer gegebenen beschränkten Art zu schwingen.* Siehe auch § 78.

§ 52. **Kurze Uebersicht.** Um die Art des Verfahrens in jedem speciellen Fall anzugeben, wollen wir hier die vorstehende allgemeine Entwicklung kurz zusammenfassen.

Man entwickle die lebendige Kraft $T$ und die Kräftefunction $U$ in Potenzen der Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. und ihrer Differentialquotienten $\theta'$, $\varphi'$, etc. und verwerfe dabei alle Potenzen, welche höher als die zweite sind. Man multiplicire die geometrischen Beziehungen $f = 0$, $F = 0$ mit $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$ und $\mu = \mu_0 + \mu_1$, worin $\lambda_1$ und $\mu_1$ kleine Grössen von derselben Ordnung wie die Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. sind, entwickle diese Producte und verwerfe dabei alle Potenzen der kleinen Grössen, die über die zweite gehen. *Zuerst* setze man dann in dem Ausdruck $U + \lambda f + \mu F$ den Coefficienten der ersten Potenz einer jeden Coordinate gleich Null; man erhält so Gleichungen zur Ermittlung von $\lambda_0$, $\mu_0$. *Zweitens* lasse man die Accente in dem Ausdruck für $T$ und ebenso die constanten Glieder in $U$ weg und bilde die Determinante von

$$Tp^2 + U + \lambda f + \mu F$$

in Bezug auf die Coordinaten und die Hülfsvariablen $\lambda_1$, $\mu_1$. Setzt man die Determinante gleich Null, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung der Werthe von $p$.

§ 53. **Ueber Hauptschwingungen.** Die Gleichungen, welche die Constanten $M$, $N$, etc., $D$, $E$ bestimmen, sind oben aufgestellt worden. Löst man sie auf, so sieht man, dass ihre Verhältnisse den Verhältnissen der Unterdeterminanten der Elemente in einer beliebigen Horizontalreihe der Determinantengleichung gleich sind. Bezeichnen wir diese Unterdeterminanten mit $I_{11}(p^2)$, $I_{12}(p^2)$, etc., so werden die Schwingungen des Systems durch

$$\theta = L_1 I_{11}(p_1{}^2) \sin(p_1 t + \alpha_1) + L_2 I_{11}(p_2{}^2) \sin(p_2 t + \alpha_2) + \text{etc.},$$
$$\varphi = L_1 I_{12}(p_1{}^2) \sin(p_1 t + \alpha_1) + L_2 I_{12}(p_2{}^2) \sin(p_2 t + \alpha_2) + \text{etc.}$$
etc. etc.

dargestellt, worin $L_1$, $L_2$, etc. Constanten bedeuten, die von den Anfangsbedingungen abhängen.

Sind die Anfangscoordinaten derart, dass alle Constanten $L_1$, $L_2$, etc. mit Ausnahme einer einzigen verschwinden, so reduciren sich die Ausdrücke für $\theta$, $\varphi$, ... $\lambda$, $\mu$ auf die trigonometrischen Ausdrücke einer Verticalreihe. Die Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. stehen alsdann *in Verhältnissen zueinander, die während der Bewegung constant bleiben.* Es folgt auch, dass *die Werthe der Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. in einem constanten Intervall*, nämlich der Periode des in der einen zurückbehaltenen Verticalreihe stehenden trigonometrischen Ausdrucks *sich wiederholen.* Vergleichen wir damit Bd. 1, so ergibt sich, dass die charakteristischen Merkmale einer Hauptschwingung vorhanden sind.

§ 54. Wird das System auf beliebige Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. bezogen, *so kann verlangt werden, man solle die Art finden, auf welche es aus seiner Gleichgewichtslage gestört werden muss, damit es eine gegebene Hauptschwingung mache.* Man sieht, das System muss so gestört werden, dass seine Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. sich zueinander verhalten, wie die Unterdeterminanten irgend einer Horizontalreihe der Determinantengleichung. Auch die Anfangsgeschwindigkeiten $\theta'$, $\varphi'$, etc. müssen in demselben Verhältniss stehen. Diese Bedingungen sind nöthig und ausreichend.

§ 55. Will man diesen Satz algebraisch ausdrücken, so sagt man: Wenn ein System eine Hauptschwingung vom Typus $\sin(p_1 t + \alpha_1)$ ausführt, dann ist

$$\frac{\theta}{I_{11}(p_1{}^2)} = \frac{\varphi}{I_{12}(p_1{}^2)} = \text{etc.} = L_1 \sin(p_1 t + \alpha_1).$$

Aus diesen Gleichungen geht auch hervor, dass während der Bewegung $\theta'' = -p_1{}^2\theta$, $\varphi'' = -p_1{}^2\varphi$, etc. ist.

§ 56. **Hauptcoordinaten.** *Es kann verlangt werden, Transformationsformeln zu finden, durch welche sich beliebige Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. in Hauptcoordinaten verwandeln lassen.* Den Definitionen in Bd. 1 entsprechend ist ein System auf Hauptcoordinaten $\xi$, $\eta$, etc. bezogen, wenn die lebendige Kraft $T$ und die Kräftefunction $U$ in der Form

$$2T = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + \cdots$$
$$2(U - U_0) = c_{11}\xi^2 + c_{22}\eta^2 + c_{33}\zeta^2 + \cdots$$

ausgedrückt sind.

Die Lagrange'schen Gleichungen der kleinen Schwingungen haben dann die Gestalt $\xi'' - c_{11}\xi = 0$, $\eta'' - c_{22}\eta = 0$, etc., so dass die ganze Bewegung durch $\xi = E\sin(p_1 t + \alpha_1)$, $\eta = F\sin(p_2 t + \alpha_2)$, etc. gegeben ist, worin $E$, $F$, etc. Integrationsconstanten sind und $p_1^2 = -c_{11}$, $p_2^2 = -c_{22}$, etc. ist.

Sind die Anfangsbedingungen derart, dass alle Constanten $E$, $F$, etc. *bis auf eine* Null sind, so sagt man, das System vollführe eine Hauptschwingung. Setzt man dann $x = \sin(p_1 t + \alpha_1)$, $y = \sin(p_2 t + \alpha_2)$, so ist $x$ ein Vielfaches von $\xi$, $y$ ein Vielfaches von $\eta$ u. s. f. Die Ausdrücke für $\theta$, $\varphi$, etc. in § 53 reduciren sich jetzt auf

$$\theta = L_1 I_{11}(p_1^2)\,x + L_2 I_{11}(p_2^2)\,y + \cdots,$$
$$\varphi = L_1 I_{12}(p_1^2)\,x + L_2 I_{12}(p_2^2)\,y + \cdots,$$
$$\text{etc.} = \text{etc.}$$

Diese Formeln setzen uns in den Stand, beliebige Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. mit andern $x$, $y$, etc. zu vertauschen, die verursachen, dass $T$ und $U$ die Gestalt annehmen

$$2T = a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + \cdots,$$
$$2(U - U_0) = c_{11}x^2 + c_{12}y^2 + \cdots$$

Die $n$ Constanten $L_1$, $L_2$, etc. sind willkürliche Multiplicatoren von $x$, $y$, etc. und können, wenn man will, so gewählt werden, dass jede der Grössen $a_{11}$, $a_{22}$, etc. der Einheit gleich wird.

## Die Lagrange'sche Determinante.

§ 57. Untersucht man die Lagrange'sche Methode zur Ermittlung der Schwingungen eines Systems, so ergibt sich, dass das ganze Verfahren von der Auflösung einer gewissen Determinantengleichung abhängt. Sogar die Stabilität oder Unstabilität des Gleichgewichtes hängt von der Beschaffenheit ihrer Wurzeln ab. Kann die Gleichung gelöst werden, so sind die Beschaffenheit der Bewegung und die Schwingungsperioden, wenn die Bewegung eine schwingende ist, sofort klar. Kann dagegen die Gleichung nicht gelöst werden, so lässt sich die Determinante entwickeln und lassen sich ihre Wurzeln nach den Methoden, welche die Theorie der Gleichungen liefert, discutiren. Jedoch auch ohne Entwicklung der Determinante kann man denselben Zweck manchmal durch das folgende Theorem erreichen. Wir wollen mit der Determinante in ihrer einfachsten Form, wie sie in Bd. 1, Kap. 9 gegeben wurde, beginnen und alsdann untersuchen, welche Aenderungen hervorgebracht werden, wenn sie mit irgend welchen Grössen gerändert wird.

§ 58. **Die Trennung der Wurzeln.** Die Determinantengleichung möge die Form haben[1])

---

1) Den Satz, dass die Wurzeln der Lagrange'schen Determinante, wenn sie in dieser allgemeinen Form geschrieben wird, sämmtlich reell sind, verdankt man Lord Kelvin (Sir W. Thomson). Er stellt die Erweiterung eines ent-

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A_{11}p^2 + C_{11}, & A_{12}p^2 + C_{12}, & \text{etc.} \\ A_{12}p^2 + C_{12}, & A_{22}p^2 + C_{22}, & \text{etc.} \\ \text{etc.,} & \text{etc.,} & \text{etc.} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir wollen aus dieser Determinante durch Weglassen der ersten Horizontal- und Verticalreihe eine Unterdeterminante bilden; aus dieser auf dieselbe Weise eine zweite u. s. f. Wir erhalten so eine Reihe von Functionen von $p^2$, deren Grad gleichmässig von dem $n^{\text{ten}}$ zum ersten abnimmt. Die so gebildeten aufeinander folgenden Determinanten mögen $\varDelta$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, etc. heissen. Die Determinante $\varDelta$ wird nicht geändert, wenn man sie rechts mit einer Verticalreihe von Nullen und mit einer ebensolchen Horizontalreihe unten rändert, vorausgesetzt, dass in die leergelassene Ecke die Einheit gesetzt wird. Man kann daher $\varDelta_n = 1$ annehmen.

Nach einem Satze der Lehre von den Determinanten ist, wenn $I_{11}$, $I_{12}$, etc. die Unterdeterminanten der verschiedenen Elemente von $\varDelta$ sind, $\varDelta\varDelta_2 = I_{11}I_{22} - I_{12}^2$. Man beachte ferner, dass $I_{11} = \varDelta_1$ ist. Nehmen wir nun an, $p^2$ wachse nach und nach von $p^2 = -\infty$ bis $p^2 = +\infty$, so müssen, wenn $p^2$ einen Werth annimmt, der $\varDelta_1 = 0$ macht, $\varDelta$ und $\varDelta_2$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Derselbe Schluss lässt sich auf jedes Glied der Reihe $\varDelta$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, etc. anwenden; so oft daher eines von ihnen verschwindet, haben die Determinanten auf beiden Seiten entgegengesetzte Vorzeichen[1]).

---

sprechenden Theorems für jene specielle Form der Gleichung dar, welche man erhält, wenn die lebendige Kraft als die Summe der Quadrate der Geschwindigkeiten der Coordinaten ausgedrückt wird. Mehrere Beweise des letzteren Theorems findet man in Lesson VI von Dr. Salmon's *Higher Algebra.* Der einfachste ist der, den Dr. Salmon selbst gibt. Er beweist auch, dass die Wurzeln durch die der Hauptunterdeterminanten getrennt werden. Der im Text gegebene Beweis ist eine Erweiterung seines Verfahrens auf die Lagrange'sche Determinante in ihrer allgemeinen Form. Eine andre Methode wird in den Beispielen § 71 angegeben.

1) Bei dieser Beweisführung ist der Kürze wegen der Fall ausgelassen worden, in welchem zwei oder mehr aufeinander folgende Determinanten in der Reihe $\varDelta$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, etc. für denselben Werth von $p^2$ verschwinden. In Wirklichkeit ist dies jedoch von keiner Bedeutung, da man die Determinanten mit andern vertauschen kann, deren Elemente nur wenig von denen der gegebenen verschieden und derart sind, dass keine zwei aufeinanderfolgende Determinanten der Reihe eine gemeinschaftliche Wurzel haben. In der Grenze werden daher, wenn diese willkürlichen Aenderungen der Elemente unbegrenzt abnehmen, die Wurzeln der Reihe von Determinanten immer noch reell sein und die Wurzeln einer jeden Determinante werden die in der Reihe zunächst vor ihr gelegenen entweder trennen oder *mit ihnen zusammenfallen.*

Um zu beweisen, dass diese Aenderungen möglich sind, seien $\varDelta$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ drei aufeinander folgende Glieder der Reihe. Nehmen wir an, $\varDelta_2$ verschwände nicht, während die beiden Glieder (und vielleicht noch andre) grade vor ihm Null werden. Nach der Gleichung im Text ist dann $I_{12} = 0$. Wir wollen zu jedem der Elemente, deren Unterdeterminante $I_{12}$ ist, die kleine Grösse $\alpha$ addiren. Die

Benutzt man diese Determinanten wie die Sturm'schen Functionen, so sieht man, dass ein Zeichenwechsel nur an einem Ende der Reihe verloren oder gewonnen werden kann. Er kann an dem Ende $\Delta$ nur dann verloren werden, wenn $p^2$ durch eine Wurzel der Gleichung $\Delta = 0$ geht und wird wieder gewonnen, wenn $p^2$ durch die nächste der Grösse nach darauf folgende Wurzel geht, *es sei denn, dass eine Wurzel der Gleichung* $\Delta_1 = 0$ *zwischen diesen beiden liegt.*

Wenn wir daher beweisen können, dass $n$ Zeichenwechsel verloren gehen, wenn $p^2$ von $p^2 = -\infty$ zu $p^2 = +\infty$ übergeht, so muss die Gleichung $\Delta = 0$ offenbar $n$ reelle Wurzeln haben und diese Wurzeln müssen durch die Wurzeln der Gleichung $\Delta_1 = 0$ getrennt sein.

Der Coefficient der höchsten Potenz von $p^2$ in der Determinante $\Delta$ ist nun die Determinante von $T$ und daher positiv. Der Coefficient der höchsten Potenz von $p^2$ in $\Delta_1$ ist die Determinante von $T$, nachdem man $\theta' = 0$ gesetzt hat, und daher ebenfalls positiv. Die Coefficienten der höchsten Potenzen von $p^2$ in jeder der Determinanten $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$, etc. sind also positiv.

Substituirt man nun $-\infty$ für $p^2$, so werden diese Determinanten abwechselnd positiv und negativ, setzt man dagegen $+\infty$ für $p^2$, so werden sie sämmtlich positiv. Daraus folgt, dass $n$ Zeichenwechsel bei dem Uebergang des $p^2$ von $p^2 = -\infty$ zu $p^2 = +\infty$ verloren gehen.

Fasst man zusammen, so ergibt sich, dass *alle Wurzeln einer jeden Determinante der Reihe* $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$, etc. *reell sind und die Wurzeln einer jeden zwischen den Wurzeln der in der Reihe zunächst vorhergehenden Determinante liegen oder, wie man sagt, diese Wurzeln trennen.*

§ 59. Wir wollen unsern Beweis wieder aufnehmen. Man sieht, dass bei der Zunahme des $p^2$ von $p^2 = -\infty$ bis $p^2 = +\infty$ jedesmal ein Zeichenwechsel in der Reihe $\Delta$, $\Delta_1$, etc. verloren wird, wenn $p^2$ durch eine Wurzel der Gleichung $\Delta = 0$ geht und dass er, einmal verloren, nie wiedergewonnen werden kann. Daraus folgt unmittelbar, *dass, wenn bei dem Uebergang des* $p^2$ *von* $p^2 = \alpha$ zu $p^2 = \beta$, $\varkappa$ *Zeichenwechsel verloren gehen, es genau* $\varkappa$ *Wurzeln der Gleichung* $\Delta = 0$ *zwischen diesen Grenzen gibt.*

§ 60. Man beachte, dass bei diesem Beweisverfahren bez. der Functionen

$$T = \frac{1}{2} A_{11} \theta'^2 + A_{12} \theta' \varphi' + \frac{1}{2} A_{22} \varphi'^2 + \cdots$$

$$U - U_0 = \frac{1}{2} C_{11} \theta^2 + C_{12} \theta \varphi + \frac{1}{2} C_{22} \varphi^2 + \cdots$$

---

Determinante $\Delta_1$ bleibt unverändert und gleich Null. Die Determinante $\Delta$ dagegen erleidet eine kleine Veränderung, so dass die eben angeführte Gleichung in ihrer neuen Form $\Delta \Delta_2 = -\alpha^2 \Delta_2^2$ wird. $\Delta$ ist daher nicht mehr gleich Null. Auf diese Art lässt sich jedesmal, wenn zwei consecutive Glieder der Determinantenreihe verschwinden, das eine von ihnen endlich machen.

nur die Annahme gemacht worden ist, dass die aufeinanderfolgenden Determinanten der ersteren sämmtlich positiv sind. Man kann dies auch so ausdrücken, dass man sagt, $T$ sei eine definite positive Function, d. h. eine Function, welche das positive Vorzeichen für alle Werthe der Variablen behält und nur dann verschwindet, wenn alle Variablen Null werden. Dass die lebendige Kraft eine solche definite positive Function ist, leuchtet als selbstverständlich ein. Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, unter welchen eine quadratische Function eine definite positive Function ist, hat u. A. Williamson in seinem *Differential Calculus* angegeben. Man kann sie kurz in den Satz zusammenfassen, dass alle aufeinanderfolgenden Determinanten positiv sein müssen. Einen kurzen Beweis findet man in einer Note am Ende des Buches.

§ 61. **Gleiche Wurzeln.** Da die Wurzeln einer jeden der Hauptunterdeterminanten $I_{11}$, $I_{22}$, etc. die Wurzeln der Lagrange'schen Determinante trennen, so muss, wenn die letztere $r$ Wurzeln hat, von denen jede gleich $p_1$ ist, jede der ersteren $r - 1$ Wurzeln jede gleich $p_1$ haben. Aus demselben Grund muss jede zweite Hauptminor, wie $\Delta_2$, $r - 2$ Wurzeln haben, von denen jede gleich $p_1$ ist.

Wir wollen zunächst einen beliebigen anderen Minor der Determinante betrachten. Bei geeigneter Vertauschung von Horizontal- und Verticalreihen lässt er sich durch $I_{12}$ darstellen. Da $\Delta\Delta_2 = I_{11} I_{22} - I_{12}^2$ ist, so muss folglich $I_{12}$ ebenfalls $r - 1$ Wurzeln haben, die $p_1$ gleich sind.

Im Ganzen ergibt sich, dass, *wenn die Lagrange'sche Determinante $r$ gleiche Wurzeln hat, jeder erste Minor $r - 1$ Wurzeln hat, welche jeder derselben gleich sind. Ebenso hat jeder zweite Minor $r - 2$ Wurzeln, die jeder derselben gleich sind u. s. f.*

§ 62. Dieses Theorem ermöglicht uns oft, die Anwesenheit gleicher Wurzeln in der Lagrange'schen Determinante zu entdecken. Wir setzen irgend eine Unterdeterminante gleich Null und erhalten so eine Gleichung für $p^2$, die manchmal eine sehr einfache Form hat.

Nehmen wir z. B. an, das System habe zwei Coordinaten, so dass (§ 60)

$$2T = A_{11}\theta'^2 + 2A_{12}\theta'\varphi' + A_{22}\varphi'^2,$$
$$2(U - U_0) = C_{11}\theta^2 + 2C_{12}\theta\varphi + C_{22}\varphi^2$$

ist. Bildet man die Lagrange'sche Determinante, so sieht man, dass die Minoren nur dann Null sein können, wenn $C_{11}/A_{11} = C_{12}/A_{12} = C_{22}/A_{22}$ und jedes dieser Verhältnisse gleich $-p^2$ ist. Diese Bedingungen müssen daher erfüllt sein, wenn zwei gleiche Wurzeln existiren sollen.

§ 63. Die Gleichung, welche in der Raumgeometrie zur Bestimmung der Länge der Axen einer Fläche zweiter Ordnung dient, hat die Form der Lagrange'schen Gleichung. Aus dem vorstehenden Satz folgt, dass die gewöhnlichen Bedingungen für eine Umdrehungsfläche sich unmittelbar ergeben, wenn man jede der Unterdeterminanten gleich Null setzt.

§ 64. **Die geränderte Determinante.** Wir wollen jetzt die Lagrange'sche Determinante mit beliebigen Grössen $f$, $g$, $h$, etc. rändern, so dass die Determinantengleichung

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{11}p^2 + C_{11}, & A_{12}p^2 + C_{12}, & \cdots, & f \\ A_{12}p^2 + C_{12}, & A_{22}p^2 + C_{22}, & \cdots, & g \\ \cdots, & \cdots, & \cdots, & \cdots \\ f, & g, & \cdots, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

wird. Als Function von $p^2$ betrachtet, ist sie um einen Grad niedriger als die für $\Delta$. Wir wollen nun untersuchen, in welchem Zusammenhang die Wurzeln dieser Gleichung mit denen der Lagrange'schen stehen.

Entfernt man die Null in der Endecke von $\Delta'$ und setzt dafür $ap^2 + c$, worin $a$ und $c$ irgend welche beliebig kleine Grössen sind, so erhält man eine andre Gleichung, ebenfalls von der Lagrange'schen Form, aber einen Grad höher als $\Delta$. Der Ausdruck für $2T$, aus welchem diese neue Gleichung herrührt, ist derselbe, wie der frühere, wenn man das Glied $ax'^2$ hinzufügt, worin $x$ irgend eine neue Variable bedeutet. Ist nun $a$ positiv, so lässt sich das in § 58 bewiesene Theorem auf diese neue Determinante anwenden. Sie heisse $D'$; alle Wurzeln von $D'$ sind dann reell und durch die des ersten Minors eines jeden Elementes der Hauptdiagonale getrennt. Die Determinante $\Delta$ ist aber der Minor des letzten Elementes dieser Diagonale. Mithin sind alle Wurzeln von $D'$ reell und durch die von $\Delta$ getrennt. Nimmt man $a$ sowohl als $c$ unendlich klein an, so sind zwei Wurzeln der Gleichung $D' = 0$ unendlich und die übrigen Wurzeln kann man sich beliebig an die von $\Delta' = 0$ annähern lassen. Daraus folgt, dass, *die Grössen $f$, $g$, etc. mögen sein, welche sie wollen, die Wurzeln der Determinantengleichung $\Delta' = 0$ reell sind und zwischen denen von $\Delta = 0$ liegen oder sie trennen.*

§ 65. Die ursprüngliche Determinante $\Delta$ hat $n$ Vertical- und ebensoviele Horizontalreihen. Die Determinante $\Delta'$ ist aus $\Delta$ durch Ränderung mit $n$ willkürlichen Grössen unter Bildung einer neuen Vertical- und Horizontalreihe mit einer Null in der Ecke abgeleitet worden. Auf dieselbe Art lässt sich die Determinante $\Delta'$ mit einem neuen System von $n$ willkürlichen Grössen $f'$, $g'$, etc. rändern, indem man die leeren Stellen in der Nähe der Ecke mit Nullen besetzt. Man erhält so eine neue Determinante mit *vier* Nullen in der Ecke, die $\Delta''$ heissen soll. Sie ist um einen Grad niedriger als $\Delta'$, ihre Wurzeln sind reell und trennen die von $\Delta'$.

§ 66. Schliesslich wollen wir die Reihe von $n+1$ Determinanten $\Delta, \Delta', \Delta''$, etc. bilden, die mit einer Constanten endigt. Jede Determinante ist aus der vorhergehenden durch Ränderung mit $n$ willkürlichen Grössen mit Nullen in der Nähe der Ecke abgeleitet worden; die Determinanten sind daher sämmtlich symmetrisch. Verfährt man, wie in § 64, so kann man dieses Determinantensystem als Grenzfälle andrer Determinanten ansehen, die ebenfalls die Lagrange'sche Form haben, aber von successive höheren Graden als $\Delta$ sind. Die letzte von ihnen hat, da sie in der Grenze eine Constante ist, Wurzeln, die sämmtlich unendlich gross sind. Setzt man vor das zweite Determinantensystem, das (wie in § 58 beschrieben) durch Wegschneiden von Horizontal- und Verticalreihen gebildete System, so erhält man eine vollständige Reihe von Determinanten, die durch die Determinante $\Delta$ in zwei Gruppen getheilt wird. Sie beginnen mit der Einheit und endigen mit einer Determinante, deren sämmtliche Wurzeln (in der Grenze) unendlich gross sind. Aus dem Theorem in § 58 folgt, dass beim Uebergang von $p^2 = \alpha$ zu $p^2 = \beta$ kein Zeichenwechsel in der vollständigen Reihe verloren gehen kann, weil keine Wurzel der letzten Determinante zwischen den endlichen Grössen $\alpha$ und $\beta$ liegen

kann. Wenn aber $k$ Wurzeln der Determinante $\Delta$ zwischen diesen Grenzen liegen, so müssen in dem ersten Determinantensystem $k$ Zeichenwechsel verloren worden sein. Daher werden in dem zweiten Determinantensystem ebensoviele Zeichenwechsel gewonnen, als in dem ersten verloren wurden. Fasst man zusammen, so kommt man zu dem Schluss, dass, *wenn bei dem Uebergang des $p^2$ von $p^2 = \alpha$ zu $p^2 = \beta$, $k$ Zeichenwechsel in der Reihe $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$, etc. gewonnen werden, genau $k$ Wurzeln der Gleichung $\Delta = 0$ zwischen diesen Grenzen existiren.*

§ 67. Beisp. 1. Man zeige, ohne $a = 0$ zu setzen, dass in dem Satz des § 64 die Wurzeln von $\Delta'$ die von $\Delta$ trennen, d. h. zwischen ihnen liegen.

Beisp. 2. Man zeige, dass, wenn in dem Satz des § 66 beim Uebergang des $p^2$ von $p^2 = \alpha$ zu $p^2 = \beta$ Zeichenwechsel verloren gehen, $\alpha$ grösser als $\beta$ ist.

Beisp. 3. Wenn das System auf Hauptcoordinaten bezogen wird, zu zeigen, dass man den Determinantengleichungen $\Delta' = 0$, $\Delta'' = 0$ die Form geben kann

$$\frac{f^2}{A_{11}p^2 + C_{11}} + \frac{g^2}{A_{22}p^2 + C_{22}} + \cdots = 0,$$

$$\frac{(fg' - f'g)^2}{(A_{11}p^2 + C_{11})(A_{22}p^2 + C_{22})} + \frac{(gh' - g'h)^2}{(A_{22}p^2 + C_{22})(A_{33}p^2 + C_{33})} + \cdots = 0.$$

§ 68. **Die Invarianten des Systems.** Um die Werthe von $p^2$ zu bestimmen, hat man oft nöthig, die Determinante zu entwickeln. Sind nur wenige Coordinaten vorhanden, so hat dies keine Schwierigkeit. In andern Fällen dagegen kann man den Taylor'schen Satz benutzen. Ist $\Delta$ die Determinante von $T$ und bezeichnet $\Pi$ die Operation

$$\Pi = C_{11}\frac{\partial}{\partial A_{11}} + C_{12}\frac{\partial}{\partial A_{12}} + C_{22}\frac{\partial}{\partial A_{22}} + \cdots,$$

so wird die Lagrange'sche Determinante, wenn sie entwickelt wird,

$$\Delta p^{2n} + \Pi(\Delta)p^{2n-2} + \Pi^2(\Delta)\frac{p^{2n-4}}{1\cdot 2} + \cdots = 0.$$

Ist $\Delta'$ die Determinante von $U$ und bezeichnet $\Pi'$ die Operation $\Pi$, wenn die Buchstaben $A$ und $C$ vertauscht werden, so kann man die Gleichung auch in der Form schreiben

$$\Delta' + \Pi'(\Delta')p^2 + \Pi'^2(\Delta')\frac{p^4}{1\cdot 2} + \cdots = 0.$$

Wenn nur drei Coordinaten vorhanden sind, ist die Bezeichnung zu empfehlen, die Dr. Salmon in seinen *Conic's* in dem Kapitel über Invarianten benutzt hat.

§ 69. Es ist manchmal vortheilhaft, die Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. mit andern $x$, $y$, etc. zu vertauschen, die durch lineare Beziehungen mit ihnen verbunden sind. Diese Beziehungen seien

$$\begin{aligned} \theta &= l_1 x + l_2 y + l_3 z + \cdots, \\ \varphi &= m_1 x + m_2 y + m_3 z + \cdots, \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned}$$

Wie dies auch geschehen mag, offenbar muss die Gleichung, aus welcher sich die Schwingungszeiten ergeben, dieselbe bleiben. Die Verhältnisse der Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $p^2$ sind daher invariabel. Es sei $\mu$ die Transformationsdeterminante, d. h. die Determinante, deren Horizontalreihen die Coefficienten von $x$, $y$, $z$, etc. in den obigen Transformationsgleichungen sind. Alsdann verwandelt sich nach einem bekannten Satz der Lehre von den Deter-

minanten $\Delta$ in $\mu^2\Delta$. Alle übrigen Coefficienten ändern sich in demselben Verhältniss. *Die Coefficienten $\Delta$, $\Pi(\Delta)$, etc. heissen daher die Invarianten des Systems. Das Vorzeichen eines jeden, sowie das Verhältniss zwischen beliebigen zwei von ihnen, werden durch eine Transformation der Coordinaten nicht geändert.*

§ 70. Beisp. 1. Wenn sich ein System im Gleichgewicht befindet, zu zeigen, dass das Gleichgewicht stabil ist, falls $-\Pi(\Delta)$, $\Pi^2(\Delta)$, $-\Pi^3(\Delta)$, etc. sämmtlich positiv sind.

Man beachte (1), dass $\Delta$ nothwendiger Weise positiv ist und dass (2), weil alle Wurzeln der Lagrange'schen Gleichung reell sind, nach dem Descartes-schen Theorem dies die Bedingungen sind, unter welchen sämmtliche Wurzeln positiv werden.

Beisp. 2. Dasselbe dynamische System kann um dieselbe Gleichgewichtslage unter der Einwirkung zweier verschiedener Systeme von Kräften schwingen. Sind $\varrho_1$, $\varrho_2$, etc.; $\sigma_1$, $\sigma_2$, etc. die Schwingungsperioden, wenn die beiden Systeme gesondert wirken, $R_1$, $R_2$, etc., wenn sie zusammen wirken, zu beweisen, dass

$$\Sigma\frac{1}{\varrho^2}+\Sigma\frac{1}{\sigma^2}=\Sigma\frac{1}{R^2}$$

ist.

Es folgt dies daraus, dass $\Pi(\Delta)$ nur die ersten Potenzen von $C_{11}$, etc. enthält.

Beisp. 3. Zwei verschiedene Systeme von Körpern schwingen unter der Wirkung desselben Kräftesystems in Perioden $\varrho_1$, $\varrho_2$, etc.; $\sigma_1$, $\sigma_2$, etc. Wenn $R_1$, $R_2$, etc. die Perioden sind, wenn beide unter der Einwirkung dieses Kräftesystems stehen, zu beweisen, dass $\Sigma\varrho^2+\Sigma\sigma^2=\Sigma R^2$ ist.

§ 71. Beisp. 1. Es seien $T$ und $U$ in ihrer einfachsten Form, d. h. auf Hauptcoordinaten bezogen, durch die Gleichungen gegeben

$$2T=a_1\theta'^2+a^2\varphi'^2+\cdots,$$
$$2(U-U_0)=c_1\theta^2+c_2\varphi^2+\cdots.$$

Man soll diese Coordinaten in allgemeine mit Hülfe der Formeln des § 69 umwandeln und daraus die allgemeine Form der Lagrange'schen Determinante entwickeln. Der Kürze wegen sei $B_1=a_1p^2+c_1$, $B_2=a_2p^2+c_2$, etc. und es gebe $k$ solche Ausdrücke. Ferner seien $I(l_1)$, $I(l_2)$, etc. die Unterdeterminanten von $l_1$, $l_2$, etc. in der Transformationsdeterminante, die in § 69, $\mu$ genannt wurde. Man zeige, (1) dass die Lagrange'sche Determinante gleich $\mu^2B_1B_2\dots B_k$ ist, (2) dass der Minor des ersten Elementes der ersten Zeile der Lagrange'schen Determinante

$$\{I(l_1)\}^2B_2B_3\cdots B_k+\{I(m_1)\}^2B_1B_3\cdots B_k+\cdots$$

ist und (3) dass die Lagrange'sche Determinante, wenn sie mit $f$, $g$, $h$, etc. gerändert und in die freigelassene Ecke eine Null gesetzt wird, dem folgenden Ausdruck gleichkommt

$$-\begin{vmatrix} f & g & h & \cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots \\ n_1 & n_2 & n_3 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}^2 B_2B_3\cdots B_k-\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & \cdots \\ f & g & h & \cdots \\ n_1 & n_2 & n_3 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}^2 B_1B_3\cdots B_k-\cdots.$$

Beisp. 2. Man folgere aus den analytischen Resultaten des letzten Paragraphen, dass, wenn $T$ und $U$ Ausdrücke sind, die durch eine *reelle* lineare Transformation sich aus den Formeln

$$2T=a_1\theta'^2+a_2\varphi'^2+\cdots,$$
$$2(U-U_0)=c_1\theta^2+c_2\varphi^2+\cdots$$

ableiten lassen, in denen die $a$ und $c$ beliebige Vorzeichen besitzen, (1) sämmtliche Wurzeln der Lagrange'schen Determinante reell sind, (2) dass sie durch die irgend eines Hauptminors getrennt werden und dass sie (3) auch durch die der geränderten Determinante getrennt werden.

## Die Energie der schwingenden Systeme.

§ 72. *Ein System wird auf seine Hauptcoordinaten bezogen; man soll seine kinetische und potentielle Energie finden.*

Die Coordinaten seien $\xi$, $\eta$, etc., die lebendige Kraft $T$ und die Kräftefunction $U$ daher durch

$$2T = \xi'^2 + \eta'^2 + \cdots,$$
$$2(U - U_0) = -p_1^2\xi^2 - p_2^2\eta^2 - \cdots$$

gegeben; es ist dann nach den Lagrange'schen Gleichungen, § 56,

$$\xi = E\sin(p_1 t + \alpha_1), \quad \eta = F\sin(p_2 t + \alpha_2), \text{ etc.}$$

und nach Substitution in die obigen Ausdrücke für $T$ und $U$

$$2T = p_1^2 E^2 \cos^2(p_1 t + \alpha_1) + p_2^2 F^2 \cos^2(p_2 t + \alpha_2) + \text{etc.},$$
$$2(U_0 - U) = p_1^2 E^2 \sin^2(p_1 t + \alpha_1) + p_2^2 F^2 \sin^2(p_2 t + \alpha_2) + \text{etc.}$$

Darin ist $T$ die kinetische Energie des Systems und, wenn man die Gleichgewichtslage zur Bezugslage nimmt, $U_0 - U$ die potentielle Energie.

Aus diesen Gleichungen geht hervor, *dass die ganze Energie eines um seine Gleichgewichtslage schwingenden Systems die Summe der Energien seiner Hauptschwingungen ist.*

§ 73. **Mittlere kinetische und potentielle Energie.** Der mittlere Werth von $E^2\cos^2(pt + \alpha)$ in Bezug auf die Zeit von $t = 0$ bis $t = t$ ist $\frac{E^2}{t}\int_0^t \cos^2(pt + \alpha)\,dt$, woraus sich durch Integration $\frac{1}{2}E^2$ ergibt, wenn $t$ sehr gross ist. Der mittlere Werth von $E^2\sin^2(pt + \alpha)$ ist selbstverständlich derselbe. Daraus ziehen wir den Schluss, *dass die mittlere kinetische Energie eines Systems, welches um eine Gleichgewichtslage schwingt, der mittleren potentiellen Energie gleich ist, wenn das Mittel aus sehr vielen Perioden genommen wird* und die Gleichgewichtslage die Bezugslage ist. So ist die Energie des Systems im Ganzen gleichmässig in kinetische und potentielle Energie getheilt. Manchmal hat die eine, manchmal die andre den Vorsprung, für längere Zeit jedoch sind ihre Antheile gleich.

§ 74. **Die Energie irgend eines Systems.** *Die Energie eines Systems zu finden, welches um eine Gleichgewichtslage schwingt und auf beliebige Coordinaten bezogen wird.*

Die allgemeinen Coordinaten seien $\theta$, $\varphi$, etc. und daher die kinetische Energie $T$ und die potentielle $U_0 - U$ durch

$$2T = A_{11}\theta'^2 + 2A_{12}\theta'\varphi' + \cdots,$$
$$2(U - U_0) = C_{11}\theta^2 + 2C_{12}\theta\varphi + \cdots$$

gegeben. Wir haben eben bewiesen, dass die ganze Energie die Summe der Energien der Hauptschwingungen ist. Wir wollen daher die ganze Energie derjenigen Hauptschwingung suchen, deren Typus (§ 55) durch

$$\frac{\theta}{M_1} = \frac{\varphi}{N_1} = \text{etc.} = \sin(p_1 t + \alpha_1)$$

dargestellt wird, worin

$$M_1 = L_1 I_{11}(p_1^2), \quad N_1 = L_1 I_{12}(p_1^2), \text{ etc. ist.}$$

Substituirt man in den Ausdruck für $T$, so wird

$$2T = [A_{11}M_1^2 + 2A_{12}M_1N_1 + \cdots]\,p_1^2\cos^2(p_1 t + \alpha_1).$$

Wir wollen mit $T_1$ das Resultat bezeichnen, das man erhält, wenn man für $\theta'$, $\varphi'$, etc. in $T$ die Coefficienten $M_1$, $N_1$, etc. der verticalen Reihe in § 53 substituirt, welche die Hauptschwingung vom Typus $\sin(p_1 t + \alpha_1)$ darstellt. $T_2$ bezeichnet dann das durch Substitution von $M_2$, $N_2$, etc. erhaltene Resultat u. s. f. Man sieht daher, dass die ganze *kinetische Energie* des Systems

$$T_1 p_1^2 \cos^2(p_1 t + \alpha_1) + T_2 p_2^2 \cos^2(p_2 t + \alpha_2) + \text{etc.}$$

ist. Geben ferner $U_1$, $U_2$, etc. die Resultate derselben Substitutionen in $U - U_0$ an, so wird *die potentielle Energie* des Systems

$$= - U_1 \sin^2(p_1 t + \alpha_1) - U_2 \sin^2(p_2 t + \alpha_2) - \text{etc.}$$

Vergleicht man damit die Ausdrücke für die kinetische und potentielle Energie einer Hauptschwingung in § 72, so ergibt sich, dass die Coefficienten der trigonometrischen Glieder gleich sind. Daraus folgt

$$T_1 p_1^2 + U_1 = 0, \quad T_2 p_2^2 + U_2 = 0, \text{ etc.} = 0.$$

Addirt man die beiden Ausdrücke für die kinetische und potentielle Energie, so findet man, dass *die ganze Energie dargestellt wird durch*

$$T_1 p_1^2 + T_2 p_2^2 + \cdots.$$

§ 75. Man kann die Gleichung $T_1 p_1^2 + U_1 = 0$ auch aus den Gleichungen in § 50 zur Ermittlung von $M$, $N$, etc. ableiten. Multiplicirt man sie bez. mit $M$, $N$, etc., lässt die beiden letzten weg und addirt die Resultate, so wird offenbar, da $\lambda$ und $\mu$ hier fehlen,

$$(A_{11}M^2 + 2A_{12}MN + \cdots)\,p^2 + (C_{11}M^2 + 2C_{12}MN + \cdots) = 0,$$

welches das in voller Länge geschriebene Resultat ist, das zu beweisen war.

## Wirkung von Aenderungen im System.

§ 76. **Die Wirkung der Vermehrung der Trägheit.** Wenn man annimmt, das System schwinge um seine Gleichgewichtslage unter der Einwirkung einer gegebenen Gruppe von Kräften, die Wirkung der Vermehrung der Trägheit eines Theils des Systems ohne Aenderung der Kräfte zu finden.

Es sei

$$\left.\begin{aligned} 2T &= A_{11}\theta'^2 + 2A_{12}\theta'\varphi' + \cdots \\ 2(U-U_0) &= C_{11}\theta^2 + 2C_{12}\theta\varphi + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (1),$$

worin alle $A$ und $C$ durch die Bedingungen des Problems gegeben sind. Wenn man zu $2T$ die Grösse

$$\mu(\theta' + b\varphi' + \text{etc.})^2$$

hinzufügt, die Aenderung in den Schwingungsperioden zu finden.

Wir wollen die Coordinate $\theta$ transformiren, indem wir setzen

$$\theta_1 = \theta + b\varphi + \text{etc.};$$

durch Elimination von $\theta$ erhält dann $T$ und $U$ die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} 2T &= (A_{11}+\mu)\theta_1'^2 + 2A'_{12}\theta_1'\varphi' + \cdots \\ 2(U-U_0) &= C_{11}\theta_1^2 + 2C'_{12}\theta_1\varphi + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (2),$$

worin $A'_{12}$ etc., $C'_{12}$ etc. die durch die Transformation der Coordinaten geänderten Coefficienten sind. Die Perioden sind jetzt durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} (A_{11}+\mu)p^2 + C_{11}, & A'_{12}p^2 + C'_{12}, \text{ etc.} \\ A'_{12}p^2 + C'_{12}, & \text{etc.} \end{vmatrix} = 0$$

gegeben. Setzt man $\mu = 0$, so gibt diese Gleichung die Perioden vor der Zunahme der Trägheit an. Wir wollen ihr die Form $f(p^2) = 0$ geben. Ist $I$ der Minor des ersten Elementes der ersten Zeile der Determinante, so wird die Gleichung, aus der sich die veränderten Perioden ergeben,

$$u = f(p^2) + \mu p^2 I = 0.$$

Man beachte, dass $I$ von $\mu$ unabhängig ist und daher $\mu$ in der Gleichung nur in der ersten Potenz auftritt. Die Coefficienten der höchsten Potenzen von $p^2$ in $f(p^2)$ und $I$ sind die erste und zweite Determinante von $T$ und daher beide positiv, § 60.

Die Wurzeln von $f(p^2) = 0$ mögen $p_1^2$, $p_2^2$, etc. sein, die von $I = 0$ seien $q_1^2$, $q_2^2$, etc. und beide Reihen habe man so geordnet, dass die Glieder der Grösse nach abnehmen. Die Wurzeln von $I = 0$ trennen nach § 58 die von $f(p^2) = 0$. Die Glieder der Reihe $p_1^2$, $q_1^2$, $p_2^2$, $q_2^2$, etc. sind daher in absteigender Folge geordnet. Der Fall, in welchem einige dieser Grössen gleich werden, kann als Grenze des Falles angesehen werden, in welchem sie alle verschieden sind, wobei der Unterschied beliebig klein ist. Da alle Schwingungen des Systems reell sind, so sind die Werthe von $p_1^2$, $p_2^2$, etc. positiv.

Um zu ermitteln, wie die Wurzeln der Gleichung $u = 0$ sich durch die Einführung von $\mu$ geändert haben, setzen wir $p^2$ der Reihe nach gleich $p_1^2$, $p_2^2$, etc. Wie man sieht, nimmt $u$ das Vorzeichen von $I$ an und ist daher abwechselnd positiv und negativ und beginnt mit einem positiven Werth. Auf diese Art verschwindet nun $u$ für Werthe von $p^2$, von denen der grösste zwischen $p_1^2$ und $p_2^2$, der nächstgrösste zwischen $p_2^2$ und $p_3^2$ u. s. f. liegt. *Daher sind die Wurzeln sämmtlich kleiner geworden* [1]).

---

1) Lord Rayleigh bespricht dieses Theorem in seiner *Theory of Sound.* Siehe die zweite Ausgabe 1894, Bd. 1, S. 122.

Setzt man dagegen $p^2$ der Reihe nach gleich $q_1^2$, $q_2^2$, etc., so nimmt $u$ das Vorzeichen der $f(p^2)$ an, das unabhängig von $\mu$ ist. Diese Vorzeichen sind daher dieselben, wie vor der Einführung von $\mu$. Daraus folgt, dass kein Werth von $\mu$ die Wurzel $p_1^2$ so klein machen kann, dass sie kleiner als $q_1^2$ wird, oder die Wurzel $p_2^2$ so verringern kann, dass sie kleiner als $q_2^2$ wird u. s. f. *Die Wurzeln bleiben daher wie früher durch die Wurzeln von $I = 0$ getrennt.*

$I$ ist nun der Minor des ersten Elementes der ersten Zeile in der Lagrangeschen Determinante, das heisst, $I = 0$ ist die Gleichung, welche die Perioden angibt, wenn man in das System den Zwang $\theta_1 = 0$ einführt. Daraus schliessen wir, *dass zwar alle Werthe von $p^2$ durch eine Vermehrung $\mu$ der Trägheit eines Theils des Systems vermindert werden, doch keine noch so grosse Vermehrung sie so reduciren kann, dass irgend eine unter den entsprechenden Werth herabsinkt, den man durch absolutes Festlegen des Theiles erhält, dessen Trägheit vermehrt wurde.*

Es ergibt sich unmittelbar, dass solche Perioden des Systems, die ihm vor und nach der Festlegung des betrachteten Theiles gemeinschaftlich sind, durch die Zufügung von Trägheit nicht geändert werden.

§ 77. Beisp. 1. Wenn die Kräftefunction durch eine positive Grösse

$$\mu(\theta + b\varphi + \text{etc.})^2$$

vergrössert wird, zu beweisen, dass alle Wurzeln der Lagrange'schen Determinante zwar verringert werden, aber durch die Wurzeln des Minors $I$ getrennt bleiben. Die Dauer der Perioden solcher Schwingungen, die reell sind, wird daher vergrössert.

Beisp. 2. Man nehme an, alle Schwingungsperioden eines Systems seien bekannt und sie würden, wie gewöhnlich, durch die Werthe von $p$ angegeben. Diese seien $p_1$, $p_2$, etc. Man nehme ferner an, alle Perioden seien bekannt, wenn irgend eine specielle Art der Bewegung verhindert wird, und die entsprechenden Werthe von $p$ seien $q_1$, $q_2$, etc. Wenn dieser Zwang zum Theil aufgehoben wird, d. h., wenn dem System zwar die vorher verhinderte Bewegung in der speciellen Art gestattet wird, aber mit mehr Trägheit als im freien Zustand, zu zeigen, dass die Perioden durch die Gleichung

$$(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2) \text{ etc.} + Mp^2(p^2 - q_1^2)(p^2 - q_2^2) \text{ etc.} = 0$$

gegeben sind, worin $M$ eine der Masse, die der Vermehrung der Trägheit wegen hinzugefügt wurde, proportionale Grösse ist.

Beisp. 3. Das System möge auf beliebige Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. bezogen und die Trägheit durch Hinzufügen von $\mu(a\theta' + b\varphi' + \cdots)^2$ vergrössert werden. Es sei $\Delta$ die Determinante von $T$ vor dem Zusatz zu der Trägheit und $\Delta'$ dieselbe Determinante, jedoch auf die gewöhnliche symmetrische Art mit $a$, $b$, etc. und mit einer Null in der Endecke gerändert. Man beweise, dass die Grösse $M$ in Beisp. (2) durch $M = -\mu\Delta'/\Delta$ gegeben ist.

§ 78. **Wirkung der Einführung eines Zwanges.** Man nehme an, ein System schwinge um eine Gleichgewichtslage mit einer beliebigen Anzahl unabhängiger Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc.; man soll die Wirkung auf die Perioden finden, wenn eine geometrische Beziehung eingeführt wird.

Diese geometrische Beziehung sei $f(\theta, \varphi, \ldots) = 0$. Da sich das System für Verrückungen, die durch irgend welche Werthe von $\theta$, $\varphi$, etc. dargestellt werden, im Gleichgewicht befindet, so sind die Coefficienten der ersten Potenzen von $\theta$, $\varphi$, etc. in der Entwicklung von $U$ Null. Man kann daher dieser Gleichung die Form geben $f(\theta, \varphi, \cdots) = a\theta + b\varphi + \cdots = 0$ (§ 51).

Wir benutzen jetzt die Methode der unbestimmten Multiplicatoren, die in § 48 erklärt wurde. Wir stellen die Schwingungsgleichungen auf, als ob kein

geometrischer Zwang vorhanden wäre und addiren dann auf der rechten Seite $\lambda \partial f/\partial\theta$ und $\lambda \partial f/\partial\varphi$, etc. In unserm Fall sind diese Addenden einfach $\lambda a$ und $\lambda b$, etc. Die neue Determinante, die man durch Elimination von $\theta$, $\varphi$, etc. und der additiven unbekannten Grösse $\lambda$ erhält, ist dieselbe, wie die mit $a$, $b$, etc. geränderte Lagrange'sche Determinante. Man hat so

$$\begin{vmatrix} A_{11}p^2 + C_{11}, & A_{12}p^2 + C_{12} \ldots & a \\ \text{etc.} & \text{etc.} & b \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung gibt die Perioden an nach Einführung der geometrischen Beziehung zwischen den vorher unabhängigen Coordinaten des Systems.

Die Eigenschaften dieser Determinante sind in § 64 besprochen worden. Man sieht, dass das System eine Hauptschwingung weniger, als zuvor, hat und dass die Perioden dieser Hauptschwingungen zwischen den Perioden seiner früheren Schwingungen liegen oder, wie man sagt, sie trennen.

§ 79. Beisp. 1. Zwei unabhängige Systeme, deren Hauptcoordinaten, (§ 56), $(\theta, \varphi)$ bez. $(\xi, \eta)$ sind, schwingen in verschiedenen Perioden. Wenn sie durch Einführung einer geometrischen Beziehung verbunden werden, die durch

$$a\theta + b\varphi + \alpha\xi + \beta\eta = 0$$

dargestellt werden möge, zu zeigen, dass die Perioden des verbundenen Systems durch

$$\frac{a^2}{p^2 - p_1^2} + \frac{b^2}{p^2 - p_2^2} + \frac{\alpha^2}{p^2 - \pi_1^2} + \frac{\beta^2}{p^2 - \pi_2^2} = 0$$

gegeben sind, worin $(p_1, p_2)$, $(\pi_1, \pi_2)$ die Werthe von $p$ für die beiden nicht verbundenen Systeme sind.

Beisp. 2. Zwei unabhängige Systeme, die auf beliebige Coordinaten $(\theta, \varphi)$, $(\xi, \eta)$ bezogen sind, werden so miteinander verbunden, dass die Coordinaten $\varphi$ und $\xi$ gleich werden. Wenn die Buchstaben dieselbe Bedeutung, wie in § 48, haben und Buchstaben ohne Accent sich auf das erste, mit Accent sich auf das zweite System beziehen, zu zeigen, dass die Perioden durch die Gleichung gegeben sind:

$$(A_{11}p^2 + C_{11})\begin{vmatrix} A'_{11}p^2 + C'_{11}, & A'_{12}p^2 + C'_{12} \\ A'_{12}p^2 + C'_{12}, & A'_{22}p^2 + C'_{12} \end{vmatrix} +$$

$$+ (A'_{11}p^2 + C'_{11})\begin{vmatrix} A_{11}p^2 + C_{11}, & A_{12}p^2 + C_{12} \\ A_{12}p^2 + C_{12}, & A_{22}p^2 + C_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

## Zusammensetzung und Zerlegung der Schwingungen.

§ 80. Wird die Lage eines Systems durch verschiedene Coordinaten $x$, $y$ etc. definirt, so sind seine Schwingungen im Allgemeinen durch Gleichungen von der Form

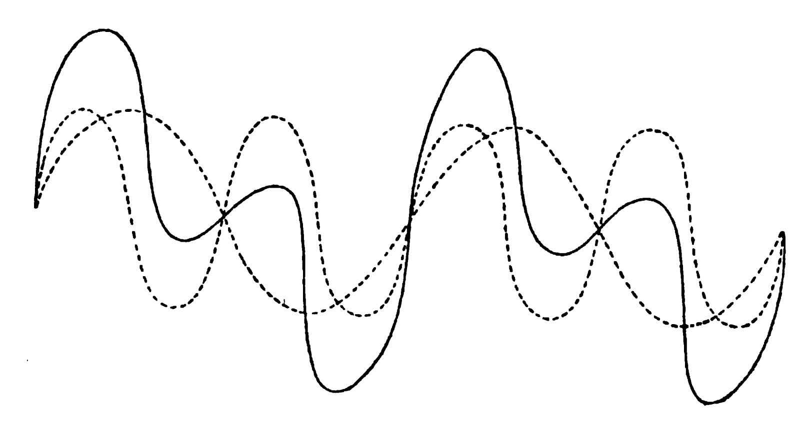
$$x = N_1 \sin(p_1 t + \nu_1) + N_2 \sin(p_2 t + \nu_2) + \text{etc.}$$

und ähnlichen für $y$, $z$, etc. gegeben.

Um einen klaren Einblick in die durch diese Reihen angegebenen Bewegungsänderungen zu erhalten, ist es manchmal nöthig, die verschiedenen Schwingungen zu combiniren oder einfache geometrische Methoden zur Darstellung dieser Glieder zu suchen, welche es uns ermöglichen, die Natur der Bewegung vor Augen zu sehen.

Um eine geometrische Darstellung zu erhalten, benutzen wir einen darstellenden Punkt, dessen Cartesische oder Polar-Coordinaten wir in geeigneter Art von $x$, $y$, $z$, etc. abhängen lassen. Die Bewegung des Punktes führt uns dann die Bewegung des Systems vor Augen.

§ 81. **Commensurable Perioden.** Man nehme z. B. an, man wünsche die Bewegung aufzuzeichnen, die durch $x = N \sin pt + N \sin 2pt$ dargestellt wird, worin die Coefficienten gleich gross sind. Wählt man Cartesische Coordinaten, so kann man $t$ zur Abscisse und $x$ zur Ordinate des Punktes $P$ nehmen. Es hat keine Schwierigkeiten, die beiden Curven $x_1 = N \sin pt$ und $x_2 = N \sin 2pt$ aufzuzeichnen. Die punktirten



Linien mögen sie angeben. Die gesuchte Curve erhält man durch Addition der einer jeden Abscisse entsprechenden Ordinaten. Es ist die ausgezogene Linie.

In der Figur ist die Abscissenaxe nicht gezogen worden. Sie verbindet offenbar die Endpunkte rechts und links.

Man überzeugt sich durch den Augenschein, dass die Bewegung aus einer heftigen Schwingung nach jeder Seite der mittleren Lage besteht, auf welche eine leichte Schwingung folgt und so abwechselnd weiter. Die Figur ist der ähnlich, welche in der Astronomie zur Darstellung der Aenderungen in der Grösse der Zeitgleichung während des Jahres dient.

§ 82. Beisp. 1. Man zeige, dass die Bewegung, welche durch

$$x = N \sin pt + N \sin 3pt$$

dargestellt wird, aus zwei grossen Schwingungen nach der einen Seite der mitt-

leren Lage besteht, auf welche zwei gleich grosse nach der andern Seite folgen und so beständig weiter.

Beisp. 2. Man stelle die Bewegung dar, die durch $x = N \sin 2pt + N \sin 3pt$ gegeben ist, und gebe den Unterschied zwischen den zwei Theilen der grossen Schwingung an.

§ 83. Combinirt man eine *unendlich grosse Zahl commensurabler Schwingungen*, so kommt man mit Hülfe des Fourier'schen Theorems zu interessanten Resultaten. Untersucht man z. B. die durch die Reihe

$$y = N \sin pt - \frac{1}{2} N \sin 2pt + \frac{1}{3} N \sin 3pt - \text{etc.}$$

gegebene Bewegung, so erkennt man, dass der darstellende Punkt eine schwingende Bewegung ausführt, deren Periode dieselbe, wie die des ersten Gliedes, ist. In der Integralrechnung wird gezeigt, dass diese Reihe die Entwicklung von $\frac{1}{2} Npt$ zwischen den Grenzen $pt = -\pi$ und $pt = \pi$ nach dem Fourier'schen Theorem ist. Bei der durch die Reihe angegebenen Bewegung wächst daher $y$ gleichmässig von $-\frac{1}{2}\pi N$ bis $\frac{1}{2}\pi N$ während der Zeit $2\pi/p$ und geht dann plötzlich oder schnell in $-\frac{1}{2}\pi N$ über, um darauf seine allmähliche Zunahme während der nächsten Schwingung zu wiederholen.

Da die Reihe convergent ist, so reicht es in der Regel hin, wenn man annimmt, die Bewegung sei durch eine beschränkte Anzahl von Gliedern dargestellt. Der Ausdruck für $y$ wird auf diese Art vollkommen stetig (auch in seinen Differentialquotienten).

§ 84. Beisp. Man untersuche die Bewegung, welche durch die Reihe

$$y = N \sin pt + \frac{1}{3} N \sin 3pt + \frac{1}{5} N \sin 5pt + \text{etc.}$$

gegeben ist und zeige, dass der darstellende Punkt schnell von der einen Seite seiner mittleren Lage auf die andere überspringt und während der halben Periode des ersten Gliedes in jeder dieser äussersten Lagen stationär bleibt.

§ 85. **Zerlegung der Schwingungen.** Wenn die Lage eines Systems durch die Summe einer Anzahl von Schwingungen, deren Perioden commensurabel sind, gegeben ist, so wiederholt sich die Bewegung offenbar in constanten Zwischenräumen, welche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Perioden der verschiedenen Schwingungen sind. Daher gleicht diese zusammengesetzte Schwingung einer Hauptschwingung wenigstens in einer wichtigen Beziehung. Siehe § 53. Eine solche zusammengesetzte Schwingung lässt sich sogar als eine neue Art von einfacher oder Hauptschwingung benutzen, um mit ihrer Hülfe complicirtere Schwingungen des Systems zu zerlegen.

§ 86. Wir kommen so zu dem Schluss, dass die einfache trigonometrische Schwingung nicht die einzige ist, durch welche eine complicirte Bewegung zerlegt werden kann. Manchmal ist es von Vortheil, viele dieser Schwingungen in grössere Einheiten zusammenzufassen, um einen klaren Begriff von der Bewegung zu erhalten. Es kann dies sogar nothwendig werden, wenn die Anzahl der gleichzeitigen Schwingungen unendlich gross ist.

§ 87. **Zerlegung durch Wellen.** Wenn die Oberfläche stillen Wassers durch das Hineinwerfen eines Steines gestört wird oder wenn eine Klaviersaite oder das Fell einer Trommel an einem Punkt getroffen wird, so beginnen die von dem Stoss entfernten Theile des Systems sich nicht sofort zu bewegen, sondern scheinen zu warten, bis die Wirkung des Stosses sie erreicht. Mit andern Worten, die Bewegung scheint von dem Störungscentrum aus sich in Form von Wellen fortzupflanzen. Diese Wellen lassen sich als neue einfache Schwingungen betrachten. Der Vortheil dieser neuen Elementarbewegung leuchtet ein; denn, wenn verschiedenen Theilen des Mittels verschiedene Störungen gegeben werden, so bringt jede eine Welle hervor und die thatsächliche Bewegung an irgend einem Punkt ist die Resultante dieser Wellen.

§ 88. **Zusammensetzung der Schwingungen von nahezu gleichen Perioden.** *Man verfolge die Bewegung, die durch*

$$x = N_1 \sin(pt + \nu_1) + N_2 \sin(qt + \nu_2)$$

*dargestellt wird, worin sowohl $N_1$ als $N_2$ positiv und $p$ und $q$ nahezu gleich sind.*

Vorerst betrachte man eine Zeit, zu welcher $pt + \nu_1$ und $qt + \nu_2$ sich durch ein grades Vielfaches von $\pi$ unterscheiden. In diesem Moment haben die beiden trigonometrischen Glieder dasselbe Vorzeichen und werden, da $p$ und $q$ nahezu gleich sind, während verschiedener Schwingungen, deren Anzahl von der Grösse des Unterschiedes zwischen $p$ und $q$ abhängt, zusammen wachsen und abnehmen. Der Werth von $x$ variirt daher zwischen den Grenzen $\pm(N_1 + N_2)$. Alsdann betrachte man eine Zeit, zu welcher $pt + \nu_1$ und $qt + \nu_2$ sich durch ein ungrades Vielfaches von $\pi$ unterscheiden. Die beiden trigonometrischen Glieder haben entgegengesetzte Vorzeichen und behalten sie während mehrerer Schwingungen bei. Der Werth von $x$ variirt daher zwischen den Grenzen $\pm(N_1 - N_2)$. Wie man sieht, unterliegt die Bewegung desjenigen Theiles des dynamischen Systems, welcher von der Coordinate $x$ abhängt, einem periodischen Wechsel seines Charakters. Zu der einen Zeit schwingt dieser Theil des Systems durch einen Bogen $N_1 + N_2$ und nach einem Intervall $\pi/(p+q)$ ist der Schwingungsbogen $N_1 - N_2$. Sind $N_1$ und $N_2$ nahezu gleich, so kann der letztere so klein werden, dass die Bewegung für das Auge nicht sichtbar ist. *Auf diese Art entstehen abwechselnde Perioden verhältnissmässiger Thätigkeit und Ruhe. Diese Abwechselung nennt man zuweilen Schwebungen.* Man beachte, dass für nahezu gleiche $p$ und $q$ das Intervall zwischen den beiden verschiedenen Perioden, d. h. $\pi/(p-q)$ sehr gross wird. Zu demselben Resultat kommt man auch, wenn man die beiden Schwingungen nach § 92 zu einer einzelnen zusammensetzt.

§ 89. **Uebertragung von Schwingungen.** Wenn ein System zwei Freiheitsgrade hat, so sind zwei Coordinaten $x$ und $y$ zur Bestimmung seiner Lage im Raum nöthig. Nimmt man nun an, die Schwingung von $x$ sei durch genau den nämlichen Ausdruck, wie zuvor, gegeben und die von $y$ sei dieselbe, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen von $N_2$, und setzt ferner voraus, *die beiden folgenden Bedingungen träfen ein:* (1), *dass die Perioden* $2\pi/p$ *und* $2\pi/q$ *der Schwingungen nahezu gleich, und* (2), *dass ihre Grössen* $N_1$ *und* $N_2$ *entweder gleich oder nahezu gleich sind*, so hat jede der Coordinaten $x, y$ abwechselnde Perioden vergleichsweiser Ruhe und Thätigkeit. Die Ruheperiode für die eine fällt aber zeitlich mit der Thätigkeitsperiode für die andere Coordinate zusammen. Hängt nun die sichtbare-Bewegung des einen Theiles des Systems von $x$ und die des andern von $y$ ab, so befinden sich diese Theile in abwechselnder Ruhe und Schwingung. *Es scheint daher eine Uebertragung von Energie von dem einen Theil des Systems auf den andern und wieder zurück stattzufinden.*

§ 90. Diese Eigenthümlichkeit der Resultanten zweier Schwingungen von nahezu gleichen Perioden lässt es wichtig erscheinen, zu bestimmen, unter welchen Umständen zwei Wurzeln der Lagrange'schen Determinante nahezu gleich sind. Die Sache ist in § 62 praktisch besprochen worden. Es wurde dort gezeigt, dass, wenn zwei Wurzeln gleich sind, jede erste Unterdeterminante Null sein muss. Sind zwei Wurzeln nahezu gleich, so folgt aus dem Princip der Continuität, dass jede Unterdeterminante nahezu Null sein muss. Setzt man eine Unterdeterminante gleich Null, deren Wurzeln man nach der in § 62 angegebenen Methode findet, so erhält man gewisse Grössen, die nahezu den gesuchten Wurzeln, wenn solche existiren, gleich sein müssen. Um darüber Gewissheit zu erhalten, substituire man diese Grössen der Reihe nach in die Lagrange'sche Determinante und die andern Minoren. Wenn diese sämmtlich bei einer dieser Substitutionen nahezu verschwinden, dann gibt es in der Lagrange'schen Gleichung nahezu gleiche Wurzeln und sie sind den substituirten Grössen nahezu gleich.

§ 91. **Zusammensetzung der Schwingungen von sehr ungleichen Perioden.** *Man verfolge die Bewegung, welche durch*

$$x = N_1 \sin(pt + \nu_1) + N_2 \sin(qt + \nu_2)$$

*dargestellt wird, worin sowohl* $N_1$ *als* $N_2$ *positiv und* $p$, *mit* $q$ *verglichen, klein ist.*

Wenn hier $qt + \nu_2$ um $2\pi$ wächst, ändert sich $pt + \nu_1$ nur um $2\pi p/q$; das zweite trigonometrische Glied macht daher seine sämmtlichen Aenderungen durch, während das erste nur sehr wenig alterirt wird. Das System scheint mithin um eine mittlere Lage zu schwingen, die durch den augenblicklichen Werth des ersten trigonometrischen Gliedes bestimmt wird. *Die Schwingungen scheinen folglich einfach harmonisch mit einer Periode* $2\pi/q$ *und einer Schwingungsausdehnung gleich* $N_2$ *zu sein. Zu gleicher Zeit bewegt sich die scheinbare mittlere Lage langsam weiter zuerst nach der einen, dann nach der andern Seite des wirklichen Mittels in der verhältnissmässig langen Periode* $2\pi/p$.

§ 92. **Die resultirende Schwingung.** Man kann eine beliebige Anzahl von Schwingungen, die durch die Glieder der Reihe

$$x = N_1 \sin(p_1 t + \nu_1) + N_2 \sin(p_2 t + \nu_2) + \text{etc.} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

dargestellt werden, auf die folgende Art zusammensetzen.

Es sei $n$ eine Grösse, die wir beliebig wählen können und $p_1 = n + q_1$, $p_2 = n + q_2$, etc. Die resultirende Schwingung werde durch

$$x = R \sin(nt + \varrho) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

dargestellt. Es ist dann

$$\left.\begin{aligned} R \cos \varrho &= \Sigma N \cos(qt + \nu) \\ R \sin \varrho &= \Sigma N \sin(qt + \nu) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

worin $R$ und $\varrho$ sich ohne Schwierigkeit ermitteln lassen. Diese Art der Zusammensetzung von Schwingungen ist von grossem Vortheil, *wenn ihre Perioden gleich sind.* Alsdann sind alle $p$ gleich und wählt man $n = p$, die $q$ gleich Null. Die Reihe (1) wird auf diese Art durch die einfache harmonische Form (2) ersetzt, in welcher $R$ und $\varrho$ absolute Constanten sind.

*Sind die Perioden nahezu gleich,* so kann man $n$ so wählen, dass alle $q$ klein werden. Die Werthe der Elemente $R$ und $\varrho$ variiren jetzt, aber nur langsam. *Die resultirende Schwingung ist daher nahezu harmonisch. Die Elemente der resultirenden Schwingung, die man für irgend einen Moment gefunden hat, bleiben eine beträchtliche Zeit hindurch nahezu constant und ihre kleinen Aenderungen folgen sämmtlich bekannten Gesetzen.* Diese Gesetze werden durch Gleichung (3) bestimmt. Man erhält so einen klareren Einblick in die Aenderungen der Werthe von $x$ durch Prüfung des einzelnen Gliedes (2), als durch Untersuchung der Reihe (1).

§ 93. **Geometrische Construction.** Man kann eine Schwingung, wie z. B. $x = N \sin(pt + \nu)$, durch eine einfache geometrische Construction darstellen, welche manchmal von Nutzen ist. Von irgend einem Anfangspunkt $O$ aus ziehe man die Gerade $OA$, deren Länge nach einem beliebigen Massstab $N$ darstellt und nehme $\nu$ als die Neigung von $OA$ gegen eine feste Gerade $OL$. Man kann $OL$ die Bezugsaxe nennen. Mit dem Centrum $O$ und Radius $OA$ beschreibe man einen Kreis. Wenn ein Punkt $P$, von $A$ ausgehend, diesen Kreis mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $p$ durchläuft, so ist offenbar der Abstand des Punktes $P$ von der Bezugsaxe gleich $N \sin(pt + \nu)$. Mit Hülfe dieses Kreises wird so, wenn die Gerade $OA$ gegeben ist, die ganze Schwingung bestimmt. *Man kann daher durch eine Gerade $OA$ jede harmonische Schwingung darstellen.*

Auf diese Art lassen sich die Schwingungen, die zusammengesetzt werden sollen, durch eine Reihe grader Linien $OA_1$, $OA_2$, etc. ersetzen. Die Kreise mit den Radien $OA_1$, $OA_2$, etc. muss man durch Punkte $P_1$, $P_2$, etc. durchlaufen lassen und die Summe ihrer Abstände von der Bezugsaxe ist die Grösse, welche die resultirende Schwingung darstellt. Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, die sämmtlichen Perioden seien gleich, die $q$ in den Gleichungen (3) daher sämmtlich Null.

$OB$ stelle die Resultante von $OA_1$, $OA_2$, etc. dar, wie sie durch das Parallelogrammgesetz gefunden wird, d. h. so, als ob $OA_1$, $OA_2$, etc. Kräfte wären, die, wie in der Statik, zusammenzusetzen sind. Aus den Gleichungen (3) ergibt sich dann, dass $OB$ die resultirende Schwingung darstellt.

*Die Resultante einer Anzahl von Schwingungen für dieselbe Coordinate lässt sich also, wenn die Perioden gleich sind, durch eine geometrische Construction finden. Man stelle jede Schwingung durch eine Gerade dar, die Resultante ergibt sich dann durch die Zusammensetzung dieser Geraden nach dem Parallelogrammgesetz.*

§ 94. **Beispiele zur Uebertragung von Schwingungen.** Beisp. 1. Ein gleichförmiger Stab $AB$ wird mittelst eines kurzen Stabes $OC$, der rechtwinklig an seinem Mittelpunkt befestigt ist, an einem festen Punkt $O$ aufgehängt. Gleiche Gewichte werden durch Fäden von gleicher Länge an $A$ und $B$ gehängt, so dass das ganze System eine etwas unempfindliche Wage bildet. Wenn nun das eine Gewicht aus seiner verticalen Lage etwas zur Seite gezogen wird und auf diese Art zu schwingen beginnt, wenn dabei ferner das System vom Zustand der Ruhe ausgeht, die nun folgende Bewegung zu finden [1]).

Es sei $CA = CB = a$ und $l$ die Länge eines jeden Fadens $AP$, $BQ$. Ferner sei $G$ der Schwerpunkt des Balkens, $OG = c$, $Mk^2$ das Trägheitsmoment des Balkens für $O$ und $m$ die Masse einer jeden Schale, die als Massenpunkte behandelt werden. Es sei $OC = b$.

$\varphi$, $\eta$, $\theta$ seien die Neigungen von $OC$ und $AP$ bez. $BQ$ gegen die Verticale; $mP$ und $mQ$ die Spannungen der Fäden. $Ox$, $Oy$ seien die horizontale und verticale Axe und $(x, y)$, $(x_1, y_1)$ die Coordinaten von $P$ und $Q$. Die Bewegungsgleichungen sind dann

$$\left.\begin{aligned} x &= b\varphi + a + l\eta \\ y &= b - a\varphi + l \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1), \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= b\varphi - a + l\theta \\ y_1 &= b + a\varphi + l \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} b\varphi'' + l\eta'' &= -g\eta \\ b\varphi'' + l\theta'' &= -g\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3), \qquad \left.\begin{aligned} -a\varphi'' &= -P + g \\ a\varphi'' &= -Q + g \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

$$Mk^2\varphi'' = -Mcg\varphi - mP(b\varphi + a) + mP\eta b + mQ(-b\varphi + a) + mQ\theta b,$$

1) D. Bernoulli beschreibt in den *Nova Comment. Petrop.* Bd. 19, S. 281 ein Experiment, das er in Bezug auf die Bewegung von Pendeln angestellt hatte. Als er zufällig eine Schale einer etwas schwerfälligen Wage bei Seite schob, bemerkte er, dass sie sofort hin- und herzuschwingen begann, während die andere Schale nicht gestört wurde. Kurz nachher aber fing die zweite Schale an, sich zu bewegen und immer grössere Schwingungen zu machen, während die erste allmählich ihre schwingende Bewegung einstellte. Zuletzt schienen beide ihre Bewegung vertauscht zu haben, indem die zuerst gestörte sich fast in Ruhe befand, während die andere ihre gröste Schwingungsweite erreichte. Dasselbe wiederholte sich dann in umgekehrter Ordnung, bis die erste Schale ihre ursprüngliche Bewegung wieder angenommen hatte und die zweite sich in Ruhe befand.

Euler hat zwei Abhandlungen in demselben Band der Petersburger Memoiren veröffentlicht, um theoretisch die Ursache der von Bernoulli beobachteten Bewegungen zu erklären. In der ersten nimmt er an, der Stützpunkt der Wage liege in der Geraden, welche die Befestigungspunkte der Fäden verbindet und kommt zu dem Schluss, dass die von Bernoulli beobachteten Bewegungen nicht stattfinden. Es gelingt ihm also nicht, die Erklärung zu finden. In der zweiten sieht er von dieser Einschränkung ab und hat besseren Erfolg.

In dem *Cambridge Mathematical Journal,* Bd. 2, S. 120 befindet sich ein mit D. G. S. gezeichneter Aufsatz über die Uebertragung der Bewegung von einem Pendel auf das andere mit specieller Beziehung auf das Bernoulli'sche Problem. Doch sind bei allen diesen Untersuchungen so viele Fehler untergelaufen, dass die Resultate zur Erläuterung des Problems kaum brauchbar sind. So substituirt z. B. Euler für die Spannungen der Fäden in den grossen sowohl wie den kleinen Gliedern die Gewichte der Schalen und dieselbe Substitution macht auch der Verfasser des Aufsatzes in dem *Cambridge Journal.*

worin die Accente, wie gewöhnlich, die Differentialquotienten nach der Zeit bedeuten.

Eliminirt man $P$ und $Q$, so wird die letzte Gleichung

$$(Mk^2 + 2ma^2)\varphi'' + (Mc + 2mb)g\varphi = mbg(\eta + \theta) \quad . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Der Abkürzung wegen setzen wir

$$\frac{b}{l} = h, \quad \frac{g}{l} = n^2, \quad \frac{(Mc + 2mb)g}{Mk^2 + 2ma^2} = p^2, \quad \frac{mbg}{Mk^2 + 2ma^2} = q;$$

die Gleichungen (3) und (5) erhalten dann die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} h\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{d^2}{dt^2} + n^2\right)\eta = 0 \\ h\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{d^2}{dt^2} + n^2\right)\theta = 0 \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + p^2\right)\varphi - q(\eta + \theta) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Durch Elimination von $\eta$ und $\theta$ erhält man eine Gleichung zur Bestimmung von $\varphi$. Um sie aufzulösen, setze man $\varphi = C\cos\mu t$; man findet dann, dass $\mu$ der quadratischen Gleichung

$$(\mu^2 - n^2)(\mu^2 - p^2) - 2hq\mu^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

genügen muss. Sind $\mu_1{}^2$ und $\mu_2{}^2$ die Wurzeln dieser Gleichung, so ergeben sich die Werthe von $\varphi$, $\eta$, $\theta$ leicht:

$$\varphi = C_1 \cos\mu_1 t + C_2 \cos\mu_2 t,$$

$$\theta = \frac{C_1 h\mu_1{}^2}{n^2 - \mu_1{}^2}\cos\mu_1 t + \frac{C_2 h\mu_2{}^2}{n^2 - \mu_2{}^2}\cos\mu_2 t - C\cos nt,$$

$$\eta = \text{demselben Glied} + \text{demselben Glied} + C\cos nt.$$

Zur Ermittelung der Werthe der Constanten $C$, $C_1$, $C_2$ dienen die Anfangsbedingungen

$$\varphi = 0, \quad \theta = 0, \quad \eta = \varepsilon; \quad \varphi' = 0, \quad \theta' = 0, \quad \eta' = 0.$$

Man erhält so

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{2h}\frac{(n^2 - \mu_1{}^2)(n^2 - \mu_2{}^2)}{n^2(\mu_1{}^2 - \mu_2{}^2)}(\cos\mu_1 t - \cos\mu_2 t),$$

$$\theta = \frac{\varepsilon}{2}\frac{(n^2 - \mu_2{}^2)\mu_1{}^2\cos\mu_1 t - (n^2 - \mu_1{}^2)\mu_2{}^2\cos\mu_2 t}{n^2(\mu_1{}^2 - \mu_2{}^2)} - \frac{1}{2}\varepsilon\cos nt,$$

$$\eta = \qquad \text{demselben Glied} \qquad + \frac{1}{2}\varepsilon\cos nt.$$

Bei zwei gewöhnlichen Schalen wird $\frac{m}{M}$ und daher $q$ manchmal und $h = b/l$ im Allgemeinen klein sein. Wir wollen nicht annehmen, beide seien klein, sondern nur ihr Product $hq$ sei es. Aus (7) ergibt sich dann

$$\mu_1{}^2 - n^2 = \frac{2hqn^2}{n^2 - p^2}, \quad \mu_2{}^2 - p^2 = -\frac{2hqp^2}{n^2 - p^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Substituirt man und behält nur die Hauptglieder bei, so werden die Werthe von $\varphi$, $\theta$, $\eta$

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi &= -\frac{2q\varepsilon}{n^2-p^2}(\cos\mu_1 t - \cos\mu_2 t \\ 2\theta &= \varepsilon\cos\mu_1 t - \varepsilon\cos nt \\ 2\eta &= \varepsilon\cos\mu_1 t + \varepsilon\cos nt \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

wenn man voraussetzt, $n^2$ und $p^2$ kämen einander nicht so nahezu gleich, dass ihr Unterschied von derselben Ordnung, wie $hq$, ist.

Vergleicht man die Ausdrücke für $\theta$ und $\eta$, so ergibt sich aus den §§ 88 und 89, dass die Uebertragung der Schwingungen von der einen Schale auf die andere in der von Bernoulli beschriebenen Art stattfindet.

Man beachte auch, dass der Balken unbeweglich bleibt, wenn $q$ d. h. $m/M$ klein ist, welchen Werth $h$ d. h. $b/l$ auch haben mag. Dagegen schwingt der Balken, wenn zwar $h$ klein ist, $m/M$ aber nicht.

Zu der Besprechung der Gleichung (7) wollen wir noch bemerken, dass sie die Bedingung für die Stabilität einer gewöhnlichen Wage angibt, d. h. dafür, dass die Wage, wenn sie gestört wird, schnell in ihre horizontale Lage zurückkehrt. Der Balken schwingt um seine Gleichgewichtslage und je schneller die Schwingungen sind, um so leichter kann das Auge bestimmen, ob die mittlere Lage des Balkens horizontal ist oder nicht. Die Wage sollte daher so construirt werden, dass die beiden Schwingungszeiten so kurz wie möglich sind. Diese Zeiten sind offenbar $2\pi/\mu_1$ und $2\pi/\mu_2$; daher müssen $\mu_1$ und $\mu_2$ möglichst gross sein. Dazu ist erforderlich, dass sowohl $n^2$ als $p^2$ gross ist, d. h. (1), die Schwingungszeit eines jeden der beiden Massenpunkte, wenn sie mittelst ihres Fadens an einem festen Punkt aufgehängt werden, sollte kurz sein; (2) sollte auch für den starren Körper, der entsteht, wenn man die Massenpunkte an den Enden des Stabes anbringt und die Fäden fortnimmt, die Schwingungszeit um den Stützpunkt $O$ kurz sein.

Beisp. 2. Wenn man annimmt, auf die eine Schale der in dem letzten Beispiel beschriebenen Wage wirke eine kleine periodische Kraft $fl\cos\lambda t$ in einer zu dem Balken $AB$ parallelen Richtung, zu beweisen, (1), dass, wenn $\lambda$ nahezu $n$ gleichkommt, eine grosse Schwingung der Schalen hervorgerufen wird, während der Balken nur wenig gestört wird; (2) dass, wenn $\lambda$ nahezu gleich $\mu_1$ oder $\mu_2$ ist, grosse Schwingungen in allen Theilen des Systems stattfinden.

Beisp. 3. Ein Stab $AB$ von der Länge $2a$ kann sich frei um eine verticale Axe drehen, die durch seinen $AB$ halbirenden Schwerpunkt $C$ geht. Bei $A$ und $B$ werden zwei gleiche Massenpunkte, jeder von der Masse $m$, an ungleichen Fäden von der Länge $l$ und $l'$ aufgehängt. Einer dieser Fäden wird nun leicht um den Winkel $\varepsilon$ in einer Ebene verschoben, die auf der durch den Stab gelegten Verticalebene senkrecht steht. Man finde die Bewegung.

Sind $z$, $z+x$, $z+y$ die bezüglichen horizontalen Verschiebungen des Endes $A$ und der beiden Massenpunkte zur Zeit $t$ und ist $g/l=n^2$, $g/l'=n'^2$, $ma^2/Mk^2=p^2$, zu beweisen, dass

$$x = \frac{\lambda^2 C}{n^2-\lambda^2}\cos\lambda t + \frac{\lambda'^2 C'}{n^2-\lambda'^2}\cos\lambda' t,$$

$$y = \frac{\lambda^2 C}{n'^2-\lambda^2}\cos\lambda t + \frac{\lambda'^2 C'}{n'^2-\lambda'^2}\cos\lambda' t,$$

$$z = C\cos\lambda t + C'\cos\lambda' t + C''$$

ist, worin $\lambda^2$, $\lambda'^2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:

$$(\lambda^2-n^2)(\lambda^2-n'^2)-(\lambda^2-n^2)p^2n'^2-(\lambda^2-n'^2)p^2n^2=0.$$

Die Bedingungen, unter welchen eine vollständige Uebertragung der Schwingung von dem einen Faden auf den andern stattfindet, sind: (1) $\lambda$ und $\lambda'$ müssen nahezu

gleich sein; (2) die Coefficienten von $\cos \lambda t$ und $\cos \lambda' t$ in den Ausdrücken für $x$ und $y$ müssen es ebenfalls sein, § 88 und 80. Man zeige, dass diese Bedingungen erfordern, dass $n$ und $n'$ nahezu gleich und $p$ klein ist.

Sind die Fäden von gleicher Länge, zu beweisen, dass

$$2x = \varepsilon (\cos nt + \cos \lambda' t), \quad 2y = \varepsilon (\cos nt - \cos \lambda' t),$$
$$2z (1 + 2p^2) = -2p^2 (\cos \lambda' t - 1),$$

worin $\lambda'^2 = n^2 (1 + 2p^2)$ ist. Daraus leite man ab, dass die Bedingungen für vollständige Uebertragung erfüllt sind, wenn $p$ klein ist.

Beisp. 4. Zwei gleiche Stäbe $AB$, $A'B'$ sind mit ihren Mittelpunkten bei $C$, $C'$ befestigt, können sich frei in derselben Ebene um diese Punkte drehen, haben keine Masse und ihre Länge ist klein im Vergleich mit $CC'$. Vier Punkte von gleicher Masse werden nach $A$, $B$, $A'$, $B'$ gebracht und $A$ und $B'$, $A'$ und $B$ ziehen sich gegenseitig an, $A$ und $A'$ dagegen und $B$ und $B'$ stossen sich gegenseitig ab, wobei diese Kräfte dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional sind. Man beweise, dass sich die Stäbe in stabilem Gleichgewicht befinden, wenn sie in derselben Geraden liegen und zwei sich anziehende Massenpunkte zwischen $C$ und $C'$ liegen, und dass das System, wenn die Stäbe leicht gestört werden, eine doppelte Schwingung macht, deren Perioden $2\pi (4c^3/\mu)^{\frac{1}{2}}$ bez. $2\pi (4c^3/3\mu)^{\frac{1}{2}}$ sind, worin $\mu$ die absolute Kraft eines Massenpunktes und $CC' = 2c$ ist. [Coll. Exam.]

Eine vollständige Uebertragung der Bewegung von einem Stab auf den andern findet nicht statt, weil die Perioden nicht nahezu gleich sind, § 89.

Beisp. 5. Man bestimme die kleinen in dem magnetischen Meridian stattfindenden Bewegungen zweier permanenter Magnetstäbe von gleicher Masse, von denen jeder an seinen Enden mittelst paralleler Fäden, welche alle vier dieselbe Länge haben, an Punkten einer horizontalen Linie aufgehängt ist. Die gegenseitige Wirkung der Magnete ist gering im Vergleich zu den andern Kräften. Die Magnete befinden sich in Ruhe; wenn nun einer in Bewegung gesetzt wird, zu zeigen, dass seine ganze Energie mit der Zeit dem andern mitgetheilt wird. [Math. Tripos, 1875.]

Beisp. 6. Zwei Massen, von denen jede gleich $m$ ist, werden mittelst Fäden von gleicher Länge an zwei festen Punkten $A$, $B$, die in derselben horizontalen Linie liegen, aufgehängt. Die Fäden werden in der Nähe der Punkte $A$, $B$ durch einen *horizontalen* steifen Draht verbunden, dessen Masse vernachlässigt werden kann und dessen Länge dem Abstand $AB$ gleich ist. Zieht man nun eine der beiden Massen in der die beiden Pendel enthaltenden verticalen Ebene zur Seite und lässt sie schwingen, so ergibt sich eine abwechselnde Uebertragung der Schwingung von dem einen Pendel auf das andere. [Rowland, *on sympathetic vibration. Franklin Institute.* 1875]. Ein anderer Versuch, den W. Holtz angestellt hat, wird in den Beiblättern der Physik N. 7, 1888 beschrieben. Vergl. auch *Phil. Mag.,* 1888.

---

## Kapitel III.

# Schwingungen um einen Bewegungszustand.

## Der Energieausdruck als Kriterium der Stabilität.

§ 95. In Bd. 1 wurde bewiesen, dass, wenn ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen eines aus einer Gleichgewichtslage gestörten Systems, wie z. B. die Gleichung der Energie bekannt ist, man manchmal aus diesem einen Integral bestimmen kann, ob die Gleichgewichtslage stabil ist oder nicht. Wenn z. B. die potentielle Energie in der Gleichgewichtslage ein Minimum ist, so folgt aus der Gleichung der lebendigen Kraft unmittelbar, dass die Gleichgewichtslage stabil sein muss. Ist dagegen die potentielle Energie kein Minimum, so reicht die Gleichung der lebendigen Kraft allein zur Bestimmung, ob das Gleichgewicht stabil oder unstabil ist, nicht aus. Nur wenn man die übrigen Bewegungsgleichungen in Rechnung zieht, lässt sich beweisen, dass die Gleichgewichtslage unstabil ist.

Man kann die Energie als Kriterium für die Stabilität eines gegebenen Bewegungszustandes ebenso wie für die einer Gleichgewichtslage benutzen, aber mit einer ähnlichen Einschränkung. Wenn eine gewisse Function, die aus solchen ersten Integralen, welche wir gerade zufällig kennen, abgeleitet wird, ein absolutes Minimum oder Maximum ist, so können wir unter Umständen beweisen, dass das System sich nicht weit von dem gegebenen Bewegungszustand entfernen kann. Wenn die Function aber weder ein Maximum noch ein Minimum ist, so lässt sich nur schliessen, dass in diesen Gleichungen offenbar nichts vorhanden ist, was Abweichungen des Systems verhindern könnte. Zur Entscheidung der Frage müssen alsdann die Gleichungen, die wir schon haben, genauer untersucht oder die übrigen Bewegungsgleichungen aufgefunden werden. Dies letztere versparen wir uns für später, wenn wir die Schwingungen um einen Bewegungszustand besprechen. Inzwischen wollen wir die Energie als Kriterium betrachten und zu bestimmen suchen, in welcher Ausdehnung die Frage der Stabilität sich durch sie entscheiden lässt.

§ 96. **Die Stabilität eines Bewegungszustandes.** *Ein dynamisches System befinde sich unter dem Einfluss eines conservativen Kräftesystems in Bewegung und $E$ sei seine Energie. $E$ ist dann eine bekannte Function*

*der Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. und ihrer ersten Differentialquotienten $\theta'$, $\varphi'$, etc. Sie ist für die gegebene Bewegung constant und gleich $h$. Es mögen entweder einige oder alle übrigen ersten Integrale der Bewegungsgleichungen bekannt sein und sie seien*

$$F_1(\theta, \theta', \text{etc.}) = C_1, \quad F_2(\theta, \theta', \text{etc.}) = C_2, \text{ etc.} = \text{etc.}$$

*Wir wollen hier $\theta$ und $\theta'$, $\varphi$ und $\varphi'$, etc. als unabhängige Variable ansehen, so weit wenigstens, als sie nicht durch die eben aufgestellten Gleichungen verbunden sind. Ist alsdann $E$ für die Werthe von $\theta$, $\theta'$, etc, welche der gegebenen Bewegung, die $E$ constant macht, entsprechen, ein wirkliches Maximum oder Minimum in Bezug auf alle Variabeln, so ist die Bewegung für alle Störungen, welche die Constanten $C_1$, $C_2$, etc., nicht alteriren, stabil.*

Wir wollen mit Hülfe der ersten Integrale so viele Buchstaben, wie möglich ist, durch die übrigen ausdrücken und in den Werth von $E$ substituiren. Sind $\psi$, $\psi'$, etc. diese übrigen Buchstaben, so wird

$$E = f(\psi, \psi', \text{etc.}, C_1, C_2, \text{etc.}) = h.$$

Wird nun das System in Bewegung gesetzt und zwar so, dass die neue Bewegung von der gegebenen um ein Geringes verschieden ist, so ändert sich die Constante $h$ in $h + \delta h$ um. Zuerst sei $E$ während der gegebenen Bewegung ein Minimum, dann wird $E$ durch jede beliebige Aenderung der Buchstaben $\psi$, $\psi'$, etc. vergrössert und die gestörte Bewegung kann folglich nicht soweit von der gegebenen abweichen, dass die Aenderung in $E$ grösser als $\delta h$ wird. Dasselbe Resultat erhält man, wenn $E$ ein absolutes Maximum ist.

Genau derselbe Beweis lässt sich für jedes erste Integral der Bewegungsgleichungen ebenso, wie für das Energie-Integral, führen. Wird irgend eine der Functionen $F_1$, $F_2$, etc., welche alle Buchstaben enthält, ein absolutes Maximum oder Minimum, so ist die Bewegung für alle Verrückungen, welche die Constanten der übrigen benutzten Integrale unberührt lassen, stabil.

§ 97. Wenn das System aus einer Gleichgewichtslage gestört wird, die, wie in Bd. 1, durch das Verschwinden der Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. definirt ist, so wird

$$E = \frac{1}{2} A_{11} \theta'^2 + A_{12} \theta' \varphi' + \text{etc.} - U,$$

worin $A_{11}$, $A_{12}$, etc. constant sind und $U$ von $\theta'$, $\varphi'$, etc. nicht abhängt. Darin sind die Glieder, welche die kinetische Energie bilden, weil sie nothwendiger Weise positiv sind und mit $\theta'$, $\varphi'$, etc. verschwinden, offenbar für alle Variationen von $\theta'$, $\varphi'$, etc. ein Minimum. Hier wird also, ohne dass man nöthig hat, andere Integralgleichungen, durch welche der Charakter der Störung eingeschränkt wird, hinzuzunehmen, $E$ ein absolutes Minimum und ist das Gleichgewicht mithin stabil, wenn $-U$ ein Minimum für alle Variationen von $\theta$, $\varphi$, etc. ist.

Im Folgenden wird sich ein ähnliches Resultat ergeben, wenn das System aus einem Zustand stationärer Bewegung gestört wird. Es wird gezeigt werden, dass, wenn eine durch $F - U$ dargestellte Function unter gewissen Bedingungen ein Minimum wird, dieser Zustand stationärer Bewegung unter denselben Bedingungen stabil ist. Die Function $F$ wird selbstverständlich zu Null, wenn der Zustand der Bewegung sich auf den der Ruhe reducirt.

§ 98. **Die Gleichungen der stationären Bewegung.** Es kommt oft vor, dass die Bewegung, um deren Stabilität es sich handelt, ein Zustand stationärer Bewegung ist. Dieser Fall tritt immer dann ein, wenn einige Coordinaten in der Lagrange'schen Function fehlen und nur ihre Differentialquotienten auftreten. Wir wollen die fehlenden Coordinaten $x$, $y$, etc. und die übrigen $\xi$, $\eta$, etc. nennen. Die Lagrange'sche Function $L$ ist dann eine Function von $\xi$, $\xi'$, $\eta$, $\eta'$, etc., $x'$, $y'$, etc., aber nicht von $x$, $y$, etc. Die Lagrange'schen Gleichungen erhalten daher die Gestalt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \xi'} = \frac{\partial L}{\partial \xi} \text{ etc.}, \quad \frac{\partial L}{\partial x'} = u, \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = v, \text{ etc.},$$

worin $u$, $v$, etc. durch die Integration eingeführte Constanten sind. Diese Gleichungen enthalten $\xi$, $\xi'$, $\xi''$, $\eta$, $\eta'$, $\eta''$, etc., $x'$, $x''$, $y'$, $y''$, etc. und enthalten $t$ nicht explicite. Man kann ihnen daher genügen, wenn man $x' = a$, $y' = b$, etc., $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, etc. setzt, worin $a$, $b$, etc., $\alpha$, $\beta$, etc. Constanten bedeuten, die durch Substitution in die Gleichungen zu bestimmen sind. Bezeichnet $\theta$ irgend eine der Coordinaten, so ist sowohl $\partial T/\partial\theta$ als $\partial T/\partial\theta'$, nachdem die Substitution gemacht ist, offenbar constant. Lässt man die Gleichungen, welche $u$, $v$, etc. enthalten, weg, da sie zur Ermittlung von $a$, $b$, etc., $\alpha$, $\beta$, etc. nicht beitragen, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0, \text{ etc.} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin $L = T + U$ ist. Wir haben so ebensoviel Gleichungen, als Coordinaten $\xi$, $\eta$, etc. direct (d. h. nicht blos als Geschwindigkeiten) in den Ausdrücken für $T$ und $U$ vorhanden sind. Die Grössen $a$, $b$, etc. bleiben daher, wenn nicht die Anfangsbedingungen zu Hülfe genommen werden, unbestimmt, während $\alpha$, $\beta$, etc. sich mittelst dieser Gleichungen durch $a$, $b$, etc. ausdrücken lassen.

Man prägt sich diese Gleichungen am besten durch die folgende Regel ein. *In der Lagrange'schen Function, welche die Differenz zwischen der kinetischen und potentiellen Energie ist, setze man für alle Differentialquotienten ihre angenommenen constanten Werthe bei der stationären Bewegung, nämlich $x' = a$, $y' = b$, etc., $\xi' = 0$, $\eta' = 0$, etc. Die Lagrange'sche Function ist dann nur eine Fnnction der Coordinaten $\xi$, $\eta$, etc. Differenzirt man das Resultat partiell nach jeder dieser Coordinaten und setzt die Ergebnisse gleich Null, so erhält man die Gleichungen der stationären Bewegung.*

§ 99. **Stabilität der stationären Bewegung.** Zur Bestimmung, ob diese Bewegung stabil ist, benutze man die Methode in § 96. Der Energiegleichung kann man die Form geben

$$E = T - U = h.$$

Da $T$ keine Function der Coordinaten $x$, $y$, etc. ist, so führen die Lagrange'schen Gleichungen für diese Coordinaten, wie oben, zu den Integralen $\partial T/\partial x' = u$, $\partial T/\partial y' = v$, etc., worin $u$, $v$, etc. constant sind. Mit Hülfe dieser Integrale wollen wir $x'$, $y'$, etc. eliminiren und erhalten so $E$ als Function der

übrigen Coordinaten. Ist $E$ ein absolutes Maximum oder Minimum, so ist diese Bewegung für alle Störungen, welche die Constanten $u$, $v$, etc. nicht ändern, stabil. Es hat keine Schwierigkeit, die Elimination in jedem speciellen Fall vorzunehmen, doch wollen wir das Verfahren ein für allemal angeben. Es ist eine Wiederholung des Processes, der in Bd. 1 Modification der Lagrange'schen Coordinaten genannt wurde.

Zum Zweck der Elimination sei

$$T = \frac{1}{2}(xx)\,x'^2 + (x\xi)\,x'\xi' + \text{etc.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

worin die Coefficienten der accentuirten Buchstaben, d. h. die in Klammern gesetzten Grössen, bekannte Functionen von $\xi$, $\eta$, etc., aber nicht von $x$, $y$, etc. sind. Die Integrale kann man dann in der Form schreiben

$$\left.\begin{aligned} (xx)\,x' + (xy)\,y' + \cdots &= u - (x\xi)\,\xi' - (x\eta)\,\eta' - \text{etc.} \\ (xy)\,x' + (yy)\,y' + \cdots &= v - (y\xi)\,\xi' - (y\eta)\,\eta' - \text{etc.} \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3).$$

Der Kürze halber sollen die rechten Seiten dieser Gleichungen $u - X$, $v - Y$, etc. heissen. Da $T$ eine quadratische Function der accentuirten Buchstaben ist, so lässt sich ihm die Form geben

$$T = \frac{1}{2}(\xi\xi)\,\xi'^2 + (\xi\eta)\,\xi'\eta' + \text{etc.} + \frac{1}{2}x'(u + X) + \frac{1}{2}y'(v + Y) + \text{etc.}$$

Substituirt man in die Glieder, die auf das erste etc. folgen, die durch (3) gegebenen Werthe von $x'$, $y'$, etc., so erhält man

$$T = \frac{1}{2}(\xi\xi)\,\xi'^2 + (\xi\eta)\,\xi'\eta' + \text{etc.} - \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} 0, & u + X, & v + Y, & \text{etc.} \\ u - X, & (xx), & (xy), & \text{etc.} \\ v - Y, & (xy), & (yy), & \text{etc.} \\ \text{etc.} & & & \end{vmatrix},$$

worin $\Delta$ die Determinante von $T$ ist, nachdem man $\xi'$, $\eta'$, etc. gleich Null gesetzt hat. Gibt man $X$, $Y$, etc. andere Vorzeichen, so bleibt diese Determinante unverändert; es können daher Glieder wie $uX$, $vX$, etc., wenn sie entwickelt wird, nicht vorkommen. Setzt man also

$$F = -\frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} 0 & u & v & \ldots \\ u & (xx) & (xy) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

und entwickelt die erste Determinante, so ergibt sich als Resultat der Elimination

$$T = F + \frac{1}{2}B_{11}\,\xi'^2 + B_{12}\,\xi'\eta' + \cdots \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

worin die Glieder nach $F$ eine homogene, quadratische Function von $\xi'$, $\eta'$, etc. darstellen.

$T$ ist nun seinem Wesen nach positiv für alle Werthe von $x'$, $y'$, etc. und daher auch für solche, die sämmtliche $u$, $v$, etc. zu Null machen. Der quadratische Ausdruck $B_{11}\,\xi'^2 +$ etc. ist mithin ein Minimum, wenn $\xi'$, $\eta'$, etc. Null sind. *Wenn also die Function $F - U$ ein Minimum für alle Variationen von $\xi$, $\eta$, etc. wird, so ist die durch* (1) *gegebene stationäre Bewegung für alle Störungen, welche die Impulscoordinaten* (Bd. 1, § 402 u. S. 461) *$u$, $v$, etc. nicht ändern, stabil.*

§ 100. Setzt man $\xi'$, $\eta'$, etc. gleich Null, so ist das durch die successiven Gleichungen (2), (3), (4), (5) angegebene Verfahren genau dasselbe, wie die in Bd. 1 erklärte Hamilton'sche Methode der Bildung der reciproken Function von

$T$ für die Coordinaten $x$, $y$, etc. Man kann daher die Regel folgendermassen aussprechen.

*Man nehme an, eine stationäre Bewegung sei durch* $\xi' = 0$, $\eta' = 0$, etc., $x' = a$, $y' = b$, *etc. so gegeben, dass die Impulscoordinaten* $u$, $v$, *etc. in Bezug auf* $x$, $y$, *etc. constant sind. Man bilde die reciproke Function von* $T$ *in Bezug auf* $x'$, $y'$, *etc., indem man für jeden der Buchstaben* $\xi'$, $\eta'$, *etc. Null setzt. Diese reciproke Function sei* $F$ *und* $-U$ *oder* $V$ *die potentielle Energie. Wenn dann* $F - U$ *oder* $F + V$ *für alle Variationen von* $\xi$, $\eta$, *etc. ein Minimum bleibt, so ist diese stationäre Bewegung für alle Störungen, welche die Impulscoordinaten* $u$, $v$, *etc. nicht ändern, stabil.*

Hat man die reciproke Function $F$ gefunden, so kann man den Gleichungen (1), welche die stationäre Bewegung bestimmen, eine andere Form geben. Die Function $F$ ist reciprok zu $T$ in Bezug auf $x'$, $y'$, etc. und $\xi$, $\eta$, etc. sind lediglich andere Buchstaben, die während des Transformationsverfahrens gebraucht werden; daher ist, wie in Bd. 1 erklärt wurde, $\frac{\partial T}{\partial \xi} = -\frac{\partial F}{\partial \xi}$ und ähnlich für $\eta$, etc. *Die Gleichungen der stationären Bewegung* (1) *werden daher*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(F-U)}{\partial \xi} &= 0, & \frac{\partial(F-U)}{\partial \eta} &= 0 \\ x' &= \frac{\partial(F-U)}{\partial u}, & y' &= \frac{\partial(F-U)}{\partial v} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

*worin* $F - U$ *oder* $F + V$ *die Energie als Function der Impulscoordinaten* $u$, $v$, *etc. statt der Geschwindigkeiten* $x'$, $y'$, *etc. ausgedrückt ist, und die übrigen accentuirten Buchstaben* $\xi'$, $\eta'$, *etc. entweder vor oder nach der Differentiation gleich Null gesetzt werden.*

§ 101. **Ein specieller Bewegungsfall.** *Wenn die Energie eine Function nur einer der Coordinaten, dagegen eine Function der Differentialquotienten aller ist, so lässt sich umgekehrt zeigen, dass die stationäre Bewegung nur dann stabil ist, wenn* $F - U$ *ein Minimum ist.*

Diese einzelne Coordinate sei $\xi$; aus der Gleichung der lebendigen Kraft folgt dann bei derselben Bezeichnung, wie zuvor,

$$\tfrac{1}{2} B_{11} \xi'^2 + F - U = h.$$

Bildet man die Lagrange'sche Gleichung und behandelt $B_{11}$ als Constante, da wir das Quadrat von $\xi'$ vernachlässigen wollen, so erhält man

$$B_{11} \xi'' + \frac{\partial}{\partial \xi}(F - U) = 0.$$

Um die Schwingung zu finden, sei $\xi = \alpha + p$; nach (6) wird dann

$$B_{11} \frac{d^2 p}{dt^2} + \left[\frac{\partial^2 (F - U)}{\partial \xi^2}\right] p = 0,$$

worin nach der Differentiation $\alpha$ für $\xi$ in der eckigen Klammer zu schreiben ist. Die Bewegung ist offenbar stabil oder unstabil, je nachdem der Coefficient von $p$ positiv oder negativ, d. h. $F - U$ ein Minimum oder Maximum ist.

Näheres über den Gegenstand findet man in des Verfassers *Essay on the Stability of Steady Motion,* 1877.

§ 102. **Beispiele von stationären Bewegungen.** Beisp. 1. Wir wollen einen einfachen Fall nehmen. Ein Massenpunkt beschreibe eine kreisförmige Bahn um ein Anziehungscentrum, dessen Beschleunigung im Abstand $r$ durch $\mu r^n$ gegeben ist. Ist $\theta$ der Winkel, den der Radiusvector $r$ mit der $x$-Axe macht,

so haben wir hier eine stationäre Bewegung, bei welcher $r' = 0$ und $\theta'$ constant ist. Es wird

$$E = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2) + \frac{\mu r^{n+1}}{n+1}.$$

Man beachte, dass $\theta$ in diesem Ausdruck nicht auftritt; daher eliminiren wir nach der Regel auch $\theta'$ mittelst des Integrals $r^2\theta' = h$, worin $h$ die in § 99, *u* genannte Constante ist. Man hat dann

$$E = \frac{1}{2}r'^2 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} + \frac{\mu r^{n+1}}{n+1}.$$

Setzt man die übrigen accentuirten Buchstaben gleich Null, wie die Regel vorschreibt, so ist bei stationärer Bewegung

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{h^2}{r^3} + \mu r^n = 0$$

und, da

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = \frac{3h^2}{r^4} + \mu n r^{n-1} = \mu(n+3)r^{n-1}$$

ist, so wird diese stationäre Bewegung stabil oder unstabil, je nachdem $n + 3$ positiv oder negativ ist, für alle Störungen, welche die Winkelbewegungsgrösse des Massenpunktes nicht ändern.

Beisp. 2. Ein Kreisel, dessen beide Hauptträgheitsmomente für die Spitze $O$ gleich sind, dreht sich unter dem Einfluss der Schwere um seine Spitze. Ist $OC$ die Axe des ungleichen Momentes und sind $\theta$, $\varphi$, $\psi$ die Euler'schen Winkelcoordinaten des Körpers in Bezug auf eine nach oben positiv genommene verticale Axe, so so hat man, wie in Bd. 1 in dem Kapitel über die lebendige Kraft,

$$2\,T = A(\theta'^2 + \sin^2\theta\,\psi'^2) + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2,$$
$$U = -Mgh\cos\theta + \text{Constante},$$

worin $h$ den Abstand des Schwerpunktes von $O$ und $M$ die Masse des Kreisels bezeichnet. Wir erhalten daher die beiden Integrale $\varphi' + \psi'\cos\theta = n$ und $Cn\cos\theta + A\sin^2\theta\,\psi' = m$, worin $n$ und $m$ zwei Constanten sind, von denen die erste die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels um seine Axe und die zweite die Winkelbewegungsgrösse um die Verticale angibt. Wenn man $\varphi'$ und $\psi'$ eliminirt und die Energie $E$ zu einem Minimum macht, zu zeigen, (1) dass ein Zustand stationärer Bewegung mit reellen Werthen der Constanten $m$ und $n$ durch $\theta = \alpha$ gegeben ist unter der Voraussetzung, dass $C^2n^2 - 4MghA\cos\alpha$ positiv ist. Man zeige (2) durch Prüfung des Vorzeichens von $\partial^2E/\partial\theta^2$, dass diese Bewegung stabil ist. Auf diese Art beschreibt die Axe des Kreisels einen graden Kegel mit dem halben Winkel $\alpha$ an der Spitze um die durch den Stützpunkt gehende Verticale mit der durch den Werth von $\psi'$ gegebenen Winkelgeschwindigkeit.

Beisp. 3. Ein Umdrehungskörper bewegt sich stationär so auf einer glatten horizontalen Ebene, dass die Neigung $\theta$ seiner Axe gegen die Verticale constant bleibt. Man beweise, dass die Winkelgeschwindigkeit $\mu$ seiner Axe um die Verticale durch

$$\mu^2 - \frac{Cn}{A\cos\theta}\mu - \frac{Mg}{A\sin\theta\cos\theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta} = 0$$

gegeben ist, worin $z$ die Höhe des Schwerpunktes über der horizontalen Ebene, $n$ die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um seine Axe, $C$, $A$ und $A$ die Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt und $M$ die Masse bedeutet. Man finde den kleinsten Werth von $n$, der $\mu$ reell macht, und bestimme, wann die stationäre Bewegung stabil ist.

## Beispiele von Schwingungen um stationäre Bewegungen.

§ 103. Die Schwingungen eines Systems um einen Zustand stationärer Bewegung lassen sich auf analoge Art wie die um eine Gleichgewichtslage ermitteln. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Körper mögen nach einer der beschriebenen Methoden gebildet sein. Treten Reactionen in ihnen auf, so wird es im Allgemeinen rathsam sein, sie zu eliminiren. Die in den Gleichungen zur Festlegung der Lage der Körper benutzten Coordinaten mögen $\theta$, $\varphi$, etc. sein. Die Bewegung, um welche die Schwingung zu finden ist, sei durch $\theta = f(t)$, $\varphi = F(t)$, etc. bestimmt. Wir substituiren dann $\theta = f(t) + x$, $\varphi = F(t) + y$, etc. in die Bewegungsgleichungen. Da die Quadrate von $x$, $y$, etc. vernachlässigt werden, so erhalten wir gewisse lineare Gleichungen zur Ermittlung von $x$, $y$, etc. Diese Gleichungen lassen sich übrigens selten auflösen, wenn man $t$ nicht explicite aus ihnen entfernen kann. Ist dies aber möglich, so können sie auf die gewöhnliche bekannte Art aufgelöst werden und die gesuchten Schwingungen sind damit gefunden.

In dem Folgenden wollen wir zuerst die eben beschriebene Methode an einigen interessanten Beispielen dadurch erläutern, dass wir die Gleichungen von Anfang an bilden. Alsdann wollen wir das Verfahren verallgemeinern und eine Determinantengleichung bilden, die der Lagrange'schen für Schwingungen um eine Gleichgewichtslage analog ist. Sie wird sich auf alle die Fälle anwenden lassen, die zu Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten führen.

§ 104. **Die Theorie des Watt'schen Regulators.** *Die Bewegung der Kugeln des Watt'schen Regulators für Dampfmaschinen zu finden.*

Die Art, auf welche durch Schwungkugelregulatoren die Unregelmässigkeiten im Gang einer Maschine ausgeglichen werden, ist wohl als bekannt vorauszusetzen. Aehnliche Vorrichtungen hat man auch zur Regulirung des Ganges von Uhren und in anderen Fällen benutzt, in denen es sich um die Erzielung einer gleichförmigen Bewegung handelt. Wenn die Maschine in Folge einer Vermehrung der Triebkraft oder einer Verminderung der Widerstände oder der Belastung zu schnell zu gehen anfängt, so gehen die Kugeln, deren Centrifugalkraft gestiegen ist, auseinander und schränken entweder mittelst eines Hebels die Triebkraft ein oder erhöhen die Widerstände proportional dem Winkel, um welchen sie auseinandergegangen sind. Bewegt sich dagegen die Maschine zu langsam, so fallen die Kugeln näher zusammen und es wird mehr Triebkraft zur Wirkung gebracht. Bei einer Dampfmaschine wird der Hebel an der Drosselklappe befestigt und regulirt so den Zutritt des Dampfes. Es ist klar, daſs eine vollständige Anpassung der Triebkraft an die Widerstände nicht momentan eintreten kann, sondern daſs der Regulator eine Reihe kleiner Schwingungen um einen mittleren Zustand stationärer Bewegung machen muſs. Man kann daher das Problem so fassen:

Zwei gleiche Stäbe $OA$, $OA'$, von denen jeder die Länge $l$ hat, sind mittelst eines Gelenkes bei $O$, welches freie Bewegung in der verticalen Ebene $AOA'$ gestattet, mit einer verticalen Axe verbunden. Bei $A$ und $A'$ sind zwei Kugeln, von denen jede die Masse $m$ hat, befestigt. Um die Trägheit der übrigen Theile der Vorrichtung darzustellen, wollen wir annehmen, ein horizontales Schwungrad

sei an die Axe befestigt, dessen Trägheitsmoment um die Axe $I$ ist. Befindet sich das Ganze in gleichförmiger Bewegung, so sind die Stäbe unter einem Winkel $\alpha$ gegen die Verticale geneigt und rotiren um sie mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $n$. Haben sich in Folge einer Störung der Bewegung die Stäbe bis zu einem Winkel $\theta$ mit der Verticalen geöffnet, so ist eine Kraft in Wirksamkeit getreten, deren Moment um die Axe eine Function von $(\theta - \alpha)$ ist. Wir können diese Function in Potenzen von $(\theta - \alpha)$ entwickeln und da es ausreicht, wenn wir nur die erste Potenz beibehalten, sie durch $-\beta(\theta - \alpha)$ darstellen. Man soll die Schwingungen um den Zustand stationärer Bewegung finden.

Es sei $\varphi$ der Winkel, den die Ebene $AOA'$ mit einer im Raum festliegenden Verticalebene macht. Die Gleichung der Winkelbewegungsgröfse um die Axe ist

$$\frac{d}{dt}\left\{(I + 2mk^2 \sin^2\theta)\frac{d\varphi}{dt}\right\} = -\beta(\theta - \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin $mk^2$ das Trägheitsmoment eines Stabes mit Kugel für ein durch $O$ gehendes Loth auf den Stab darstellt und wobei die Kugeln als unbegrenzt kleine schwere Massenpunkte betrachtet werden. Die lebendige Kraft des Systems ist

$$T = \frac{1}{2} I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mk^2\left\{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}$$

und das Moment der gegebenen Kräfte, die an einem Stab mit Kugel angreifen, um eine durch $O$ senkrecht zur Ebene $AOA'$ gehende horizontale Linie ist $\frac{1}{2}\,\partial U/\partial\theta = -mgh\sin\theta$, worin $h$ der Abstand des Schwerpunktes eines Stabes mit Kugel von $O$ ist. Aus der Lagrange'schen Gleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\theta'} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = \frac{\partial U}{\partial\theta}$ ergibt sich daher

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{a}\sin\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin $a$ für $k^2/h$ gesetzt wurde. Man hätte die Gleichung auch erhalten, wenn man die Beschleunigung einer der als Massenpunkte behandelten Kugeln in einer Richtung genommen hätte, die in der Ebene, in welcher $\theta$ gemessen wird, senkrecht auf dem Stab steht.

Um die stationäre Bewegung zu finden, setze man $\theta = \alpha$, $d\varphi/dt = n$; aus der zweiten Gleichung ergibt sich dann $n^2\cos\alpha = g/a$. Zur Ermittlung der Schwingungen setze man weiter $\theta = \alpha + x$, $d\varphi/dt = n + y$. Die beiden Gleichungen werden

$$\left.\begin{aligned}(I + 2mk^2\sin^2\alpha)\frac{dy}{dt} + 2mk^2 n\sin 2\alpha\frac{dx}{dt} &= -\beta x\\ \frac{d^2x}{dt^2} - n\sin 2\alpha y &= \left(n^2\cos 2\alpha - \frac{g}{a}\cos\alpha\right)x\end{aligned}\right\}.$$

Um sie aufzulösen, gebe man ihnen die Gestalt

$$\left.\begin{aligned}\left(\sin 2\alpha\delta + \frac{\beta}{2mk^2 n}\right)nx + \left(\frac{I}{2mk^2} + \sin^2\alpha\right)\delta y &= 0\\ (\delta^2 + n^2\sin^2\alpha)x - n\sin 2\alpha y &= 0\end{aligned}\right\},$$

worin das Symbol $\delta$ die Operation $d/dt$ angibt. Eliminirt man $y$ durch kreuzweise Multiplication, so wird

$$\left[\left(\frac{I}{2mk^2} + \sin^2\alpha\right)\delta^3 + n^2\sin^2\alpha\left(1 + 3\cos^2\alpha + \frac{I}{2mk^2}\right)\delta + \frac{\beta}{2mk^2}n\sin 2\alpha\right]x = 0.$$

Die reelle Wurzel dieser cubischen Gleichung ist nothwendiger Weise negativ, weil das letzte Glied positiv ist. Die beiden andern Wurzeln sind complexe Grössen, weil das Glied $\delta^2$ zwischen zwei Gliedern von gleichen Vorzeichen ver-

schwunden ist. Da ferner die Summe der drei Wurzeln Null ist, so müssen die reellen Theile der beiden complexen Wurzeln positiv sein. Die Wurzeln mögen daher $-2p$ und $p \pm q\sqrt{-1}$ sein. Es ist dann

$$x = He^{-2pt} + Ke^{pt}\sin(qt + L),$$

worin $H$, $K$, $L$ drei unbestimmte Constanten bezeichnen, die von der Natur der Anfangsstörung abhängen. Daraus folgt, dass die Schwingung unstabil ist. Die Kugeln werden der verticalen Axe mit wachsender Heftigkeit abwechselnd sich nähern und von ihr zurückweichen.

§ 105. Der Regulator hat daher den Fehler, dass er zu schnell wirkt und so eine beträchtliche Schwankung in der Geschwindigkeit der Maschine hervorruft. Wenn die Maschine zu schnell arbeitet, so stellt der Regulator zwar den Dampf ab, die Maschine aber nimmt in Folge der Trägheit ihrer Theile nicht sofort den richtigen Gang an. Daraus ergibt sich dann, dass die Kugeln, nachdem sie den Zutritt des Dampfes auf das richtige Mass beschränkt haben, doch noch fortfahren auseinanderzugehen und daher zuviel Dampf abstellen. Aehnlich geht es, wenn die Kugeln sich nähern. Dadurch wird eine beträchtliche Schwankung erzeugt. Dies ist selbstverständlich nur eine unvollständige Erklärung; dass die so erzeugte Schwingung jedoch von beträchtlicher Grösse ist, wurde in § 104 bewiesen. Wir werden im Folgenden zeigen, dass der Fehler durch Anbringung eines Widerstandes gegen die Bewegung des Regulators vemindert werden kann.

Ebenso ergibt die Beobachtung, dass bei einem Uhrwerk, dessen Bewegung durch centrifugale Kugeln geregelt wird, eine starke Neigung zu Unregelmässigkeiten vorhanden ist. Nehmen die Kugeln einmal eine noch so geringe elliptische Bewegung an, so kann der Widerstand $\beta(\theta - \alpha)$, durch den die Bewegung der Kugeln regulirt wird, das Bestreben haben, die Ellipse immer excentrischer zu machen. Um dem vorzubeugen, muss ein andrer Widerstand zur Wirkung gebracht werden. Er sollte derart sein, dass er auf die Kreisbewegung keinen Einfluss hat und nur durch die elliptische Bewegung hervorgerufen wird.

Zu diesem Zweck hat Sir G. B. Airy den folgenden Vorschlag gemacht. Man benutze die elliptische Bewegung der Kugeln dazu, eine Hülse die verticale Axe hinauf und hinab zu treiben. Die Hülse wird mit einer horizontalen kreisförmigen Platte verbunden, die sich in einem mit Wasser gefüllten verticalen Cylinder von etwas grösserem Durchmesser bewegt, und bewirkt durch ihre Schwingungen ein Auf- und Abwärtsgehen der Platte. Sie kann so einem sehr grossen Widerstand ausgesetzt werden, durch den ihre Schwingungen verringert werden, während ihr Ruheort, der von statischen oder sich nur langsam ändernden Kräften abhängt, dadurch nicht betroffen wird. *Memoirs of the Astronomical Society of London*, Bd. 20, 1851.

Die allgemeine Wirkung des Wassers besteht in der Erzeugung eines Widerstandes, der wie die Geschwindigkeit variirt, und kann daher durch das Glied $-\gamma\, d\theta/dt$ auf der rechten Seite der Gleichung (2) dargestellt werden. Wird nun aufgelöst, wie zuvor, so erhält die cubische Gleichung jetzt die Gestalt

$$\left[\left(\frac{I}{2mk^2} + \sin^2\alpha\right)(\delta^3 + \gamma\delta^2) + n\sin^2\alpha\left(1 + 3\cos^2\alpha + \frac{I}{2mk^2}\right)\delta + \frac{\beta}{2mk^2}\, n\sin 2\alpha\right]x = 0.$$

Sind die Wurzeln dieser cubischen Gleichung reell, so sind sie sämmtlich negativ und der Werth von $x$ nimmt die Form an

$$x = Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t} + Ce^{-\nu t},$$

worin $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$ die Wurzeln und $A$, $B$, $C$ drei unbestimmte Constanten bezeichnen. Ist nur eine Wurzel reell, so ist sie negativ und sind die beiden andern $p \pm q\sqrt{-1}$, so wird

$$x = He^{-rt} + Ke^{pt}\sin(qt + L),$$

worin $H$, $K$, $L$, wie zuvor, unbestimmte Constanten sind.

Soll die Bewegung stabil sein, so muss $p$ negativ ausfallen. Die analytische Bedingung[1]) dafür ist

$$\gamma\left(1 + 3\cos^2\alpha + \frac{I}{2mk^2}\right) > \frac{\beta}{2mk^2}\, 2\operatorname{cotg}\alpha.$$

Macht man $\gamma$ hinreichend gross, so kann man diese Bedingung erfüllen. Die Gleichförmigkeit der Bewegung der Stäbe um die Verticale wird dann durch eine Schwingung gestört, deren Grösse beständig abnimmt und deren Periode $2\pi/q$ ist. Sorgt man bei der Herstellung des Instrumentes dafür, dass $I$ die richtige Grösse erhält, so lässt sich die Periode manchmal so anordnen, dass sie eine möglichst wenig nachtheilige Wirkung hat. Macht man sie sehr lang, so arbeitet das Instrument glatt; kann man sie dagegen sehr kurz herstellen, so weicht es weniger von der Kreisbewegung ab.

Bei der vorstehenden Untersuchung wurde die Reibung an dem Gelenk und den sonstigen mechanischen Einrichtungen des Regulators, die beträchtlich sein kann, nicht berücksichtigt. Sie sucht in vielen Fällen die Schwingung zu reduciren und in Grenzen zu halten.

§ 106. Wenn bei einem Watt'schen Regulator eine dauernde Veränderung in dem Verhältniss zwischen der Triebkraft und den nützlichen Widerständen eintritt, so ist der Zustand gleichförmiger Bewegung, den die Maschine zuletzt annimmt, von dem verschieden, den sie vor dem Wechsel hatte. Die Stäbe $OA$, $OA'$ mögen z. B., falls die Maschine eine gegebene Anzahl Webstühle treibt, den Winkel $2\alpha$ miteinander machen und sich um die Verticale mit der Winkelgeschwindigkeit $n$ drehen. Wenn nun eine grössere Anzahl Webstühle plötzlich ausser Verbindung mit der Maschine gesetzt wird, so treten die Kugeln auseinander und die Stäbe bilden einen andern Winkel $2\alpha'$ miteinander. Ist $n'$ die Winkelgeschwindigkeit um die Verticale, so wird dann $n'^2\cos\alpha' = n^2\cos\alpha$. Der Gang der Maschine ändert sich daher; sie arbeitet schneller bei geringem als bei grösserem Widerstand. Dies ist ein grosser Fehler des Watt'schen Regulators. Die Regulirung beschränkt sich in der That auf die kleinen Schwankungen im Gang der Maschine.

Diesen Fehler kann man durch die Benutzung des Huyghens'schen parabolischen Pendels beträchtlich verringern. Bei diesem Instrument bewegen sich die Schwerpunkte $A$, $A'$ der Kugeln auf dem Bogen einer Parabel, deren Axe die Umdrehungsaxe ist. Ist $AN$ eine Ordinate der Parabel, $AG$ die Normale, so ist $NG$ constant und gleich $L$, wenn $2L$ den Parameter bezeichnet. Aus dem Kräftedreieck folgt nun, wenn man die Kugeln als Massenpunkte betrachtet und die Trägheit der Stäbe, welche sie mit der Drosselklappe verbinden, vernachlässigt, dass die Kugeln in jeder Lage auf der Parabel in Ruhe bleiben, wenn $n^2L = g$ ist, worin $n$ die Winkelgeschwindigkeit der Kugeln um die durch $O$ gehende Verticale bedeutet. Es ist ferner klar, dass die Kugeln, wenn die Winkelgeschwindigkeit eine andere als die hier gegebene ist, auf dem Bogen gleiten müssen, es sei denn, man brächte sie an den Scheitel. Wir wollen nun sehen, wie diese Aenderung des Regulators auf den Gang der Maschine wirkt. Wenn die Widerstände verringert werden, fängt die Maschine an schneller zu gehen, die Kugeln trennen sich und der Zutritt des Dampfes wird beschränkt. Gleich-

1) Die Wurzeln der cubischen Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ seien $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ und $= \gamma$; alsdann ist $-b/a = 2\alpha + \gamma$, $c/a = 2\gamma\alpha + \alpha^2 + \beta^2$, $-d/a = (\alpha^2 + \beta^2)\gamma$, woraus sich leicht ergibt $(bc - ad)/a^2 = -2\alpha\{(\alpha+\gamma)^2 + \beta^2\}$; daher haben $bc - ad$ und $\alpha$ stets entgegengesetzte Vorzeichen. Siehe auch § 300.

gewicht tritt offenbar erst dann wieder ein, wenn die Menge des zugelassenen Dampfes grade ausreicht, die Maschine in genau demselben Tempo, wie zuvor, zu bewegen.

Beisp. Wenn die Trägheit der Stäbe und Kugeln in Rechnung gezogen wird, zu zeigen, dass der Schwerpunkt einer jeden Kugel mit Stab gezwungen werden muss, eine Parabel zu beschreiben, deren Parameter von dem Radius der Kugel nicht abhängt, wenn der Regulator die Maschine veranlassen soll, stets in einem gegebenen Tempo zu gehen.

Zu erwähnen wäre noch, dass verschiedene andere Methoden ausser dem parabolischen Pendel zur Vermeidung des erwähnten Fehlers erfunden worden sind. Eine weitere Beschreibung derselben würde jedoch hier nicht am Platz sein.

§ 107. Einen Geschwindigkeitsregulator, welcher dem von Sir G. B. Airy erfundenen ähnlich ist, statt eines Pendels aber eine Feder besitzt, hat Professor J. A. Ewing in der *Nature* Bd. 23, 1881 beschrieben. Er brachte ihn an einer Uhr an, die einen selbstregistrirenden Seismographen trieb, dessen Bewegung stetig und möglichst gleichmässig sein sollte.

Einen andern Regulator erfanden die Gebrüder Siemens, der bemerkenswerth ist, da er die Benutzung des Watt'schen Regulators nicht erfordert. Eine kurze Beschreibung findet man in dem *Life of Sir William Siemens*, von William Pole, 1888; man vergleiche auch eine Abhandlung von Wood, *Institution of Civil Engineers,* 10. März 1846.

Der Leser, der sich für den Gegenstand interessirt, wird auf einen Artikel von Sir G. B. Airy, Bd. 11 der *Memoirs of the Astronomical Society*, 1840 verwiesen, in welchem vier verschiedene Constructionen untersucht werden. Ebenso kann man einen Aufsatz von Siemens in den *Phil. Trans.*, 1866 und eine kurze Skizze verschiedener Arten von Regulatoren von Prof. Maxwell in dem *Phil. Mag.*, 1868 zu Rath ziehen. Ein Bericht über einige von Ellery mit dem Huyghens'schen parabolischen Pendel angestellte Versuche befindet sich in den *Astronomical Notices* für December, 1875. Man vergleiche Grashof, *Theoretische Maschinenlehre,* Bd. 2, S. 325 u. ff.; ferner: Bour, *Cours de Mécanique et machines* und *Cours professé par* Poncelet *à l'École de Metz.* Auf neuere Literatur gehen wir nicht ein.

§ 108. **Die Laplace'schen drei Massenpunkte.** *In Bd. 1, Kap. VI wurde gezeigt, dass drei Massenpunkte, welche in die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks gebracht und in geeigneter Weise fortgeschleudert werden, sich unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Anziehungen so bewegen, dass sie immer in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks bleiben. Sie sollen die Laplace'schen drei Massenpunkte genannt werden. Unsere Aufgabe ist jetzt, zu bestimmen, ob ihre Bewegung stabil oder unstabil ist.*

Wir wollen mit der Annahme beginnen, die drei Massenpunkte blieben immer nahezu in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Wir haben dann zu bestimmen, ob die Perioden ihrer Schwingungen um diese Ecken reell oder imaginär sind. Zu diesem Zweck könnten wir ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt als festen Coordinatenanfang wählen. Die Dreiecke aber, welche durch die Verbindung der Massenpunkte mit ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt gebildet werden, sind durchaus nicht leicht zu behandeln. Es ist daher vorzuziehen, statt die Bewegung auf den Schwerpunkt zu beziehen, einen der Massenpunkte in Ruhe zu versetzen und die relative Bewegung der beiden andern zu betrachten. Wir haben so nur ein Dreieck zu untersuchen, welches überdies nahezu gleichseitig ist.

Die Masse $M$ des Punktes, welcher in Ruhe versetzt werden soll, werde als Einheit genommen und $m$, $m'$ seien die Massen der beiden andern. $r$, $r'$, $R$ seien die Abstände zwischen den Massenpunkten $Mm$, $Mm'$, $mm'$, und $\varphi'$, $\varphi$, $\psi$ die den Abständen gegenüberliegenden Winkel. $\theta$, $\theta'$ seien die Winkel, die $r$, $r'$ mit

einer im Raum festliegenden Geraden machen; die Bewegungsgleichungen sind dann, wenn die Anziehung der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenz des Abstandes umgekehrt proportional ist,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1+m}{r^\varkappa} + \frac{m' \cos\psi}{r'^\varkappa} + \frac{m' \cos\varphi}{R^\varkappa} = 0 \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{m' \sin\psi}{r'^\varkappa} - \frac{m' \sin\varphi}{R^\varkappa} = 0 \end{aligned}\right\},$$

und zwei ähnliche für die Bewegung von $m'$.

Wir wollen nun $r = a + x$, $r' = a + x + X$ setzen und den Winkel zwischen diesen Radienvectoren mit $\frac{1}{3}\pi + Y$ bezeichnen, ferner sei $\theta = nt + y$, worin $x$, $y$, $X$, $Y$ sämmtlich kleine Grössen sind, deren Quadrate man vernachlässigen kann. Man beachte, dass eine Variation von $x$, $y$ allein, während $X$ und $Y$ Null sind, die Variation einer stationären Bewegung darstellt, bei welcher sich die Massenpunkte stets in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks halten, während eine Variation von $X$, $Y$ eine Abweichung von der gleichseitigen Gestalt bedeutet. Die erstere ist daher nach der Voraussetzung eine mögliche Bewegung; den Gleichungen lässt sich mithin durch irgend welche Werthe von $x$, $y$ in Verbindung mit $X = 0$, $Y = 0$ genügen. Bei einer solchen Wahl der Variablen hat man die Aussicht, einige Wurzeln der Fundamentaldeterminante noch vor ihrer Entwicklung aufzufinden und sich auf diese Art eine complicirte Rechnung zu ersparen. Setzt man $\delta$ statt $d/dt$ und $b = a^{\varkappa+1}$, so werden die vier Gleichungen jetzt

$$\{b\delta^2 - (\varkappa+1)(1+m+m')\}x - 2abn\delta y - \tfrac{3}{4}m'(\varkappa+1)X - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,m'(\varkappa+1)aY = 0,$$

$$2bn\delta x + ab\delta^2 y - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,m'(\varkappa+1)X + \tfrac{3}{4}m'(\varkappa+1)aY = 0,$$

$$\{b\delta^2 - (\varkappa+1)(1+m+m')\}x - 2abn\delta y + \left\{b\delta^2 - (\varkappa+1)\left(1+\tfrac{1}{4}m+m'\right)\right\}X -$$
$$- \left\{2an\delta + \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,m(\varkappa+1)\,a\right\}Y = 0,$$

$$2bn\delta x + \alpha b\delta^2 y + \left\{2bn\delta - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,(\varkappa+1)\,m\right\}X +$$
$$+ \left\{ab\delta^2 - \tfrac{3}{4}m(\varkappa+1)a\right\}Y = 0.$$

§ 109. Um sie aufzulösen, setzen wir $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$, $X = Ge^{\lambda t}$, $Y = He^{\lambda t}$. Substituirt man und eliminirt die Verhältnisse von $A$, $B$, $G$ und $H$, so erhält man eine Determinantengleichung, deren Elemente die Coefficienten von $x$, $y$, $X$, $Y$ sind, wenn man $\lambda$ für $\delta$ setzt. Aus dieser Gleichung ergeben sich acht Werthe von $\lambda$. Man sieht sofort, dass $\lambda$ ein Factor ist. Dies war zu erwarten, weil wir wissen, dass eine Variation von $y$, wenn $x$ sowohl als $X$ und $Y$ Null sind, eine mögliche Bewegung ist. Eine Variation von $x$ und $y$ mit $X = 0$ und $Y = 0$ ist ebenfalls eine mögliche Bewegung; man findet daher einen zweiten Factor der Determinante durch Prüfung der beiden ersten Verticalreihen und erhält, wenn man von der ersten $2n$-mal die zweite Verticalreihe abzieht,

$$b\lambda^2 - (\varkappa - 3)(1 + m + m') = 0.$$

Um die übrigen Factoren zu ermitteln, dividire man die Determinante durch die bereits gefundenen Factoren. Subtrahirt man dann die erste Horizontalreihe von der dritten und die zweite von der vierten, so hat man drei Nullen in der

ersten und zwei in der zweiten Verticalreihe. Die Entwicklung ist dann leicht. Man sieht, dass ein weiterer Factor $\lambda$ existirt und dass ferner

$$b^2\lambda^4 + b\lambda^2(3 - \varkappa)(1 + m + m') + \frac{3}{4}(1 + \varkappa)^2(m + m' + mm') = 0$$

ist.

Die beiden Wurzeln, die Null sind, geben $x = A_1 + A_2 t$ und ähnliche Ausdrücke für $y$, $X$ und $Y$. Durch Substitution in die Bewegungsgleichungen ergibt sich aber: $x = A_1$, $y = B_1 - \frac{1}{2}(\varkappa + 1)A_1 nt/a$, $X = 0$, $Y = 0$. Diese Wurzeln zeigen daher lediglich eine dauernde Aenderung in der Grösse des Dreiecks an. Prüft man die andern Werthe von $\lambda^2$, so erkennt man: (1) Die Bewegung kann nur dann stabil sein, wenn $\varkappa$ kleiner als 3 ist. (2) Die Bewegung ist stabil, die Massen mögen sein, welche sie wollen, wenn das Kräftegesetz durch eine positive Potenz des Abstandes oder durch eine negative, die kleiner als die Einheit ist, ausgedrückt wird. Für andere Potenzen hängt die Stabilität von dem Verhältniss zwischen den Massen ab. (3) Die Bewegung ist bei einer ersten Annäherung stabil, wenn

$$\frac{(M + m + m')^2}{Mm + Mm' + mm'} > 3\left(\frac{1 + \varkappa}{3 - \varkappa}\right)^2$$

ist, worin $M$, $m$, $m'$ die Massen bezeichnen[1]). Um die Coordinaten als Functionen der Zeit auszudrücken, muss man zu den Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückkehren. Die Resultate sind etwas lang, wir wollen daher nur feststellen, dass, wenn zwei Massen, wie bei dem Sonnensystem, viel kleiner als die dritte sind, die Ungleichheiten ihrer Winkelabstände, von dem grossen Körper aus gesehen, viel grössere Coefficienten haben, als die Ungleichheiten in ihren linearen Abständen von demselben Körper.

Eine ausführlichere Besprechung dieses Problems findet der Leser in einem Aufsatz des Verfassers in Bd. 6 der *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1875. Die Coordinaten $x, y, X, Y$ werden darin als Functionen der Zeit ausgedrückt und die Möglichkeit, dass irgend ein kleines Glied wichtig werden kann, wird kurz behandelt.

## Die Theorie der Schwingungen um stationäre Bewegungen.

§ 110. Nachdem wir durch zwei wichtige Beispiele die Art erläutert haben, wie man praktisch die Schwingungen um einen Bewegungszustand findet, gehen wir zu der allgemeinen Theorie des Gegenstandes über.

§ 111. **Die Determinantengleichung der stationären Bewegung.** *Die allgemeinen Schwingungsgleichungen eines dynamischen Systems um einen Zustand stationärer Bewegung zu finden.*

Das System werde auf beliebige Coordinaten $\theta$, $\varphi$, $\psi$, etc. bezogen.

---

1) In einer kurzen Anmerkung in Jullien's Problemen Bd. 2, S. 29 wird erwähnt, diesen Gegenstand habe Gascheau in einer *Thèse de Mécanique* erörtert und dabei angenommen, die Massenpunkte zögen sich nach dem Newton'schen Gesetz an. Er wäre zu dem Resultat gekommen, dass die Bewegung stabil sei, wenn das Quadrat der Summe der Massen grösser ist, als 27 mal die Summe der Producte der Massen zu je zweien.

Wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten, so lässt sich die lebendige Kraft $T$ durch den Ausdruck

$$2T = P_{11}\theta'^2 + 2P_{12}\theta'\varphi' + P_{22}\varphi'^2 + \text{etc.}$$

darstellen, worin $P_{11}$, $P_{12}$, etc. bekannte Functionen der Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. sind. Die Kräftefunction sei $U$. Der Bewegungszustand, um den das System schwingt, werde durch $\theta = f(t)$, $\varphi = F(t)$, etc. bestimmt. Um diese Schwingungen darzustellen, setze man $\theta = f(t) + x$, $\varphi = F(t) + y$, etc. Die Lagrange'sche Function $L = T + U$ sei in Potenzen von $x$, $y$, etc., wie folgt, entwickelt

$$L = L_0 + A_1x' + A_2y' + \text{etc.} + C_1x + C_2y + \text{etc.} +$$
$$+ \frac{1}{2}(A_{11}x'^2 + 2A_{12}x'y' + \text{etc.}) + \frac{1}{2}(C_{11}x^2 + 2C_{12}\,xy + \text{etc.}) +$$
$$+ G_{11}xx' + G_{12}xy' + G_{21}yx' + \text{etc.}$$

Später wird $E_{12} = G_{12} - G_{21}$, $E_{13} = G_{13} - G_{31}$ und so fort gesetzt werden.

Wir definiren jetzt *die stationäre Bewegung*[1]) als eine solche, bei welcher alle Coefficienten in dieser Entwicklung von der Zeit unabhängig sind. Physikalisch charakterisirt sich eine solche Bewegung dadurch, dass sich aus der gleichen Störung immer dieselben Schwingungen ergeben, wenn sie auf geeignete Coordinaten bezogen werden, in welchem Augenblick man diese Störung der Bewegung auch vornehmen mag. Sind die Coefficienten für die gewählten Coordinaten nicht constant, so kann man sie vielleicht durch eine Transformation der Coordinaten constant machen. Es gibt offenbar viele Coordinatensysteme, unter denen man die Auswahl hat, im Allgemeinen lässt sich *ein* System schon bei einer einfachen Prüfung der stationären Bewegung ermitteln. Kommen Grössen vor, die während der stationären Bewegung constant bleiben, wie die, welche in § 98, $\xi$, $\eta$, etc. genannt wurden, so wähle man sie zu einem Theil der Coordinaten; andre findet man, wenn man beachtet, welche Grössen nur als Differentialquotienten oder Geschwindigkeiten auftreten, wie die in demselben Paragraphen mit $x$, $y$, etc. bezeichneten. Bieten sich solche nicht von selbst dar, so erhält man sie manchmal durch Combination der vorhandenen. Praktisch ist diese Methode zur Ermittlung der richtigen Coordinaten am meisten zu empfehlen.

Um die Bewegungsgleichungen zu erhalten, hat man jetzt den Werth von $L$ in die Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{dx'} - \frac{\partial L}{dx} = 0, \text{ etc.} = 0$$

zu substituiren und die Quadrate der kleinen Grössen zu vernachlässigen. Da die stationäre Bewegung durch $x = 0$, $y = 0$, etc. gegeben ist, so muss jede dieser Gleichungen erfüllt sein, wenn die Glieder, die $x$, $y$, etc.

1) So übersetzen wir das Englische: „*steady motion*“.

enthalten, weggelassen werden. Auf diese Art erhält man die Gleichungen der stationären Bewegung, nämlich

$$C_1 = 0, \ C_2 = 0, \ \text{etc.} = 0,$$

die nach dem Taylor'schen Theorem dieselben sind, wie die Gleichungen (1) der stationären Bewegung in § 98.

Lässt man diese Glieder weg und behält die ersten Potenzen aller kleinen Grössen bei, so bekommt man die Gleichungen kleiner Schwingungen und findet bei Bezeichnung der Differentiationen nach $t$ mit dem Buchstaben $\delta$

$$\begin{aligned}
&(A_{11}\delta^2 - C_{11})x + (A_{12}\delta^2 - E_{12}\delta - C_{12})y + (A_{13}\delta^2 - E_{13}\delta - C_{13})z + \text{etc.} = 0.\\
&(A_{12}\delta^2 + E_{12}\delta - C_{12})x + (A_{22}\delta^2 - C_{22})y + (A_{23}\delta^2 - E_{23}\delta - C_{23})z + \text{etc.} = 0.\\
&\qquad \text{etc.} \ + \qquad\qquad \text{etc.} \ + \qquad\qquad \text{etc.} = 0.
\end{aligned}$$

§ 112. Um die Gleichungen aufzulösen, setzen wir $x = Le^{\lambda t}$, $y = Me^{\lambda t}$, etc. Substituirt man und eliminirt die Verhältnisse von $L$, $M$, etc., so erhält man die folgende Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix}
A_{11}\lambda^2 - C_{11}, & A_{12}\lambda^2 - E_{12}\lambda - C_{12}, & A_{13}\lambda^2 - E_{13}\lambda - C_{13}, \text{etc.}\\
A_{12}\lambda^2 + E_{12}\lambda - C_{12}, & A_{22}\lambda^2 - C_{22}, & A_{23}\lambda^2 - E_{23}\lambda - C_{23}, \text{etc.}\\
A_{13}\lambda^2 + E_{13}\lambda - C_{13}, & A_{23}\lambda^2 - E_{23}\lambda - C_{23}, & A_{33}\lambda^2 - C_{33}, \text{etc.}\\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man in dieser Gleichung $-\lambda$ statt $\lambda$ schreibt, so sind die Horizontalreihen der neuen Determinante dieselben wie die Verticalreihen der alten, die Determinante bleibt daher unverändert. Daraus folgt, dass *die Determinantengleichung, wenn sie entwickelt wird, nur grade Potenzen von $\lambda$ enthält.*

Man beachte weiter, dass, wenn man die Glieder, welche den Buchstaben $E$ enthalten, aus der Determinante entfernt, die übrig bleibende Determinante dieselbe ist, wie die, welche die Schwingung um eine Gleichgewichtslage angibt, § 58. Daher kann man behaupten, dass die Glieder, welche von $E$ abhängen, den Centrifugalkräften der stationären Bewegung entsprechen.

§ 113. **Die Bedingungen der Stabilität.** Betrachtet man die vorstehende Gleichung als eine Gleichung zur Ermittlung von $\lambda^2$, so lässt sich jede Coordinate $x$, $y$, etc., wenn sämmtliche Wurzeln reell und negativ sind, durch eine Reihe trigonometrischer Glieder darstellen, deren Perioden verschieden sind; die Bewegung ist daher stabil. Ist dagegen irgend eine Wurzel imaginär oder reell und zugleich positiv, so befinden sich sowohl positive als negative reelle Exponentialgrössen in den Ausdrücken für $x$, $y$, etc. Die Bewegung wird also unstabil. *Dynamische Stabilität besteht daher nur unter der Bedingung, dass alle Wurzeln dieser Gleichung die Form $\lambda = \pm \mu\sqrt{-1}$ haben, worin $\mu$ eine reelle Grösse bedeutet.*

§ 114. **Die Anzahl der Schwingungen.** Es ergibt sich ferner, dass, wenn ein System, auf welches Kräfte einwirken, die ein Potential haben, um einen stabilen Zustand stationärer Bewegung schwingt, die Schwingungen der Coordinaten durch trigonometrische Glieder von der Gestalt $A \sin(\lambda t + \alpha)$ dargestellt werden, welche nicht von reellen Exponentialfactoren begleitet sind, wie sie z. B. in dem Problem des Regulators auftraten.

Man erkennt auch, dass im Allgemeinen ebensoviel endliche Werthe von $\lambda^2$ und daher auch trigonometrische Glieder mit verschiedenen Perioden vorhanden sind, als Coordinaten. Es kommt oft vor, wie in § 111 erklärt wurde, dass einige Coordinaten in dem Ausdruck für $L$ fehlen und nur ihre Differentialquotienten auftreten. So fehle z. B. $\theta$; alsdann wird $C_{11}$ sowohl wie $C_{12}$, etc. Null und man kann $\lambda$ durch Division aus der ersten horizontalen und verticalen Reihe der Grunddeterminante entfernen. Man hat daher zwei Werthe von $\lambda$, die Null sind, während zugleich die Anzahl der endlichen Werthe von $\lambda^2$ um die Einheit vermindert wird. *Die Anzahl trigonometrischer Glieder von verschiedenen Perioden kann mithin die Anzahl der Coordinaten, die explicite in der Lagrange'schen Function auftreten, nicht überschreiten.* Im Beispiel 2, § 102 z. B. ist in der Function $T + U$ nur die Coordinate $\theta$ explicite enthalten, während ausserdem nur die Differentialquotienten $\varphi'$ und $\psi'$ erscheinen. Wenn folglich ein Kreisel aus dem Zustand stationärer Bewegung gestört wird, so gibt es nur eine Periode in seiner Schwingung.

§ 115. Die Verhältnisse zwischen den Coefficienten $L$, $M$, etc. in den Exponentialwerthen von $x$, $y$, etc. erhält man ohne Schwierigkeit, wenn man beachtet, dass die verschiedenen Zeilen der Fundamentaldeterminante in Wirklichkeit die Bewegungsgleichungen sind. Man nehme jede Zeile, multiplicire das erste Element mit $L$, das zweite mit $M$, etc. und setze die Summe gleich Null. Auf diese Art erhalten wir, wenn $n$ die Anzahl der Coordinaten ist, $n - 1$ unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der Verhältnisse $L : M :$ etc.; für jeden Werth von $\lambda$ bleibt daher eine unbestimmte Constante. Im Ganzen haben wir also genau wie im Lagrange'schen Gleichgewichtsfalle, Kap. 2, doppelt so viele willkürliche Constanten wie Coordinaten, da alle übrigen durch diese Gleichungen bestimmt werden. Die willkürlichen Constanten findet man mit Hülfe der Anfangswerthe der Coordinaten und ihrer Differentialquotienten.

Eine Abweichung von dem Lagrange'schen Problem besteht aber darin, dass die Grösse $\lambda$ in der ersten Potenz auftritt und die so ermittelten Verhältnisse von $L$, $M$, etc. daher imaginär sein können. Wenn $-p_1^2$, $-p_2^2$ die Werthe von $\lambda^2$ bezeichnen, so können mithin die Ausdrücke für die Coordinaten, nachdem man sie rational gemacht hat, die Form annehmen

$$x = A_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(p_2 t + \alpha_2) + \cdots$$
$$y = B_1 \sin(p_1 t + \beta_1) + B_2 \sin(p_2 t + \beta_2) + \cdots$$
$$z = \text{etc.},$$

worin $\alpha_1$ zwar mit $\beta_1$ verbunden ist, aber nicht nothwendiger Weise gleich $\beta_1$ oder $\alpha_2$ gleich $\beta_2$, etc. sein muss.

§ 116. **Hauptschwingungen.** Wenn die Anfangsbedingungen derart sind, dass jede Coordinate durch ein trigonometrisches Glied von derselben Periode ausgedrückt wird, so sagt man, das System vollführe eine *Haupt-* oder *harmonische Schwingung.* So entspricht jedes trigonometrische Glied einer Hauptschwingung und jede Schwingung des Systems ist daher, wie man sagt, aus ihren Hauptschwingungen *zusammengesetzt. Physikalisch wird eine Hauptschwingung dadurch charakterisirt, dass die Bewegung eines jeden Theiles des Systems sich in einem constanten Intervall wiederholt.* Ist der Typus der Hauptschwingung $\lambda^2 = -p_1^2$, so ist, wie man sieht, während der Bewegung $x'' = -p_1^2 x$, $y'' = -p_1^2 y$, etc.

§ 117. Beisp. Eine homogene Kugel, deren Masse die Einheit und deren Radius $a$ ist, wird an einem festen Punkt mittelst eines Fadens von der Länge $b$ aufgehängt und um den verticalen Durchmesser in Rotation gesetzt. Die Kugel wird aus diesem Zustand stationärer Bewegung leicht gestört; $bx$, $by$ und $b$ seien die Coordinaten des Punktes der Oberfläche, an welchem der Faden befestigt ist; $bx + a\xi$, $by + a\eta$, $b + a$ die Coordinaten des Centrums für den festen Punkt als Coordinatenanfang und eine verticale nach unten positive $z$-Axe. Ferner sei $\chi = \varphi + \psi$, worin $\varphi$ und $\psi$ die ihnen gewöhnlich in den Euler'schen geometrischen Gleichungen gegebene Bedeutung haben, siehe Bd. 1, Kap. 5. Vor der Störung ist also $\chi' = n$. Man beweise, dass die Lagrange'sche Function lautet:

$$L = \frac{a^2}{5}\left\{\left(\chi' - \frac{\xi\eta'}{2} + \frac{\xi'\eta}{2}\right)^2 + \xi'^2 + \eta'^2\right\} + \frac{1}{2}(a\xi' + bx')^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}(a\eta' + by')^2 - g\left\{b\,\frac{x^2+y^2}{2} + a\,\frac{\xi^2+\eta^2}{2}\right\}.$$

Wenn die Bewegung des Schwerpunktes durch eine Reihe von Gliedern von der Form $M\cos(pt + \alpha)$ dargestellt wird, zu beweisen, dass die Werthe von $p$ durch

$$\left(p^2 - \frac{g}{b}\right)\left(p^2 - np - \frac{5g}{2a}\right) = \frac{5g}{2b}\,p^2$$

gegeben sind. Man zeige, dass diese Gleichung für jedes Vorzeichen von $n$ zwei positive und zwei negative Wurzeln hat, welche durch die Wurzeln eines jeden der beiden Factoren auf der linken Seite getrennt werden.

§ 118. **Momentankräfte.** Wenn man einen Stoss als den Grenzfall einer Kraft ansieht, die sehr kurze Zeit wirkt, so lassen sich aus § 111 die Bewegungsgleichungen eines Systems ableiten, das sich in stationärer Bewegung befindet und plötzlich durch einen Stoss gestört wird. Integrirt man die Bewegungsgleichungen in § 111 in Bezug auf die Zeit innerhalb der Grenzen des Stosses, so sind die Integrale aller Glieder mit Ausnahme derjenigen, welche die Form $A\delta^2 x$ haben, Null. Dies folgt aus der Definition einer Momentankraft in Bd. 1, Kap. 2 oder

auch aus dem Verfahren, welches in Bd. 1, Kap. 8 angewandt wurde, um die Lagrange'schen Gleichungen den Stosskräften anzupassen.

Die Bewegungsgleichungen für Momentankräfte sind daher

$$\begin{aligned} A_{11}(\delta x_1 - \delta x_0) + A_{12}(\delta y_1 - \delta y_0) + \cdots &= X, \\ A_{12}(\delta x_1 - \delta x_0) + A_{22}(\delta y_1 - \delta y_0) + \cdots &= Y, \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned}$$

Hier sind $\delta x_1 - \delta x_0$, etc. die Aenderungen, die in der Geschwindigkeit der Coordinaten durch die Stösse hervorgerufen werden. Die Grössen $X$, $Y$, etc. sind die Integrale der störenden Kräfte und daher das Mass der Stösse. Versteht man unter $U$ die Kräftefunction der Stosskräfte, wie in Bd. 1, Kap. 8 erklärt wurde, so ist $X = \partial U/\partial x$, $Y = \partial U/\partial y$, etc.

§ 119. **Analyse der Wurzeln der Determinantengleichung.** Wenn die Determinantengleichung in § 112 nicht sehr complicirt ist, so kann man sie nach Potenzen von $\lambda$ entwickeln. Man kommt so zu einer Gleichung mit nur graden Potenzen von $\lambda$. *Am wichtigsten ist die Entscheidung der Frage, wie viele reelle negative Werthe von $\lambda^2$ der Gleichung genügen.* Dazu kann man das Sturm'sche Theorem benutzen. Da die Gleichung nur abwechselnde Potenzen von $\lambda$ enthält, so lässt sich das abgekürzte Verfahren anwenden, das später in dem Kapitel über die Stabilitätsbedingungen zur Ermittlung der successiven Reste angegeben wird.

Sollte sich dies jedoch nicht empfehlen, so kann man von einem der folgenden Sätze Gebrauch machen.

§ 120. Vorerst wollen wir zeigen, dass *der quadratische Ausdruck*

$$2A = A_{11}x'^2 + 2A_{12}x'y' + A_{22}y'^2 + \text{etc.}$$

*eine definite positive Function ist.* Zu diesem Zweck beachten wir, dass die Coefficienten $A_{11}$, etc. aus den Coefficienten $P_{11}$, etc. der lebendigen Kraft hervorgehen, wenn man für die unabhängigen Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. ihre Werthe bei der stationären Bewegung setzt. Könnte $2A$ für irgend welche Werthe von $x'$, $y'$, etc. Null oder negativ werden, so liesse sich das System in den durch $\theta = f(t)$, $\varphi = F(t)$, etc. definirten Bewegungszustand bringen und man könnte den Geschwindigkeiten $\theta'$, $\varphi'$, etc. diese Werthe von $x'$, $y'$, etc. geben. $2T$ würde dann negativ sein; da aber die lebendige Kraft ihrem Wesen nach positiv ist, so kann dies nicht möglich sein.

Die Determinante einer gegebenen quadratischen definiten positiven Function ist bekanntlich (§ 60) positiv. Daraus folgt unmittelbar, dass jede Determinante, welche gebildet wird, nachdem eine der Variablen $x'$, $y'$, etc. gleich Null gesetzt wurde, ebenfalls positiv sein muss.

§ 121. *Satz I.* Der Fall tritt häufig ein, dass nur zwei unabhängige Coordinaten vorhanden sind und die Determinante sich damit auf zwei Zeilen reducirt. Setzt man

$$D = A_{11}A_{22} - A_{12}^2,\quad D' = C_{11}C_{22} - C_{12}^2,\quad D'' = A_{11}C_{22} + A_{22}C_{11} - 2A_{12}C_{12},$$

so reducirt sich die Determinantengleichung, wenn sie entwickelt wird, auf $D\lambda^4 + (-\theta + E_{12}^2)\lambda^2 + D' = 0$. Die Bedingungen für die Stabilität sind daher: (1) $D'$ muss positiv und (2) $E_{12}^2 - D''$ muss positiv und grösser als $2\sqrt{DD'}$ sein. Siehe § 113.

§ 122. *Satz II.* Die Anzahl der Coordinaten mag sein, welche sie will, die stationäre Bewegung kann jedenfalls nur dann stabil sein, wenn alle Werthe von $\lambda^2$, welche die Determinantengleichung liefert, reell und negativ sind. Der Coefficient

der höchsten Potenz von $\lambda^2$ (§ 120) ist positiv; folglich ist auch das von $\lambda^2$ unabhängige Glied positiv. Daraus schliessen wir, *dass die stationäre Bewegung nur dann stabil sein kann, wenn die Determinante des quadratischen Ausdrucks*

$$2C = -C_{11}x^2 - 2C_{12}xy - C_{22}y^2 - \ldots$$

*positiv ist.*

§ 123. *Satz III.* Es möge $n$ Coordinaten geben und $\Delta$ die Determinante in § 112 sein. Beginnt man mit dieser Determinante, so lässt sich eine Reihe von Determinanten bilden, von denen jede aus der vorhergehenden durch Weglassen der ersten Horizontal- und ersten Verticalreihe hervorgeht. Wir wollen sie mit $\Delta_1$, $\Delta_2$, etc. bezeichnen. Die Determinante $\Delta$ wird nicht geändert, wenn man sie mit einer Verticalreihe von Nullen rechts und mit einer horizontalen Reihe von Nullen unten rändert, vorausgesetzt, dass man die Einheit in die Ecke setzt. Man kann daher $\Delta_n = 1$ annehmen. Wir erhalten so eine Reihe von Determinantenfunctionen von $\lambda^2$, die der früher in § 58 in Verbindung mit der Lagrange'schen Determinante benutzten analog ist.

Wir wollen nun in diese Determinantenreihe einen *negativen* Werth von $\lambda^2$ einsetzen und die Anzahl der Zeichenwechsel zählen. Wenn, bei dem Uebergang des $\lambda^2$ von $\lambda^2 = -\alpha$ zu $\lambda^2 = -\beta$, $\varkappa$ Zeichenwechsel verloren gehen, *so ist die Anzahl reeller Wurzel zwischen* $-\alpha$ *und* $-\beta$ *entweder genau gleich* $\varkappa$ *oder übersteigt* $\varkappa$ *um eine grade Zahl.*

Um es zu beweisen, seien $I_{11}$, $I_{12}$, etc. die Minoren der verschiedenen Elemente der Determinante $\Delta$. Wir bemerken, dass sich $I_{12}$ durch Aenderung des Vorzeichens von $\lambda$ in $I_{21}$ verwandelt. Wenn daher $I_{12} = \varphi(\lambda^2) + \lambda\psi(\lambda^2)$ ist, so hat man $I_{21} = \varphi(\lambda^2) - \lambda\psi(\lambda^2)$. Das Product $I_{12}I_{21}$ ist daher für alle *negativen* Werthe von $\lambda^2$ nothwendiger Weise *positiv*. Es folgt daraus auch, dass, wenn $I_{12}$ für einen negativen Werth von $\lambda^2$ verschwindet, auch $I_{21}$ für denselben Werth von $\lambda^2$ Null wird.

Beginnt man mit der Gleichung $\Delta\Delta_2 = I_{11}I_{22} - I_{12}I_{21}$, so ist der weitere Verlauf des Beweises dem Beweis des entsprechenden Satzes für die Lagrange-sche Determinante (§ 58) so sehr ähnlich, dass es wohl nicht nöthig ist, ihn hier durchzuführen. Wir gehen daher gleich zu den folgenden Anwendungen über.

§ 124. *Satz IV.* Die Coefficienten der höchsten Potenzen von $\lambda^2$ in der Determinantenreihe $\Delta$, $\Delta_1$, etc. sind die Determinanten der Function zweiten Grades $A$ (§ 120) und daher nothwendiger Weise positiv. Die Vorzeichen der Determinantenreihe sind daher für $\lambda^2 = -\infty$ abwechselnd positiv und negativ. Sind ferner alle Determinanten der Function zweiten Grades $2C = -C_{11}x^2 - 2C_{12}xy - C_{22}y^2 -$ etc. positiv, so sind die Vorzeichen der Determinantenreihe für $\lambda^2 = 0$ sämmtlich positiv. Daher ist die volle Anzahl von Zeichenwechseln, nämlich $n$, bei dem Uebergang von $\lambda^2 = -\infty$ zu $\lambda^2 = 0$ verloren worden. Aus dem eben bewiesenen Satz ergibt sich mithin unmittelbar, dass, *wenn die Function zweiten Grades C eine definite positive Function ist, alle Wurzeln der Determinantengleichung reell und negativ sind.*

Man kann statt dessen auch sagen: *Wenn die Function zweiten Grades C für alle Verrückungen aus der stationären Bewegung ein Minimum wird, so ist die stationäre Bewegung stabil.*

§ 125. Wenn dieser Fall eintritt, *so sind die sämmtlichen Wurzeln jeder Determinante der Reihe* $\Delta$, $\Delta_1$, *etc. reell und negativ und die Wurzeln einer jeden trennen die der vorhergehenden Determinante.*

Dies folgt aus der Art, wie der Beweis bei der Discussion der Lagrange'schen Determinante geführt wurde.

§ 126. *Satz V.* **Gleiche Wurzeln.** Die Existenz gleicher Wurzeln zeigt in der Regel an, dass sich Glieder in der Auflösung befinden, die $t$ als Factor enthalten; in einem späteren Kapitel wird aber gezeigt werden, dass dies nicht der Fall ist, wenn die Unterdeterminanten von $\Delta$ ebenfalls Null sind.

Man nehme, wie in dem vorigen Satz, an, die volle Anzahl von Zeichenwechseln sei bei dem Uebergang von $\lambda^2 = -\infty$ zu $\lambda^2 = 0$ verloren worden. Es lässt sich dann, wie in dem entsprechenden Satz bei der Lagrange'schen Determinante, zeigen, dass, *wenn die Grunddeterminante $r$ gleiche Wurzeln hat, jeder erste Minor $r - 1$ Wurzeln besitzt, die jeder von ihnen gleich sind, jeder zweite $r - 2$, die jeder der vorigen gleich sind und so fort.*

Daraus schliessen wir, dass die Existenz gleicher Wurzeln lediglich auf eine entsprechende Unbestimmtheit der Coefficienten *der* Hauptschwingung hinweist, welche sich aus diesen gleichen Wurzeln ergibt.

So haben wir, in § 115, $n - 1$ unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der Verhältnisse der Coefficienten $L$, $M$, etc. einer Exponentialgrösse. Sind aber $r$ gleiche Wurzeln vorhanden, so haben wir nur $n - r$ unabhängige Gleichungen, und $r$ Coefficienten bleiben unabhängig.

§ 127. *Satz VI.* Entfernt man die Glieder, welche die Centrifugalkräfte enthalten, so hat die übrigbleibende Determinante dieselbe Form wie die Lagrange'sche. Wir haben so zwei Determinantengleichungen, von denen jede für ihren besonderen Zweck als eine Gleichung zur Ermittlung von $\lambda^2$ angesehen werden kann. Aus einer jeden lässt sich eine Reihe von Determinanten auf die in § 58 angegebene Art ableiten. Zählt man die Anzahl von Zeichenwechseln für $\lambda^2 = -\infty$ und $\lambda^2 = 0$, so muss offenbar jede der beiden Reihen denselben Verlust aufweisen. Daraus folgt, dass die Gleichung mit den Centrifugalkräften mindestens eben soviele negative Wurzeln haben muss, als die entsprechende Lagrange'sche; hat sie aber mehr, so muss der Ueberschuss eine grade Zahl sein. Sind daher alle Wurzeln der entsprechenden Lagrange'schen Determinanten negativ, so sind auch alle Wurzeln der Gleichung mit den Centrifugalkräften reell und negativ. Die Wirkung der Centrifugalkräfte besteht daher im Allgemeinen darin, dass sie die Stabilität vergrössern.

Das Wesentliche dieses Abschnittes findet man theils in einer Abhandlung des Verfassers, die durch die *London Mathematical Society*, 1875 veröffentlicht wurde, theils in des Verfassers *Essay on the Stability of Motion*, 1877.

§ 128. **Der Bildpunkt.** Hat ein dynamisches System nicht mehr als drei Coordinaten, so lässt sich seine Schwingung geometrisch darstellen. Diese unabhängigen Coordinaten seien $x$, $y$, $z$. Betrachten wir sie als die Cartesischen Coordinaten eines Punktes $P$, so führt offenbar die Aufeinanderfolge der verschiedenen Lagen, welche der Punkt $P$ einnimmt, dem Auge die Bewegung des Systems vor. Der Punkt kann *der Bildpunkt* genannt werden. Wie wichtig er ist, geht auch aus dem Gebrauch hervor, der schon früher in § 80 von ihm gemacht wurde.

§ 129. **Schwingung um die Gleichgewichtslage.** Vorerst nehmen wir an, das System schwinge um eine Gleichgewichtslage und vollführe eine Hauptschwingung. Während der Bewegung stehen dann die Coordinaten $x$, $y$, $z$ in constantem Verhältniss zu einander (§ 53). Die Bahn des Bildpunktes ist folglich eine durch den Coordinatenanfang gehende Gerade. Wird die Schwingung durch den Typus $\sin(pt + \alpha)$ definirt, so hat man ferner (nach § 55) $x'' = -p^2x$, $y'' = p^2y$, etc. *Der Bildpunkt schwingt daher in einer Geraden mit einer Beschleunigung, die nach dem Coordinatenanfang gerichtet ist und dem Abstand von ihm proportional ist.*

§ 130. Um die Lage dieser Geraden zu finden, sei die lebendige Kraft $T$ und die Kräftefunction $U$ durch

$$\left.\begin{aligned} 2T &= A_{11}x'^2 + 2A_{12}x'y' + \text{etc.} \\ 2(U - U_0) &= C_{11}x^2 + 2C_{12}xy + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

gegeben. Nach den Lagrange'schen Gleichungen erhält man, da $x'' = -p^2x$, etc. ist,

$$\left.\begin{aligned} -p^2(A_{11}x + A_{12}y + \text{etc.}) &= C_{11}x + C_{12}y + \text{etc.} \\ -p^2(A_{12}x + A_{22}y + \text{etc.}) &= C_{12}x + C_{22}y + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2).$$

Indem wir die Accente in $T$ und das constante Glied $U_0$ weglassen, wollen wir setzen

$$\left.\begin{aligned} 2A &= A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + \text{etc.} \\ -2C &= C_{11}x^2 + 2C_{12}xy + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Wir construiren ferner die beiden Flächen zweiten Grades $A = \alpha$, $C = \gamma$, worin $\alpha$ und $\gamma$ beliebige Constante sind. Das Centrum dieser Flächen liegt im Coordinatenanfang und beiden ist ein System conjugirter Durchmesser gemeinschaftlich, das man auf folgende Art finden kann. Es seien $x$, $y$, $z$ die Cartesischen Coordinaten eines Punktes, der auf einem der drei conjugirten Durchmesser liegt. Da nun die Diametralebenen, die diesem Durchmesser conjugirt sind, in den beiden Flächen zweiten Grades einander parallel sind, so haben wir

$$\mu\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \mu\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial y}, \quad \mu\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial z}.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit denen unter (2), so ergibt sich, dass *der Bildpunkt $P$, wenn das System eine Hauptschwingung ausführt, in einem der gemeinschaftlichen conjugirten Durchmesser der Flächen zweiten Grades schwingt.*

§ 131. Nach dem Euler'schen Theorem über homogene Functionen ist $\mu A = C$. Wendet man dieselbe Schlussweise auf die Gleichungen (2) an, so erhält man $p^2A = C$; daher ist $\mu = p^2$. Der Durchmesser, auf welchem sich der Bildpunkt bewegt, möge die Flächen zweiten Grades $A = \alpha$ und $C = \gamma$ in den Punkten $D$ und $D'$ treffen und $O$ der Coordinatenanfang sein. Bringt man nun $P$ nach $D$, so ist $A = \alpha$ und $C = (OD/OD')^2\gamma$, da $C$ eine homogene Function ist.

Daraus folgt $p^2 = (OD/OD')^2\gamma/\alpha$. *Der Werth von $2\pi/p$ gibt die Schwingungsperiode an, welche einem gemeinschaftlichen conjugirten Durchmesser $ODD'$ entspricht.*

§ 132. Die Fläche zweiten Grades $C = \gamma$ besitzt die Eigenschaft, dass, wenn $x$, $y$, $z$ die Coordinaten eines Punktes $P$ auf ihrer Oberfläche in Bezug auf beliebige Axen sind, die durch eine solche Verrückung aus der Gleichgewichtslage verrichtete Arbeit constant und gleich $-\gamma$ ist.

§ 133. Als Beispiel zu dieser geometrischen Analogie wollen wir das folgende Problem betrachten. *Ein starrer Körper, der sich frei um einen festen Punkt $O$ bewegen kann, steht unter der Wirkung beliebiger Kräfte und macht kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage; man finde die Hauptschwingungen.*

$OA$, $OB$, $OC$ seien die Lagen der Hauptaxen in der Gleichgewichtslage; $OA'$, $OB'$, $OC'$ ihre Lage zur Zeit $t$. Die Lage des Körpers werde durch die Winkel (1) zwischen den Ebenen $AOC$, $AOC'$, (2) den Ebenen $BOC$, $BOC'$ und (3) den Ebenen $COA$, $COA'$ definirt. Sie mögen bez. $\theta$, $\varphi$, $\psi$ heissen. $\theta$, $\varphi$, $\psi$ sind alsdann Winkelverrückungen des Körpers um $OA$, $OB$, $OC$. Nimmt man sie bei der geometrischen Analogie zu Coordinatenaxen, so stellt eine kleine Verschiebung von $P$ von dem Coordinatenanfang nach dem Punkt $x = \theta$, $y = \varphi$, $z = \psi$

eine Drehung des Körpers um die von $P$ beschriebene Gerade dar, deren Grösse durch den von $P$ durchlaufenen Abstand gemessen wird.

Sind $I_1$, $I_2$, $I_3$ die Hauptträgheitsmomente für $O$, so ist die lebendige Kraft des Körpers offenbar durch

$$2T = I_1\theta'^2 + I_2\varphi'^2 + I_3\psi'^2$$

gegeben. Setzt man, wie zuvor, $x$, $y$, $z$ für $\theta'$, $\varphi'$, $\psi'$, so ist die Fläche zweiten Grades $T = \alpha$ oder $A = \alpha$ augenscheinlich das Trägheitsellipsoid für den festen Punkt.

Die Arbeit der Kräfte bei dem Uebergang der Coordinaten von Null zu $\theta$, $\varphi$, $\psi$ oder $x$, $y$, $z$ möge durch

$$2U = C_{11}x^2 + 2C_{12}xy + \text{etc.}$$

gegeben sein. Alsdann ist der Analogie zufolge die Arbeit bei der Bewegung von $P$ auf einem Radiusvector $OD'$ der Fläche zweiten Grades $M = -\gamma$ oder $C = \gamma$ gleich $-(OP/OD')^2\gamma$. Diese Fläche zweiten Grades besitzt daher die Eigenschaft, dass die Arbeit der Kräfte bei der Drehung des Körpers durch einen gegebenen Winkel um einen beliebigen Radiusvector dem reciproken Quadrat dieses Radiusvectors proportional ist. Soll das Gleichgewicht stabil sein, so muss die Arbeit, welche bei einer Rotation um einen beliebigen Durchmesser verrichtet wird, negativ, die Fläche zweiten Grades also ein Ellipsoid sein.

Aus dem allgemeinen Satz ergibt sich jetzt, *dass der Körper eine Hauptschwingung ausführt, wenn er um einen der drei conjugirten Durchmesser des Trägheitsellipsoids schwingt und dieses Ellipsoid $U = -\gamma$ ist und dass der Körper fortfährt zu schwingen, als ob dieser Durchmesser im Raum festläge.*

Die Fläche zweiten Grades $U$ hat man das *Potentialellipsoid* genannt. Der Name rührt von Prof. Ball her, der zu dem eben bewiesenen Satz durch eine andere Schlussweise kam. Siehe seine *Theory of Screws*, Art. 126.

§ 134. **Schwingungen um die stationäre Bewegung.** Zur Bestimmung der Bewegung des Bildpunktes müssen wir auf die Bewegungsgleichungen in § 111 zurückgreifen. Da dasselbe Verfahren wie in § 131 eingehalten werden muss, so brauchen wir nur das Resultat festzustellen. Haben die Symbole $A$ und $C$ dieselbe Bedeutung, wie zuvor, so wird die Bahn des Bildpunktes durch die Gleichungen gegeben:

$$Ap^2 - C = \beta,$$

$$[(A_{11}E_{23} - A_{12}E_{13} + A_{13}E_{12})x + \text{etc.}]p^2 + [(C_{11}E_{23} - C_{12}E_{13} + C_{13}E_{12})x + \text{etc.}] = 0.$$

Die Bahn des Bildpunktes ist daher der ebene Schnitt einer Fläche zweiten Grades. Daraus schliessen wir, *dass der Bildpunkt, wenn das System eine Hauptschwingung um einen Zustand stationärer Bewegung ausführt, eine Ellipse beschreibt. Die Ellipse wird mit einer Beschleunigung beschrieben, die nach dem Centrum gerichtet und dem Abstand von ihm proportional ist. Die Zeitperiode ist der Definition zufolge bei der Ellipse dieselbe, wie die, in welcher das System seine Hauptschwingung ausführt.*

§ 135. Beisp. 1. Man zeige, dass die drei Ebenen dieser harmonischen Ellipsen *derselben Geraden* conjugirte Diametralebenen in Bezug auf die drei Flächen zweiten Grades sind, die durch $Ap^2 - C = \beta$ dargestellt werden, worin $p^2$ einen der drei durch die Bewegungsdeterminante gegebenen Werthe hat. Die Richtungscosinusse dieser Geraden sind $E_{23}$, $-E_{13}$, $E_{12}$ proportional; man kann sie die Axe der centrifugalen Kräfte nennen.

Beisp. 2. Wenn

$$x = A\sin pt + A'\cos pt, \quad y = B\sin pt + B'\cos pt, \quad z = C\sin pt + C'\cos pt$$

die Coordinaten eines in Bewegung befindlichen Punktes sind, durch directe Elimination von $t$ zu beweisen, dass seine Bahn der ebene Schnitt einer Fläche zweiten Grades ist.

§ 136. Die Benutzung des Bildpunktes zur Veranschaulichung der Bewegung des Systems könnte vielleicht etwas gesucht erscheinen, wenn es nicht einen noch näheren Zusammenhang zwischen dem Punkt und der Bewegung gäbe. Nimmt man nämlich an, das System schwinge um eine Gleichgewichtslage und vertauscht die Coordinaten $x$, $y$, $z$ mit andern $\xi$, $\eta$, $\zeta$, so dass

$$A_{11}x'^2 + 2A_{12}x'y' + \text{etc.} = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

wird, so nehmen die Bewegungsgleichungen eine einfache Form an und werden solche für einen einzelnen Punkt, dessen Masse die Einheit ist und an dem Kräfte mit einer bekannten Kräftefunction $U$ angreifen. Wählt man daher die Coordinaten auf die richtige Art aus, *so lassen sich gewisse Bewegungsarten vollständig dadurch ermitteln, dass man das System durch seinen materiellen Bildpunkt ersetzt.* Bei andern Bewegungsarten müssen dem Massenpunkt Zwangsbedingungen auferlegt werden, wenn er die Bewegung darstellen soll. Der einzelne Massenpunkt, den Fresnel in seiner Theorie der doppelten Strahlenbrechung benutzt, ist in Wirklichkeit der materielle Bildpunkt; man muss ihn imaginären Zwangsbedingungen unterwerfen, damit seine Bewegung die des Mittels darstelle.

Ausführlicher wird die Theorie des Bildpunktes in der schon erwähnten *Stability of motion* behandelt.

---

Kapitel IV.

# Die Bewegung der Körper, an denen keine Kräfte angreifen.

## Die Integration der Euler'schen Gleichungen.

§ 137. *Die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt zu bestimmen, wenn keine äusseren Kräfte vorhanden sind.*

Die Euler'schen Gleichungen sind

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{d} - (B-C)\,\omega_2\omega_3 &= 0 \\ B\frac{d\omega_2}{dt} - (C-A)\,\omega_3\omega_1 &= 0 \\ C\frac{d\omega_3}{dt} - (A-B)\,\omega_1\omega_2 &= 0 \end{aligned}\right\};$$

multiplicirt man sie mit $\omega_1$, $\omega_2$ bez. $\omega_3$, addirt und integrirt, so erhält man

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin $T$ eine willkürliche Constante bezeichnet.

Multiplicirt man die Gleichungen ferner mit $A\omega_1$, $B\omega_2$ bez. $C\omega_3$, so wird ähnlich

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = G^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

unter $G$ eine beliebige Constante verstanden.

Um ein drittes Integral zu erhalten, sei

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

daher
$$\omega_1\frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3\frac{d\omega_3}{dt} = \omega\frac{d\omega}{dt};$$

multiplicirt man die ursprünglichen Gleichungen mit $\omega_1/A$, $\omega_2/B$, $\omega_3/C$ und addirt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega\frac{d\omega}{dt} &= \left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right)\omega_1\omega_2\omega_3 \quad . \quad . \quad . \quad (4) \\ &= -\frac{(B-C)(C-A)(A-B)}{ABC}\,\omega_1\omega_2\omega_3 . \end{aligned}$$

Löst man aber die Gleichungen (1), (2), (3) auf, so findet man

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{BC}{(A-C)(A-B)}\cdot(-\lambda_1+\omega^2)\\ \omega_2^2 &= \frac{CA}{(B-A)(B-C)}\cdot(-\lambda_2+\omega^2)\\ \omega_3^2 &= \frac{AB}{(C-B)(C-A)}\cdot(-\lambda_3+\omega^2)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

worin $\lambda_1 = \frac{T(B+C)-G^2}{BC}$ ist und ähnliche Ausdrücke für $\lambda_2$ und $\lambda_3$ gelten. Substituirt man in Gleichung (4), so wird

$$\omega\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{(\lambda_1-\omega^2)(\lambda_2-\omega^2)(\lambda_3-\omega^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Die Integration der Gleichung (6)[1]) kann man auf ein elliptisches Integral zurückführen. In zwei Fällen lässt sie sich in endlichen Gliedern ausführen, nämlich wenn $A = B$ und wenn $C^2 = TB$ ist, worin $B$ weder die grösste noch die kleinste der drei Grössen $A$, $B$, $C$ ist. Weiter unten werden beide Fälle discutirt werden.

§ 138. Im Allgemeinen wird angenommen werden, dass $A$, $B$, $C$ der Grösse nach aufeinander folgen, so dass $A$ grösser als $B$ und $B$ grösser als $C$ ist. Die Axe von $B$ sei also die Axe des mittleren Momentes. Durch Elimination von $\omega_1$ aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man die Gleichung

$$AT - G^2 = B(A-B)\,\omega_2^2 + C(A-C)\,\omega_3^2,$$

welche ihrem Wesen nach positiv ist. Auf gleiche Weise lässt sich zeigen, dass $CT - G^2$ negativ ist. Die Grösse $G^2/T$ kann daher irgend einen zwischen dem grössten und kleinsten Trägheitsmoment liegenden Werth haben.

Die drei Grössen $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ in § 137 sind sämmtlich positiv; denn daraus, dass $B + C - A$ positiv und $G^2/T < A$ ist, folgt, dass $\lambda_1$ positiv sein muss. Jeder der Zähler von $\lambda_2$ und $\lambda_3$ ist grösser als der von $\lambda_1$ und daher positiv; die Nenner sind auch positiv; folglich ist sowohl $\lambda_2$ als $\lambda_3$ positiv. Ferner hat man

$$ABC(\lambda_1 - \lambda_2) = (TC - G^2)(A - B)$$

und ähnliche Ausdrücke für $\lambda_2 - \lambda_3$ und $\lambda_3 - \lambda_1$. Daraus ergibt sich leicht, dass von den drei Grössen $\lambda$, $\lambda_2$ am grössten und entweder $\lambda_1$ oder $\lambda_3$ am kleinsten ist, je nachdem $g^2/T$ grösser oder kleiner als $B$ ist.

Aus den Gleichungen (5) folgt, dass $\omega^2$ während der Bewegung zwischen $\lambda_2$ und dem grösseren der Werthe von $\lambda_1$ und $\lambda_3$ liegen muss.

§ 139. **Die Kirchhoff'sche Lösung.** Die Auflösung durch elliptische Integrale hat Kirchhoff in der folgenden Art ausgeführt. Setzt man

---

1) Euler's Integration der Gleichungen wird von Prof. Cayley in Bd. 9 des *Quaterly Journal*, S. 361 gegeben. Die Kirchhoff'schen und Jacobi'schen Integrationen mittelst elliptischer Functionen gibt in verbesserter Form Prof. Greenhill in Bd. 14, S. 182 und 265, 1876. Die Kirchhoff'sche Integration findet man in seinen „*Vorlesungen über mathematische Physik*", Leipzig 1876, S. 63 u. ff., die Jacobi'sche in dem *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), Bd. 39, S. 283 u. ff.

$$\varDelta(\varphi) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}, \qquad F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

so heisst $k$ der Modulus von $F$ und muss kleiner als die Einheit sein, wenn $F$ für alle Werthe von $\varphi$ reell sein soll. Die obere Grenze $\varphi$ wird die Amplitude des elliptischen Integrals $F$ genannt und gewöhnlich „am $F$“ geschrieben. Dem entsprechend schreibt man sin am $F$, cos am $F$ und $\varDelta$ am $F$ für $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ und $\varDelta(\varphi)$.

Durch Differentiation erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\cos\varphi}{dF} &= -\sin\varphi\frac{d\varphi}{dF} = -\sin\varphi\,\varDelta(\varphi)\\ \frac{d\sin\varphi}{dF} &= \cos\varphi\frac{d\varphi}{dF} = \cos\varphi\,\varDelta(\varphi)\\ \frac{d\varDelta(\varphi)}{dF} &= -\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\varDelta(\varphi)}\frac{d\varphi}{dF} = -k^2\sin\varphi\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (1).$$

Diese Gleichungen lassen sich mit den Euler'schen dadurch identisch machen, dass man setzt:

$$F = \lambda(t-\tau) \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} \omega_1 &= a\,\varDelta \text{ am } \lambda(t-\tau)\\ \omega_2 &= b\sin\text{am } \lambda(t-\tau)\\ \omega_3 &= c\cos\text{am } \lambda(t-\tau) \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2),$$

$$\frac{A-B}{C} = -\frac{c\lambda}{ab}, \quad \frac{A-C}{B} = -\frac{b\lambda}{ca}, \quad \frac{B-C}{A} = -k^2\frac{a\lambda}{bc} \quad \cdot\cdot \quad (3).$$

Wir haben hier sechs neue Constanten eingeführt, nämlich $a$, $b$, $c$, $\lambda$, $k$ und $\tau$. Mit ihnen kann man den drei letzten Gleichungen und ebenso beliebigen Anfangswerthen von $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ genügen. Ist die Auflösung reell, so ist sie auch vollständig.

Wird $t = \tau$, so erhält man aus (2), $\omega_1 = a$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = c$. Daher nach § 137

$$Aa^2 + Cc^2 = T, \quad A^2a^2 + C^2c^2 = G^2,$$

folglich

$$a^2 = \frac{G^2 - CT}{A(A-C)}, \quad c^2 = \frac{AT - G^2}{C(A-C)}.$$

Dividirt man die zweite der Gl. (3) durch die erste, so wird

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{A-C}{A-B}\frac{C}{B}, \quad \text{also } b^2 = \frac{AT-G^2}{B(A-B)},$$

und durch Multiplication der ersten der Gl. (3) mit der zweiten

$$\lambda^2 = \frac{(A-B)(G^2-CT)}{ABC}.$$

Die rechten Seiten von (3) verhalten sich wie $c^2 : b^2 : k^2a^2$ und diese Verhältnisse sind eben gefunden worden. Wählt man daher die Vorzeichen von $a$, $b$, $c$, $\lambda$ so, dass sie einer der drei Gleichungen genügen, so führen auch die Vorzeichen der andern zu keinen Widersprüchen.

Durch Division der letzten der Gl. (3) durch eine der beiden andern erhält man

$$k^2 = \frac{B-C}{A-B}\frac{AT-G^2}{G^2-CT}, \quad \text{daher } 1-k^2 = \frac{A-C}{A-B}\frac{G^2-BT}{G^2-CT}.$$

Wenn $G^2 > BT$ ist und $A$, $B$, $C$ der Grösse nach absteigend geordnet sind, so sind die Werthe von $a^2$, $b^2$, $c^2$ und $\lambda^2$ sämmtlich positiv. Auch $k^2$ ist positiv und kleiner als die Einheit. Die Auflösung ist daher reell und vollständig.

Ist dagegen $G^2 < BT$, so muss man annehmen, $A$, $B$, $C$ seien der Grösse nach in aufsteigender Reihenfolge, um eine reelle Lösung zu erhalten. Poinsot sagt, wie wir gleich hier anführen wollen und wie etwas weiter unten erklärt werden wird, der Ausdruck für $\omega_1$ in dieser Lösung sei als die Winkelgeschwindigkeit um *die* Hauptaxe anzusehen, welche von der Polodie eingeschlossen wird.

Ist $G^2 = BT$, so wird $k^2 = 1$ und

$$F = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}, \qquad \text{also } \sin \operatorname{am} F = \frac{e^F - e^{-F}}{e^F + e^{-F}}.$$

Substituirt man in die Gleichungen (2), so werden die elliptischen Functionen Exponentialgrössen.

Ist $B = C$, so hat man $k^2 = 0$ und $F = \varphi$, daher $\operatorname{am} F = F$. Substituirt man wieder in die Gleichungen (2), so werden die elliptischen Functionen trigonometrische.

Die geometrische Bedeutung dieser Auflösung wird etwas weiter unten erklärt werden.

## Die Poinsot'sche und Mac Cullagh'sche Construction für die Bewegung.

§ 140. Die Fundamentalgleichungen für die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt sind

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = G^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wir haben sie bereits aus den Euler'schen Gleichungen durch Integration abgeleitet, sie folgen aber auch leicht aus den Principien der Flächen und der lebendigen Kraft.

Der Körper möge durch ein Momentanpaar in Bewegung gesetzt werden, dessen Moment $G$ ist. Aus Bd. 1, Kap. 6 wissen wir dann, dass während der ganzen nun folgenden Bewegung das Moment der Bewegungsgrösse um jede im Raum festliegende Gerade, welche durch den festen Punkt $O$ geht, constant und dem Moment des Paares $G$ um diese Linie gleich ist. Nach § 10 sind nun die Momente der Bewegungsgrösse um die Hauptaxen in irgend einem Augenblick $A\omega_1$, $B\omega_2$, $C\omega_3$. Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Richtungswinkel der Normalen auf der Ebene des Paares $G$ in Bezug auf diese Hauptaxen als Coordinatenaxen, so ist

$$\left.\begin{aligned} A\omega_1 &= G\cos\alpha \\ B\omega_2 &= G\cos\beta \\ C\omega_3 &= G\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Durch Addition der Quadrate erhält man Gleichung (1).

Während der nun folgenden Bewegung ist die ganze Bewegungsgrösse des Körpers dem Paar $G$ äquivalent. Es ist daher klar, dass, wenn in irgend einem Augenblick auf den Körper ein Momentanpaar wirkte, das dem Paar $G$ gleich und entgegengesetzt ist, der Körper zur Ruhe gebracht würde.

§ 141. Aus der Definition in Bd. 1, Kap. 6 ergibt sich, dass die Ebene dieses Paares die invariable Ebene und das Loth auf ihr die invariable Linie ist. Diese Linie liegt im Raum absolut fest und die Gleichungen (3) liefern die Richtungscosinusse dieser Linie in Bezug auf Axen, die sich im Körper bewegen.

Aus diesen Gleichungen erhellt auch, dass, wenn der Körper um eine Axe in Rotation gesetzt wird, deren Richtungscosinusse $(l, m, n)$ in Bezug auf die Hauptaxen für den festen Punkt sind, die Richtungscosinusse der invariablen Linie $Al$, $Bm$, $Cn$ proportional sein müssen. Sind die Bezugsaxen nicht die Hauptaxen des Körpers für den festen Punkt, so sind die Richtungscosinusse der invariablen Linie nach § 10 $Al - Fm - En$, $Bm - Dn - Fl$ und $Cn - El - Dm$ proportional, worin $A$, $F$, etc. die Trägheits- und Deviationsmomente bezeichnen[1]).

§ 142. Da an dem Körper keine gegebenen Kräfte angreifen, so bleibt die lebendige Kraft bekanntlich während der Bewegung constant. Es ist daher

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = T,$$

worin $T$[2]) eine Constante bedeutet, die durch die Anfangswerthe von $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ zu bestimmen ist.

Die Gleichungen (1), (2), (3) reichen wohl hin, die Bahn zu bestimmen, die ein jeder Massenpunkt des Körpers im Raum beschreibt, nicht aber die Lage zu einer gegebenen Zeit.

§ 143. **Die Poinsot'sche Construction.** *Die Poinsot'sche Darstellung der Bewegung mittelst des Trägheitsellipsoids zu erklären.*

---

1) Dass die Gerade, deren Gleichungen in Bezug auf die beweglichen Hauptaxen $x/A\omega_1 = y/B\omega_2 = z/C\omega_3$ sind, im Raum absolut festliegt, lässt sich auch anders beweisen, wenn man annimmt, die Gleichung (1) im Texte gelte. Sind $x, y, z$ die Coordinaten eines Punktes $P$ der Geraden in dem gegebenen Abstand $r$ vom Coordinatenanfang, so ist jeder der gleichen Ausdrücke in der Gleichung für die Gerade gleich $r/G$ und daher constant. Die Componente der absoluten Geschwindigkeit von $P$ im Raum parallel zu der Momentanlage der $x$-Axe ist $= \frac{dx}{dt} - y\omega_3 + z\omega_2 = \frac{r}{G}\left\{A\frac{d\omega_1}{dt} - (B-C)\omega_2\omega_3\right\}$. Dies ist aber nach der Euler'schen Gleichung Null. Ebenso lässt sich beweisen, dass die Componenten der Geschwindigkeit verschwinden, die den andern Axen parallel sind.

2) Man beachte, dass in diesem Kapitel $T$ die *doppelte* lebendige Kraft des Körpers bezeichnet. Bei der Behandlung der Lagrange'schen Gleichungen in Kapitel II war es empfehlenswerther, durch $T$ die lebendige Kraft auszudrücken.

Man nehme an, das Trägheitsellipsoid für den festen Punkt sei construirt und seine Gleichung sei

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = K.\ ^{1)}$$

Es sei $r$ der Radiusvector dieses Ellipsoids, der mit der Momentanaxe zusammenfällt und $p$ das Loth von dem Mittelpunkt auf die Berührungsebene in dem Endpunkt von $r$. Ferner sei $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe.

Die Gleichungen der Momentanaxe sind $\frac{x}{\omega_1} = \frac{y}{\omega_2} = \frac{z}{\omega_3}$ und wenn $(x, y, z)$ die Coordinaten des Endpunktes der Länge $r$ sind, so ist jeder dieser Brüche gleich $r/\omega$. Substituirt man in die Gleichung des Ellipsoids, so wird

$$(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2)\frac{r^2}{\omega^2} = K, \text{ daher } \frac{\omega}{r} = \sqrt{\frac{T}{K}}.$$

Die Gleichung der Berührungsebene im Punkt $(x, y, z)$ ist

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = K;$$

substituirt man wieder die Werthe von $(x, y, z)$, so erhält man als Gleichungen für das Loth aus dem Coordinatenanfang

$$\frac{\xi}{A\omega_1} = \frac{\eta}{B\omega_2} = \frac{\zeta}{C\omega_3}.$$

Dies sind aber die Gleichungen der invariablen Linie. Daher liegt das Loth im Raum fest.

Der Ausdruck für die Länge des auf die Berührungsebene im Punkt $(x, y, z)$ gefällten Lothes ist bekanntlich $\frac{1}{p^2} = \frac{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}{K^2}$. Setzt man ein, wie zuvor, so erhält man

$$\frac{1}{p^2} = \frac{A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2}{K^2} \cdot \frac{r^2}{\omega^2} = \frac{G^2}{K^2} \cdot \frac{K}{T},$$

$$\text{also } p^2 = K\frac{T}{G^2}.$$

Aus diesen Gleichungen schliessen wir:

(1) *Die Winkelgeschwindigkeit um den Radiusvector, um welchen der Körper sich dreht, variirt wie dieser Radiusvector.*

(2) *Die Componente der Winkelgeschwindigkeit um das Loth auf die Berührungsebene im Endpunkt der Momentanaxe ist constant.* Dieser Satz rührt von Lagrange her.

Denn der Cosinus des Winkels zwischen dem Loth und dem Radiusvector ist $p/r$, die Componente der Winkelgeschwindigkeit daher $= \omega p/r = T/G$, welches constant ist.

(3) *Das Loth auf die Berührungsebene in dem Endpunkt der Momentanaxe liegt der Richtung nach fest, indem es normal auf der invariablen Ebene steht, und hat constante Länge.*

---

1) Wir setzen der Kürze wegen statt $M\varepsilon^4$ in dem Folgenden überall $K$.

Die Bewegung des Trägheitsellipsoids ist daher der Art, dass es bei festliegendem Centrum stets eine feste Ebene berührt und der Berührungspunkt, der in der Momentanaxe liegt, keine Geschwindigkeit hat. *Die Bewegung lässt sich mithin dadurch darstellen, dass man annimmt, das Trägheitsellipsoid rolle auf der festen Ebene und sein Centrum läge dabei fest.*

§ 144. Beisp. 1. Wenn auf den Körper, während er sich in Bewegung befindet, ein Momentanpaar wirkt, dessen Ebene senkrecht zur invariablen Linie ist, zu zeigen, dass das Trägheitsellipsoid auf derselben Ebene, wie zuvor, zu rollen fortfährt, dass aber die Geschwindigkeit der Bewegung sich ändert.

Beisp. 2. Wenn eine Ebene durch den festen Punkt parallel zur invariablen Ebene gelegt wird, zu beweisen, dass der Flächeninhalt des durch diese Ebene erzeugten Schnittes des Trägheitsellipsoids während der Bewegung constant bleibt.

Beisp. 3. Die Summe der Quadrate der Abstände der Endpunkte der Hauptdurchmesser des Trägheitsellipsoids von der invariablen Linie ist während der Bewegung constant. Diesen Satz verdankt man Poinsot.

Beisp. 4. Ein Körper bewegt sich um einen festen Punkt $O$ und Kräfte greifen nicht an ihm an. Man zeige, dass die Fläche, deren Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = M(x^2 + y^2 + z^2)^2$$

in Bezug auf die Hauptaxen für $O$ als Coordinatenaxen ist, und die man sich im Körper construirt denken möge, während der Bewegung auf einer festen Kugel rollt.

Beisp. 5. Wenn der Körper ein dünner Stab ist, der sich frei um seinen Schwerpunkt $O$ als festen Punkt drehen kann, *so ist das Trägheitsellipsoid ein Kreiscylinder* (Bd. 1, § 22). Wenn der Stab in Rotation um eine Gerade $OI$ gesetzt wird, die nun folgende Bewegung aus der Poinsot'schen Construction abzuleiten und zu zeigen, dass der Stab im Raum eine Ebene beschreibt.

§ 145. Die vorstehenden Sätze sind unter der Annahme bewiesen worden, dass die Grössen $T$ und $G$ constant seien, sie verlieren aber ihre Bedeutung nicht vollständig, wenn an dem Körper Kräfte angreifen und $T$ sowohl als $G$ veränderlich werden. Auch dann gilt noch, dass in jedem Moment während der Bewegung die Axe des resultirenden Paares der Winkelbewegungsgrösse, d. h. die invariable Linie, ihrer Richtung nach mit dem Loth auf die Ebene zusammenfällt, welche das Trägheitsellipsoid in seinem Durchschnittspunkt mit der Momentanaxe berührt. Auch die Winkelgeschwindigkeit um die invariable Linie ist stets $T/G$, wenn auch dieses Verhältniss vielleicht nicht constant ist. In jedem Moment sind die Werthe der lebendigen Kraft und des Paares $G$ durch die Gleichungen gegeben

$$T = K\left(\frac{\omega}{r}\right)^2, \quad \frac{G^2}{T} = K\frac{1}{p^2}, \quad G = K\frac{\omega}{pr}.$$

Umgekehrt kann man die Frage aufwerfen, welche Bedingungen wohl für die gegebenen Kräfte bestehen müssen, wenn einer der Poinsot'schen Sätze während der Bewegung gelten soll. Nehmen wir an, der Körper stehe unter der Wirkung eines Paares $G$, dessen Componenten um die Axen $L$, $M$, $N$ sind.

§ 146. (1) Prüft man den Beweis in § 137, nach welchem $T$ constant ist, wenn keine Kräfte an dem Körper angreifen, so ist ersichtlich, dass

$$\frac{1}{2}\frac{dT}{dt} = L\omega_1 + M\omega_2 + N\omega_3 = Q\omega \cos QOI$$

ist, worin $QOI$ den Winkel angibt, den die Axe $OQ$ des Paares $Q$ mit der

Momentanaxe $OI$ macht. Daraus folgt unmittelbar, dass $T$ constant ist, wenn das Moment der gegebenen Kräfte um die Momentanaxe stets Null ist. Tritt dieser Fall ein, so ist $\omega$ während der Bewegung $r$ proportional.

§ 147. (2) Aus § 139 ergibt sich ferner auf dieselbe Art

$$\frac{dG}{dt}=\frac{1}{G}(LA\omega_1+MB\omega_2+NC\omega_3)=Q\cos QOL,$$

worin $QOL$ den Winkel zwischen der Axe $OQ$ des Paares und der invariablen Linie $OL$ bezeichnet. $G$ ist folglich constant, wenn die gegebenen Kräfte kein Moment um die invariable Linie haben. Kommt dies vor, so variirt $\omega$ während der Bewegung wie das Product $pr$.

§ 148. (3) Die Ebene, welche die invariable Linie $OL$ und die Momentanaxe $OI$ enthält, kann aus dem Bd. 1, Kap. V, § 260 angegebenen Grund *die Ebene der centrifugalen Kräfte* genannt werden.

Wir sehen, dass beide sowohl $T$ als $G$ constant sind, wenn die Ebene des gegebenen Paares mit der Ebene der centrifugalen Kräfte zusammenfällt. Ist dies der Fall, so variirt $\omega$ wie $r$ und $p$ ist während der Bewegung constant.

Beisp. 1. Man zeige, dass

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}=\frac{r^2}{K}\cdot\frac{Q}{\omega}\sin IOL\cdot\sin QOL\cdot\cos ILQ$$

ist, worin $ILQ$ den Winkel zwischen den Ebenen $IOL$ und $QOL$ bedeutet. Es folgt unmittelbar, dass $p$ und daher $G^2/T$ constant ist, wenn die Projection der Axe des gegebenen Paares auf die Ebene des Centrifugalpaares die invariable Linie ist.

Beisp. 2. Man zeige auch, dass, wenn die Momentanaxe nahezu eine Hauptaxe ist, die Winkelverrückung von $p$ durch das Auftreten des kleinen Factors $IOL$ nicht klein gemacht wird. Es muss auch noch einer der andern Factoren klein sein.

§ 149. **Die Polodie.** Um die Bewegung des Körpers besser zu verstehen, wollen wir annehmen, die Ebene des Paares $G$, welches ihn in Bewegung setzt, sei horizontal. Eine Berührungsebene möge an das Trägheitsellipsoid parallel zu der Ebene des Paares gelegt werden und diese Ebene liege im Raum fest. Das Ellipsoid rolle nun auf dieser festen Ebene, wobei sein Centrum festliege und es eine Winkelgeschwindigkeit habe, die wie der nach dem Berührungspunkt gezogene Radiusvector variirt, und führe den gegebenen Körper mit sich. Damit ist die Bewegung construirt, welche der Körper ausführen würde, wenn man nach der Anfangswirkung des Momentanpaares $G$ ihn sich selbst überliesse[1]). Siehe Figur 1, S. 106.

1) Prof. Sylvester hat auf eine *dynamische* Beziehung zwischen dem frei rotirenden Körper und dem *„ellipsoidal top“*, wie er das Poinsot'sche Centralellipsoid nennt, hingewiesen. Wird ein *materieller* ellipsoidischer Kreisel von gleichförmiger Dichtigkeit angefertigt, der dem Poinsot'schen Centralellipsoid ähnlich ist, und wird er mit festliegendem Centrum auf einer vollkommen rauhen horizontalen Ebene zum Rollen gebracht, so stellt er die Bewegung des frei rotirenden Körpers nicht nur im Raum, sondern auch in der Zeit dar. Man kann sich denken, der Körper und der Kreisel drehten sich beständig in jedem Zeit-

Der Berührungspunkt des Ellipsoids mit der Ebene, auf welcher es rollt, beschreibt zwei Curven, die eine auf der Oberfläche des Ellipsoids, die andre auf der Ebene. Die erste liegt im Körper fest und heisst die *Polodie*, die zweite dagegen im Raum und wird die *Herpolodie* genannt. Die Gleichungen einer jeden Polodie in Bezug auf die Hauptaxen des Körpers lassen sich finden, wenn man bedenkt, dass die Länge des Lothes auf die Berührungsebene an das Ellipsoid für jeden Punkt der Polodie constant ist. Nimmt man die in § 143 für dieses Loth gegebenen Ausdrücke, so sind die Gleichungen der Polodie offenbar

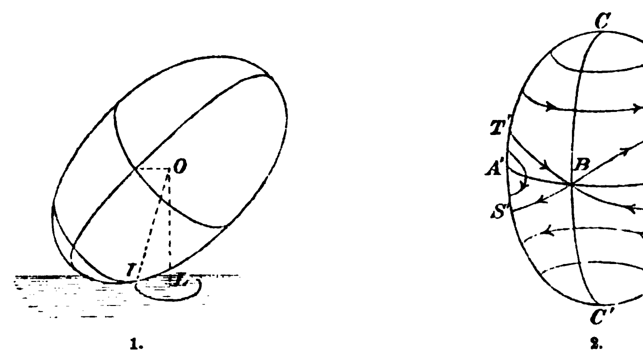
$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = K\frac{G^2}{T}$$
$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 = K$$

und durch Elimination von $y$

$$A\,(A - B)\,x^2 + C\,(C - B)\,z^2 = \left(\frac{G^2}{T} - B\right)K.$$

Ist daher $B$ die Axe des grössten oder kleinsten Trägheitsmomentes, so sind die Vorzeichen der Coefficienten von $x^2$ und $z^2$ gleich und die Projection der Polodie daher eine Ellipse. Ist $B$ aber die Axe des mittleren Trägheitsmomentes, so ist die Projection eine Hyperbel[1]).

Die Polodie ist daher eine geschlossene Curve, welche um die Axe des grössten oder kleinsten Momentes gezogen wird, und dreht ihre concave Seite entweder der Axe des grössten oder des kleinsten Momentes zu, je nachdem $G^2/T$ grösser oder kleiner als das mittlere Trägheitsmoment ist. Die Grenzlinie, welche die beiden Reihen von Polodien trennt, ist die Polodie, deren Projection auf die zur Axe des mittleren Momentes senkrechte Ebene eine Hyperbel ist, deren concave Seite weder der Axe des grössten, noch der des kleinsten Momentes zu-




gewendet ist. In diesem Fall ist $G^2 = BT$ und die Projection besteht aus zwei Geraden, welche die Gleichung haben

$$A\,(A - B)\,x^2 - C\,(B - C)\,z^2 = 0.$$

moment um dieselbe Axe mit derselben Geschwindigkeit. Man sehe den Aufsatz in den *Plihosophical Transactions,* 1866 nach.

1) Die Hyperbel ist nur stückweise reelle Projection der Polodie.

Diese Polodie besteht aus zwei Ellipsen, die durch die Axe des mittleren Momentes gehen und entspricht dem Fall, in welchem das Loth auf die Berührungsebene der mittleren Axe des Ellipsoids gleich ist. Man nennt sie *die trennende Polodie.*

Da die Projection der Polodie auf eine der Hauptebenen immer eine Ellipse ist, so muss die Polodie eine in sich zurücklaufende Curve sein.

Nimmt man an, die Hauptmomente $A$, $B$, $C$ befänden sich in abnehmender Reihenfolge und die $C$-Axe stände vertical, so gibt die Figur 2, S. 106, eine ungefähre Skizze der Hälfte der Polodien, wie sie ein Auge, das sich in dem positiven Octanten nicht weit von der $B$-Axe befindet, sehen würde. Die Bogen $ABA'$, $CBC'$, $ACA'$ stellen die Hauptschnitte und $B$ das positive Ende der mittleren Axe dar, die übrigen Bogen dagegen die beiden Reihen von Polodien, die durch die trennenden Polodien $SS'$, $TT'$ von einander geschieden werden.

Die Namen Polodie und Herpolodie rühren von Poinsot her, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, 1834 und 1852.

§ 150. Trägt man auf der Momentanaxe $OI$ als Darstellung der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um $OI$ die Länge $OP$ auf, so beschreibt der Punkt $P$ eine Curve in dem Körper und eine zweite im Raum. Diese Curven geben geometrisch (wie der Hodograph in der Dynamik der Massenpunkte) die Bahnen der Momentanaxe und die Variationen der Winkelgeschwindigkeit an. Greifen keine Kräfte an dem Körper an, so sind sie, wie aus dem Vorstehenden hervorgeht, der Poinsotschen Polodie und Herpolodie ähnlich. Da der Radiusvector $r$ die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ vorstellt, so müssen die Coordinaten $x$, $y$, $z$ ihre Componenten $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ darstellen. Man hat daher

$$\frac{\omega_1}{x} = \frac{\omega_2}{y} = \frac{\omega_3}{z} = \frac{\omega}{r} = \sqrt{\frac{T}{K}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

worin als Constante $\sqrt{\frac{T}{K}}$ gewählt worden ist, um die Construction dem Trägheitsellipsoid anzupassen.

Um die Bewegung, welche die Momentanaxe auf der Polodie ausführt, zu finden, substituire man aus Gleichung (1) in eine der Gleichungen des § 137. So erhält man z. B.

$$\frac{dx}{dt} = yz\frac{B-C}{A}\sqrt{\frac{T}{K}}, \text{ etc.}; \quad x^2 = \frac{BC}{(A-C)(A-B)}\left(-\lambda_1\frac{K}{T} + r^2\right), \text{ etc.}$$

Da $dx/dt$, $dy/dt$, $dz/dt$ nicht gleichzeitig verschwinden können, so ergibt sich aus den vorstehenden Gleichungen offenbar, dass sich die Momentanaxe stetig auf ihrer Polodie bewegt, ohne anzuhalten oder die Richtung ihrer Bewegung zu ändern. Dies folgt natürlich auch aus Fig. 1; denn, da die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe $OI$ ihr Vorzeichen nicht wechseln kann, ohne Null zu werden, was mit der Gleichung der lebendigen Kraft, § 137, (2), im Widerspruch stehen würde, so muss der Punkt $I$ sowohl seine Polodie als Herpolodie stetig beschreiben.

Weil ferner das Vorzeichen von $dz/dt$ für jede Polodie positiv oder negativ ist, je nachdem das Product $xy$ positiv oder negativ ausfällt, so bewegt sich offenbar für den in der Figur dargestellten Theil der Polodien das Ende der Momentanaxe aufwärts oder abwärts, je nachdem es sich zur Rechten oder zur Linken des Bogens $CC'$ befindet. Diese Richtungen sind durch Pfeile angegeben. Das positive Ende der Momentanaxe bewegt sich mithin in positiver Richtung

um die Axe des grössten und in negativer um die Axe des kleinsten Trägheitsmomentes.

Beisp. 1. Der Punkt $P$ bewegt sich längs einer auf einem Ellipsoid aufgetragenen Polodie; man zeige, dass die Länge des Lothes vom Punkt $P$ auf eine der Hauptebenen für das Centrum constant ist. Man zeige auch, dass das Loth auf einer Hauptebene einen Kegelschnitt beschreibt, der dem focalen Kegelschnitt in dieser Ebene ähnlich ist. Auch ist das Maass der Krümmung des Ellipsoids längs jeder Polodie constant.

Beisp. 2. Wenn die Momentanaxe eine gegebene Polodie beschreibt, so variirt die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ zwischen den aus § 188 bekannten beiden Grenzen. Wenn $\varrho$ das Verhältniss des Maximums zum Minimalwerth von $\omega$ ist, zu zeigen, dass $\varrho^2$ von der Einheit bis auf $(A+C-B)B/AC$ zunimmt, wenn die Polodie von dem Endpunkt einer der beiden Axen von $A$ oder $C$ sich bis zum Zusammenfallen mit der trennenden Polodie fortbewegt. Man zeige auch, dass dieser Maximalwerth von $\varrho^2$ kleiner als 2 ist. [Koenigs, *Bulletin de la Société Mathématique de France,* 1890.]

Mit Benutzung des Poinsot'schen Theorems kann man diese Sätze aus der Lehre von den Kegelschnitten ableiten. Die Polodie sei concav gegen $C$; wir beachten, dass die Maximal- und Minimal-Radienvectoren in den Symmetrieebenen $AC$, $BC$ liegen. Die Länge $r$ des Radiusvectors in der Ebene $AC$ geht aus $a^2c^2/p^2 = a^2 + c^2 - r^2$ hervor, worin der Werth von $p$ bekannt ist, weil die Polodie gegeben ist. Die Länge $r'$ in der Ebene $BC$ erhält man aus einer ähnlichen Formel, in der $b$ statt $a$ steht. Da $\varrho^2 = r^2/r'^2$ ist, so suchen wir den Werth von $\varrho^2 - 1$ und schliessen daraus, dass $\varrho^2$ von der Einheit bis zu seinem Maximum zunimmt, wenn $p^2$ von $c^2$ bis $b^2$ wächst. Um auch den zweiten Satz zu beweisen, setze man statt $A$, $B$, $C$ ihre Werthe $B'+C'$, $C'+A'$, $A'+B'$, siehe Bd. 1, § 4. Es ergibt sich sofort, dass der obige Werth von $\varrho^2$ kleiner als 2 ist.

Beisp. 3. Man zeige, dass die Gerade $OJ$, deren Richtungscosinusse $d\omega_1/dt$, $d\omega_2/dt$, $d\omega_3/dt$ proportional sind, in der zur invariablen Linie conjugirten Diametralebene liegt und senkrecht auf der invariablen Linie steht. Man zeige auch, dass die Summe der Quadrate dieser Grössen

$$\Omega'^4 = -\omega^4 + (2Tp_2 - G^2p_1)\,\omega^2/p_3 - \{p_2{}^2T^2 - (p_1p_2 + p_3)\,G^2T + p_2G^4\}/p_3{}^2$$

ist, worin $p_1$, $p_2$, $p_3$ die Summen der Producte der Grössen $A$, $B$, $C$ sind, wenn man eine, zwei bez. drei zusammennimmt.

Beisp. 4. Man zeige, dass die Componenten des Druckes $P$, $Q$, $R$ auf den festen Punkt $O$ in den Richtungen der Hauptaxen für $O$ durch

$$P = -\omega_1\omega_2 y\,(A-B)/C + \omega_1\omega_3 z\,(C-A)/B + \omega_1(\omega_2 y + \omega_3 z) - (\omega_2{}^2 + \omega_3{}^2)\,x$$

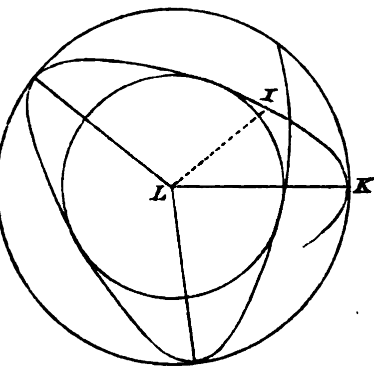
und ähnliche Ausdrücke für $Q$ und $R$ gegeben sind, worin $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des Schwerpunktes $G$ und $A$, $B$, $C$ die Hauptträgheitsmomente für $O$ bedeuten.

Daraus beweise man, dass der Druck auf $O$ zwei Kräften äquivalent ist: (1) einer Kraft $\Omega'^2 . GK$, deren Richtung senkrecht zur Ebene $OGK$ ist, wenn $GK$ das Loth von $G$ auf die in dem letzten Beispiel beschriebene Gerade $OJ$ bezeichnet und (2) einer Kraft $\omega^2 . GH$, deren Richtung $GH$ parallel läuft, wenn man unter $GH$ das Loth von $G$ auf die Momentanaxe versteht.

§ 151. **Die Herpolodie.** Da die Herpolodie durch die Berührungspunkte eines Ellipsoids entsteht, das sich um sein Centrum dreht und auf einer festen Ebene rollt, so muss sie offenbar zwischen zwei Kreisen liegen, die sie abwechselnd berührt. Der gemeinschaftliche Mittelpunkt

beider Kreise ist der Fusspunkt des Lothes von dem festen Centrum $O$ auf die feste Ebene. Um die Radien zu finden, sei $OL$ dieses Loth und $I$ der Berührungspunkt. Setzt man $LI = \varrho$, so ist nach § 143

$$\varrho^2 = r^2 - p^2 = \frac{K}{T}\left(\omega^2 - \frac{T^2}{G^2}\right).$$




Man findet daher die Radien durch Substitution der grössten und kleinsten Werthe für $\omega^2$. Nach § 138 sind aber diese Grenzen $\lambda_2$ und der grössere der beiden Werthe $\lambda_1$, $\lambda_3$.

Die Herpolodie ist im Allgemeinen keine geschlossene Curve; sie ist es nur dann, wenn der zu den beiden Punkten, in denen sie successive denselben Kreis berührt, gehörige Winkel mit $2\pi$ commensurabel ist; d. h. alsdann beschreibt der Berührungspunkt auf der festen Ebene wiederholt dieselbe Bahn.

Beisp. 1. Ein Ellipsoid, dessen Gleichung $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ ist und dessen Centrum $O$ festliegt, rollt auf Poinsot'sche Art auf einer festen Ebene; das Loth von $O$ auf die Ebene ist $p$ und $1/p^2 = \varkappa$. Man beweise, dass von den drei Grössen

$$\frac{-(\varkappa-\beta)(\varkappa-\gamma)}{\varkappa\beta\gamma}, \quad \frac{-(\varkappa-\gamma)(\varkappa-\alpha)}{\varkappa\gamma\alpha}, \quad \frac{-(\varkappa-\alpha)(\varkappa-\beta)}{\varkappa\alpha\beta}$$

eine negativ und die beiden andern positiv sind: Die mittlere ist stets positiv und dem Quadrat des Radius des grösseren der beiden die Herpolodie einschliessenden Kreise gleich. Die erste oder dritte ist positiv, je nachdem $\varkappa$ kleiner oder grösser als $\beta$ ist und kommt dem Quadrat des Radius des kleineren der einschliessenden Kreise gleich. Dabei wird, wie gewöhnlich, angenommen, dass sich $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Grösse nach in abnehmender Reihenfolge befinden. Sie sind offenbar $A$, $B$, $C$ proportional, wenn das Ellipsoid ein Trägheitsellipsoid ist.

Beisp. 2. Das Centrum $L$ der Herpolodie sei der Coordinatenanfang, das Loth von $L$ auf die Tangente an sie sei $q$ und $LI = \varrho$. Man beweise, dass

$$\frac{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{\varrho^2-q^2} = \frac{\beta\gamma(\beta-\gamma)}{\dfrac{(\varkappa-\beta)(\varkappa-\gamma)}{\varkappa\beta\gamma}+\varrho^2} + \frac{\gamma\alpha(\gamma-\alpha)}{\dfrac{(\varkappa-\gamma)(\varkappa-\alpha)}{\varkappa\gamma\alpha}+\varrho^2} + \frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{\dfrac{(\varkappa-\alpha)(\varkappa-\beta)}{\varkappa\alpha\beta}+\varrho^2}$$

ist, und dass jeder der drei Brüche auf der rechten Seite für alle Radienvectoren der Herpolodie positiv ist.

Um es zu beweisen, beachte man, dass, unter $r$, $p'$ den Radiusvector und das Loth vom Centrum des Ellipsoids auf die Tangente an die Herpolodie und unter $s$ den Bogen verstanden, nach geometrischen Sätzen $p'^2 = q^2 + 1/\varkappa$, $r^2 = \varrho^2 + 1/\varkappa$ ist. Daraus folgt $\varrho^2 - q^2 = r\,(dr/ds)^2$.

Ferner sind die Gleichungen der Polodie

$$\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 = \varkappa^2,$$
$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Löst man sie auf, so erhält man die Werthe von $x^2$, $y^2$, $z^2$ in Ausdrücken von $r^2$ und $\varkappa^2$, die mit denen in § 150 gleichwerthig sind. Differenzirt man sie, so findet man $(dx/dr)^2$, etc. und daraus $(ds/dr)^2$.

Um ferner zu beweisen, dass jeder Bruch positiv ist, beachte man, dass $\varrho^2$ nothwendiger Weise nicht kleiner als $q^2$ ist, dass daher jedes Glied auf der rechten Seite entweder offenbar positiv ist oder positiv sein muss, wenn sein Nenner sehr klein wird. Da ein Glied aber nur in diesem Fall sein Vorzeichen wechseln kann, so ist jedes Glied stets positiv.

Beisp. 3. Man beweise, dass die Herpolodie keine Inflexionspunkte hat, wenn das rollende Ellipsoid *ein Trägheitsellipsoid ist.*

Zu dem Zweck gebe man der Gleichung in Beisp. 2 die Form

$$\frac{S}{\varrho^2 - q^2} = \frac{M_1}{\pm L_1 + \varrho^2} + \frac{-M_2}{-L_2 + \varrho^2} + \frac{M_3}{\mp L_3 + \varrho^2} \quad \dots \quad (1),$$

wobei jedes Glied sein richtiges Vorzeichen hat, wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sich in abnehmender Reihenfolge befinden. An einem Inflexionspunkt ist $dq/d\varrho$ Null. Für ihn wird daher

$$\frac{S}{(\varrho^2 - q^2)^2} = \frac{M_1}{(\pm L_1 + \varrho^2)^2} + \frac{-M_2}{(-L_2 + \varrho^2)^2} + \frac{M_3}{(\mp L_3 + \varrho^2)^2} \quad \dots \quad (2).$$

Eliminirt man $\varrho^2 - q^2$, indem man (1) quadrirt und das richtige Vielfache von (2) subtrahirt, so erhält man

$$0 = \frac{M_1(M_1 - S)}{(\pm L_1 + \varrho^2)^2} + \frac{M_2(M_2 + S)}{(-L_2 + \varrho^2)^2} + \frac{M_3(M_3 - S)}{(\mp L_3 + \varrho^2)^2} + \Pi \quad \dots \quad (3),$$

worin $\Pi$ die doppelte Summe der Producte der drei Glieder in (1), immer je zwei zusammengenommen, bedeutet. Es wurde bewiesen, dass jedes dieser Glieder positiv ist, daher ist es auch $\Pi$. Nun hat man

$$M_1 - S = \alpha(\beta - \gamma)(\beta + \gamma - \alpha), \quad M_3 - S = \gamma(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - \gamma).$$

Für das Trägheitsellipsoid ist sowohl $\beta + \gamma - \alpha$ als $\alpha + \beta - \gamma$ positiv (siehe Bd. 1, § 5). Folglich ist jedes Glied in (3) positiv und ihre Summe kann nicht Null sein.

Beisp. 4. Man zeige, dass das Loth $q$ auf die Tangente an die Herpolodie und der Krümmungsradius $R$ sich durch $\varrho$ ausdrücken lassen mittelst der Gleichungen

$$-\varkappa M q^2 = \left\{\varrho^2 - \frac{(\varkappa - \alpha)(\varkappa - \beta)(\varkappa - \gamma)}{\varkappa\alpha\beta\gamma}\right\}^2,$$

$$\frac{(-M)^{\frac{3}{2}}}{R}\,\frac{\alpha\beta\gamma}{\varkappa^{\frac{1}{2}}} = \varrho^2(\alpha + \beta + \gamma - 2\varkappa) - \frac{(\varkappa - \alpha)(\varkappa - \beta)(\varkappa - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)}{\varkappa\alpha\beta\gamma},$$

worin

$$M = \varrho^4 + \varrho^2\,\frac{\varkappa^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2\varkappa(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 2\alpha\beta\gamma}{\varkappa\alpha\beta\gamma} +$$
$$+ \frac{(\varkappa - \alpha)(\varkappa - \beta)(\varkappa - \gamma)}{\varkappa^2\alpha^2\beta^2\gamma^2}\{\varkappa(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma\}.$$

Die erste ist eine algebraische Umformung der Gleichung in Beisp. 2, die zweite ergibt sich aus $R = \varrho\, d\varrho/dq$.

Beisp. 5. Wenn das rollende Ellipsoid kein Trägheitsellipsoid ist, so hat die Herpolodie einen Inflexionspunkt, wenn $\alpha > \beta + \gamma$ und $\pi$ zwischen $\beta$ und $\gamma$ liegt, wobei $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sich in abnehmender Reihenfolge befinden.

Man erhält die Inflexionspunkte, wenn man den Krümmungsradius $R$ der Herpolodie der Unendlichkeit gleichsetzt. Der so aus Beisp. 4 ermittelte Werth von $\varrho^2$ muss positiv sein und zwischen den Grenzen der einschliessenden Kreise liegen. Die Grösse $\pi$ ferner muss zwar zwischen $\alpha$ und $\gamma$ enthalten sein, kann aber entweder grösser oder kleiner als $\beta$ sein. Die erste Annahme führt, wie man leicht einsieht, zu einem Werth von $\varrho^2$, der ausserhalb der Grenzen liegt, die zweite liefert einen Werth von $\varrho^2$ innerhalb dieser Grenzen, wenn $\alpha > \beta + \gamma$ ist.

Beisp. 6. Wenn die Momentanaxe die trennende Polodie beschreibt, zu zeigen, dass sich die Gleichung der Herpolodie auf

$$\frac{c}{\varrho} = \frac{1}{2}\left(e^{c\theta\sqrt{\beta}} + e^{-c\theta\sqrt{\beta}}\right)$$

reducirt, worin $\theta$ von dem grössten Radiusvector aus gemessen wird. Man beweise auch, dass der innere Grenzkreis ein Punkt ist, und dass der Radius $c$ des äusseren sich aus $c^2\alpha\beta\gamma = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)$ ergibt. Man zeichne die Curve auf und zeige, dass sie unendlich viele Windungen um den Coordinatenanfang macht.

Beisp. 7. Wenn bei der Herpolodie im vorigen Beispiel der Ort des Endpunktes der Polarsubtangente ermittelt ist und eine andere Curve auf ähnliche Art durch diesen Ort erzeugt wird, zu beweisen, dass die so erhaltene Curve der Herpolodie ähnlich ist. [Math. Tripos, 1863.]

Poinsot hat seine Figur der Herpolodie mit einem Inflexionspunkt auf jedem Bogen zwischen den einschliessenden Kreisen gezeichnet, *Théorie Nouvelle de la Rotation des corps*, 1852. F. W. Hess hat in seiner Dissertation (München, 1880) und De Sparre in den *Comptes Rendus* Bd. 99, 101, 1895 gezeigt, dass dies nicht correct ist. Er erörtert auch das Rollen von Flächen 2ten Grades im Allgemeinen und den in Beisp. 5 enthaltenen Satz. Darboux zeigt in seinen Noten zu Despeyrous's *Cours de Mécanique*, 1886 auf eine andere Art, dass die Herpolodie eines Trägheitsellipsoids keinen Inflexionspunkt haben kann, und findet für den Krümmungsradius einen Ausdruck, welcher sich auf den in Beisp. 4 reduciren lässt. Man sehe auch Greenhill's *Applications of Elliptic functions* nach, worin der Gegenstand anders behandelt wird.

§ 152. **Mac Cullagh's Construction.** *Mac Cullagh's Darstellung der Bewegung mittelst des reciproken Trägheitsellipsoids zu erklären.*

Dieses Ellipsoid ist dem Poinsot'schen Trägheitsellipsoid in Bezug auf eine Kugel vom Radius $\varepsilon$ reciprok und die Bewegung des einen Ellipsoids kann man aus der des andern dadurch ableiten, dass man zu den in den vorstehenden Paragraphen bewiesenen Sätzen die reciproken aufstellt. Man erhält so:

(1) Die Gleichung des Ellipsoids in Bezug auf seine Hauptaxen ist

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \frac{1}{M}.$$

(2) *Das Ellipsoid bewegt sich so, dass seine Oberfläche stets durch einen im Raum festliegenden Punkt geht.* Der Punkt liegt in der invariablen Linie im Abstand $G/\sqrt{MT}$ vom festen Punkt. Aus § 138 ist bekannt, dass dieser Abstand kleiner als der grösste und grösser als der kleinste Halbmesser des Ellipsoids ist.

3) *Das Loth auf die Berührungsebene an den festen Punkt ist die Momentanaxe und die Winkelgeschwindigkeit des Körpers variirt um-*

*gekehrt, wie die Länge dieses Lothes.* Bezeichnet $p$ diese Länge, so ist $\omega = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{T}{M}}$.

4) *Die Winkelgeschwindigkeit um die invariable Linie ist constant und* $= T/G$.

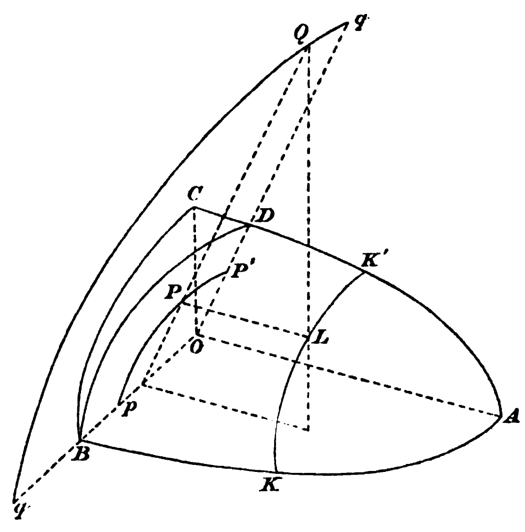
Die der Polodie entsprechende Curve ist die Bahn, welche der im Raum festliegende Punkt auf der sich bewegenden Oberfläche des Ellipsoids beschreibt. Sie ist offenbar ein sphärischer Kegelschnitt. Ihre Gleichungen sind für beliebige gegebene Anfangsbedingungen, wie man leicht findet,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{G^2}{MT}, \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \frac{1}{M}.$$

Die sphärischen Kegelschnitte sind, wie sich beweisen lässt, geschlossene Curven und umgeben die Axen des grössten und kleinsten Momentes. Nur in dem einen Fall, wenn $G^2/T = B$ ist, worin $B$ weder das grösste noch das kleinste Trägheitsmoment bedeutet, wird der sphärische Kegelschnitt zu zwei centralen Kreisschnitten des reciproken Ellipsoids.

Die Bewegung des Körpers lässt sich auf diese Art mit Hülfe eines der beiden Ellipsoide darstellen. Das Poinsot'sche Ellipsoid gleicht der allgemeinen Gestalt des Körpers mehr wie das reciproke. Es springt vor, wo der Körper vorspringt und tritt da zurück, wo auch der Körper zurücktritt. Gerade umgekehrt verhält es sich bei dem reciproken Ellipsoid. Siehe Bd. 1, § 27.

§ 153. **Mac Cullagh's geometrische Deutung.** Mac Cullagh hat das reciproke Ellipsoid benutzt, um eine geometrische Interpretation der in elliptischen Integralen ausgedrückten Auflösung der Euler'schen Gleichungen zu erhalten.




Das reciproke Ellipsoid bewege sich nämlich so, dass es stets einen im Raum festliegenden Punkt $L$ berührt. Wir wollen nun den Punkt $L$ auf eine Ebene projiciren, welche die Axe des mittleren Momentes enthält und den Winkel $\alpha$ mit der Axe des grössten Momentes macht.

Die Projection werde so ausgeführt, dass man zwei Parallelen sowohl zur Axe des grössten als der des kleinsten Momentes zieht. Man erhält so zwei Projectionen, die $P$ und $Q$ heissen mögen. Sie liegen in der Ebene $PQL$, die auf der Axe des mittleren Momentes senkrecht steht. Bei der Bewegung des Körpers um $O$ beschreibt der Punkt $L$ auf der Oberfläche des reciproken Ellipsoids einen

sphärischen Kegelschnitt $KK'$ und die Punkte $P$, $Q$ beschreiben auf der Projectionsebene $OBD$ zwei Curven $pp'$, $qq'$. Wenn der sphärische Kegelschnitt, wie in der Figur auf S. 112, den Endpunkt $A$ der Axe des grössten Momentes umschliesst, so wird die Curve im Innern des Ellipsoids durch die Projection parallel zur Axe des grössten Momentes gebildet; umgibt er dagegen die Axe des kleinsten Momentes, so wird die innere Curve durch die Projection parallel dieser Axe gebildet. Der Punkt $P$, der die innere Curve beschreibt, durchläuft offenbar ihre ganze Bahn, während der Punkt $Q$ auf der äusseren zwischen zwei Grenzen hin- und herschwingt, die man erhält, wenn man in den Punkten, in welchen die innere Curve die Axe des mittleren Momentes trifft, Tangenten an sie legt.

Da die Richtungscosinusse von $OL$ proportional zu $A\omega_1$, $B\omega_2$, $C\omega_3$ sind, so ist, wie man leicht sieht, wenn $x$, $y$, $z$ die Coordinaten von $L$ bezeichnen,

$$\frac{x}{A\omega_1} = \frac{y}{B\omega_2} = \frac{z}{C\omega_3} = \frac{r}{G} = \frac{1}{\sqrt{MT}} \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Es sei $OP = \varrho$ und $OQ = \varrho'$, und die Winkel, die diese Radienvectoren mit der Ebene bilden, welche die Axen des grössten und kleinsten Momentes enthält, seien $\varphi$ und $\varphi'$. Sie seien positiv in der Richtung von $B$ nach $D$ hin, so dass also $DOP = -\varphi$, $DOQ = -\varphi'$ ist. Man erhält dann

$$\left.\begin{aligned} -\varrho \sin\varphi &= y = B\omega_2 (MT)^{-\frac{1}{2}} \\ \varrho \cos\varphi \sin\alpha &= z = C\omega_3 (MT)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho' \cos\varphi' \cos\alpha &= x = A\omega_1 (MT)^{-\frac{1}{2}} \\ -\varrho' \sin\varphi' &= y = B\omega_2 (MT)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

In der Raumgeometrie wird bewiesen, dass die Projectionen Kreise sind, wenn die Ebene, auf welche projicirt wird, die Ebene eines Kreisschnittes des Ellipsoids ist. Man findet den Satz bestätigt, wenn man $\varrho$ oder $\varrho'$ aus den vorstehenden Gleichungen ermittelt. Unter der Annahme also, $\varrho$ und $\varrho'$ seien constant, wollen wir aus (2) und der ersten der Gleichungen (3) in die Euler'sche Gleichung

$$B\frac{d\omega_2}{dt} - (C - A)\,\omega_3\omega_1 = 0$$

substituiren. Wir haben

$$\varrho\frac{d\varphi}{dt} = \frac{A - C}{AC}\sqrt{MT}\,\varrho\varrho' \sin\alpha \cos\alpha \cos\varphi'.$$

Da $\varrho' \cos\varphi'$ die Ordinate von $Q$ ist, so geht daraus hervor, dass *die Geschwindigkeit von $P$ variirt, wie die Ordinate von $Q$, und ebenso die Geschwindigkeit von $Q$, wie die Ordinate von $P$.*

Um die Constanten $\varrho$, $\varrho'$ zu finden, beachte man, dass $\varrho$ der Werth von $y$ ist, der sich aus den Gleichungen des sphärischen Kegelschnittes für $z = 0$ ergibt. Man erhält dann

$$\varrho^2 = \frac{(AT - G^2)B}{MT(A - B)}, \qquad \varrho'^2 = \frac{(G^2 - CT)B}{MT(B - C)},$$

von denen die letzte aus der ersten Gleichung hervorgeht, wenn man die Buchstaben $A$ und $C$ vertauscht.

Daraus folgt

$$\binom{\text{Geschwindigkeit}}{\text{von } P} = \frac{\sqrt{B-C}}{\sqrt{ABC}}\sqrt{AT - G^2}\binom{\text{Ordinate}}{\text{von } Q},$$

$$\binom{\text{Geschwindigkeit}}{\text{von } Q} = \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{ABC}}\sqrt{G^2 - CT}\binom{\text{Ordinate}}{\text{von } P}.$$

§ 154. Weil $\varrho' \sin\varphi' = \varrho \sin\varphi$ ist, so ergibt sich durch Substitution

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{\varrho'^2}\sin^2\varphi},$$

worin $\lambda^2$ denselben Werth, wie in § 139, hat. Nimmt man an, $\varphi$ sei mittelst des elliptischen Integrals

$$\lambda(t - \tau) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{\varrho'^2}\sin^2\varphi}}$$

durch $t$ ausgedrückt, es sei also $\varphi = \operatorname{am} \lambda(t - \tau)$ und substituirt diesen Werth von $\varphi$ in die Gleichungen (2) oder (3), so erhält man die Werthe von $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ durch die Zeit ausgedrückt.

§ 155. **Die Stabilität der Rotation.** Wird ein Körper um eine Hauptaxe für einen festliegenden Punkt in Rotation gesetzt, so fährt er fort, sich um sie als permanente Axe zu drehen. Jedoch besitzen die drei Hauptaxen für den festliegenden Punkt nicht denselben Grad der Stabilität: Tritt irgend eine kleine Störung ein, so rückt die Rotationsaxe in die benachbarte Polodie. Ist diese letztere nun eine kleine nahezu kreisförmige Curve, welche die ursprüngliche Rotationsaxe umschliesst, so weicht die Momentanaxe in dem Körper niemals weit von der Hauptaxe ab, die ihre ursprüngliche Lage war. Auch die Herpolodie ist alsdann eine Curve von kleinen Dimensionen, und die Hauptaxe entfernt sich daher nie weit von einer im Raum festliegenden Geraden. In diesem Fall heisst die Rotation *stabil*. Wenn aber die benachbarte Polodie nicht nahezu kreisförmig ist, so wird sich die Momentanaxe weit von ihrer ursprünglichen Lage im Körper entfernen. Alsdann kann eine sehr kleine Störung eine grosse Aenderung in der nachfolgenden Bewegung hervorbringen und die Rotation wird *unstabil* genannt.

Ist die Anfangsrotationsaxe die Axe $OB$ des mittleren Momentes, so drehen alle benachbarten Polodien ihre convexen Seiten $B$ zu. Wenn daher die Störung nicht derart ist, dass die Rotationsaxe längs der trennenden Polodie verschoben wird, so muss die Rotation unstabil sein. Tritt die Verrückung längs der trennenden Polodie ein, so kann die Axe die Tendenz haben, in ihre ursprüngliche Lage wieder zurückzukehren. Wir werden den Fall weiter unten besprechen; für diese specielle Verrückung kann man die Rotation stabil nennen.

Ist ferner die Anfangsrotationsaxe die Axe des grössten oder kleinsten Momentes, so sind die benachbarten Polodien Ellipsen von grösserer oder kleinerer Excentricität. Sind sie nahezu kreisförmig, so ist die Rotation zweifellos stabil; sind sie dagegen sehr excentrisch, so weicht die Axe weit von ihrer Anfangslage ab und die Rotation kann unstabil heissen. Wenn $OC$ die anfängliche Rotationsaxe ist, so wird das Verhältniss der Quadrate der Axen der benachbarten Polodie zuletzt

$\frac{A(A-C)}{B(B-C)}$. Für die Stabilität der Rotation ist es daher nothwendig, dass dieses Verhältniss sich nicht zu weit von der Einheit entferne.

§ 156. Bekanntlich wird die Stabilität eines sich bewegenden Körpers durch eine schnelle Rotation um eine Hauptaxe sehr vermehrt.

Der Grund ist aus dem Vorhergehenden ersichtlich. Wird der Körper um eine Axe in Rotation gesetzt, die der Hauptaxe des grössten oder kleinsten Momentes sehr nahe liegt, so sind im Allgemeinen sowohl die Polodie als die Herpolodie sehr kleine Curven und die Richtung dieser Hauptaxe des Körpers wird nahezu im Raum festliegen. Eine kleine Momentankraft $f$ nun, welche auf den Körper wirkt, hat zur Folge, dass die Lage der Momentanaxe um ein Geringes geändert wird. Sie wird von der einen Polodie nach einer andern der ersten sehr nahen bewegt und es wird daher die Winkellage der Axe im Raum nicht sehr verändert werden. Bezeichnet $\Omega$ die durch den Körper, $\omega$ die durch die Momentankraft erzeugte Winkelgeschwindigkeit, so kann nach dem Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten die Veränderung in der Lage der Momentanaxe nicht grösser sein, als arc sin $(\omega/\Omega)$. Wenn also $\Omega$ gross ist, so muss es auch $\omega$ sein, wenn es irgend eine erhebliche Verrückung der Rotationsaxe erzeugen soll. Hat aber der Körper keine Anfangsrotation $\Omega$, so kann die Momentankraft eine Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um eine Axe hervorbringen, welche nicht nahezu mit einer Hauptaxe zusammenfällt. Sowohl die Polodie als die Herpolodie können dann grosse Curven sein und die momentane Rotationsaxe wird sich um beide, die in dem Körper und die im Raum gelegene, bewegen. Die Bewegung erscheint alsdann sehr ungleichförmig. So ist es z.B. zu erklären, warum es bei dem Fangbecherspiel[1]) leichter ist, den Ball auf der Spitze aufzufangen, wenn man ihn um seine verticale Axe dreht. Jede Bewegung, die durch einen falschen Zug an der Kordel oder die Schwere verursacht wird, bringt keine so grosse Aenderung der Bewegung hervor, als in dem Fall, wenn der Ball sich Anfangs in Ruhe befindet. Auch die feste Richtung der Erdaxe im Raum ist ihrer Rotation um ihre Figurenaxe zu verdanken. Bei Büchsen ferner wird der Kugel eine rasche Rotation um eine Axe mitgetheilt, welche die Richtung hat, in der die Kugel sich bewegt. Wie sich aus dem Vorstehenden ergibt, bleibt die Rotationsaxe alsdann während der Bewegung nahezu unverändert. Eine Folge davon ist, dass die Art, wie der Widerstand der Luft auf die Kugel wirkt, bekannt ist, seine Grösse daher berechnet und berücksichtigt werden kann.

---

1) Ein in einem Becher liegender und mittelst einer Schnur an ihm befestigter Ball wird in die Höhe geworfen und mit dem Becher wieder aufzufangen gesucht.

## Die von den invariablen Linien und den Momentanaxen beschriebenen Kegel, nach den Sätzen der sphärischen Trigonometrie behandelt.

§ 157. Man kann die Bewegung der Körper um einen festen Punkt auf verschiedene Art studiren. Nicht nur die Eigenschaften eines Ellipsoids, wie des Poinsot'schen und Mac Cullagh'schen, können dazu dienen, sondern auch eine Kugel, deren Centrum sich in dem festen Punkt befindet und die ganz nach unserm Belieben entweder in dem Körper oder im Raum festliegt, kann diesen Zweck erfüllen. Die letztere Methode ist besonders dann zu empfehlen, wenn man die Winkelbewegung einer Linie im Raum oder im Körper zu ermitteln wünscht. Werden diese Winkel auf Bogen bezogen, die auf der Oberfläche der Kugel liegen, so ist man im Stande, das Verfahren dadurch abzukürzen, dass man die entsprechenden Formeln der sphärischen Trigonometrie benutzt.

Die von der invariablen Linie und der Momentanaxe beschriebenen Kegel schneiden die betreffende Kugel in sphärischen Kegelschnitten. Da die Eigenschaften solcher Kegel in der Raumgeometrie in der Regel nicht mit hinreichender Ausführlichkeit behandelt werden, so haben wir eine Anzahl von Sätzen über sie hinzugefügt, die vielleicht von Nutzen sind. Um jedoch den Gang der allgemeinen Untersuchung nicht zu unterbrechen, wurden sie an dem Ende dieses Kapitels zusammengestellt.

§ 158. Aus dem früher Gesagten ergibt sich, dass es zwei wichtige Geraden gibt, deren Bewegung wir untersuchen müssen. Es sind dies die invariable Linie und die Momentanaxe. Die erste liegt im Raum zwar fest, beschreibt aber bei der Bewegung des Körpers einen Kegel im Körper, der nach § 152 das reciproke Trägheitsellipsoid in einem sphärischen Kegelschnitt schneidet. Dieser Kegel heisst gewöhnlich *der invariable Kegel.* Die Momentanaxe dagegen beschreibt sowohl im Körper als im Raum einen Kegel. Nach § 143 schneidet der im Körper beschriebene Kegel das Poinsot'sche Trägheitsellipsoid in einer Polodie und der im Raum beschriebene die feste Ebene, auf der das Trägheitsellipsoid rollt, in einer Herpolodie. Die beiden Kegel sollen der *Momentankegel* und der *Kegel der Herpolodie* heissen.

§ 159. **Die Kegel.** Die Hauptaxen für den festen Punkt mögen die Coordinatenaxen sein. Die Bezugsaxen liegen also im Körper fest und bewegen sich im Raum. Nach § 140 sind die Richtungscosinusse der invariablen Linie $A\omega_1/G$, $B\omega_2/G$, $C\omega_3/G$ und die der Momentanaxe $\omega_1/\omega$, $\omega_2/\omega$, $\omega_3/\omega$. Aus den Gleichungen (1) und (2) in § 140 ergibt sich leicht

$$(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2)\, G^2 = (A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2)\, T.$$

Nimmt man die Coordinaten $x$, $y$, $z$ proportional den Richtungscosinussen einer dieser beiden Geraden an und eliminirt $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ mit Hülfe der vorstehenden Gleichung, so erhält man die Gleichung des von der bezüglichen Geraden beschriebenen Kegels. Auf diese Weise kommt man zu den folgenden Gleichungen der von der invariablen Linie bez. der Momentanaxe in dem Körper beschriebenen Kegel

$$\frac{AT - G^2}{A} x^2 + \frac{BT - G^2}{B} y^2 + \frac{CT - G^2}{C} z^2 = 0,$$

$$A(AT - G^2) x^2 + B(BT - G^2) y^2 + C(CT - G^2) z^2 = 0.$$

Die Kegel werden zu zwei Ebenen, wenn die Anfangsbedingungen so sind, dass $G^2 = BT$ ist.

Beisp. Man zeige, dass die Kreisschnitte des invariablen Kegels denen des reciproken Ellipsoids parallel laufen und auf den Asymptoten eines Focalkegelschnittes des Poinsot'schen Ellipsoids senkrecht stehen.

§ 160. Es existirt eine dritte Gerade, deren Bewegung zu untersuchen sich manchmal empfiehlt, wenn sie auch freilich nicht entfernt so wichtig wie die invariable Linie oder die Momentanaxe ist. Wenn $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des Endpunktes eines Radiusvectors eines Ellipsoids in Bezug auf seine Hauptdurchmesser als Axen und wenn $a$, $b$, $c$ die Halbaxen bezeichnen, so wollen wir die Gerade, deren Richtungscosinusse $x/a$, $y/b$, $z/c$ sind, *die excentrische Linie* des Radiusvectors nennen. Nach dieser Definition erkennt man leicht, dass die Richtungscosinusse der excentrischen Linie der Momentanaxe in Bezug auf das Poinsot'sche Ellipsoid $\omega_1 \sqrt{A/T}$, $\omega_2 \sqrt{B/T}$, $\omega_3 \sqrt{C/T}$ sind. Sie sind auch die Richtungscosinusse der excentrischen Linie der invariablen Linie in Bezug auf das reciproke Ellipsoid. Man kann diese Gerade daher einfach *die excentrische Linie* und den von ihr im Körper beschriebenen Kegel *den excentrischen Kegel* nennen.

Beisp. 1. Die Gleichung des excentrischen Kegels in Bezug auf die Hauptaxen für den festen Punkt ist

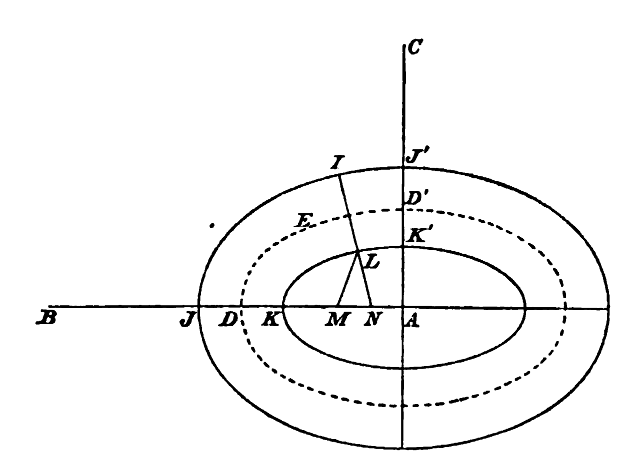
$$(AT - G^2) x^2 + (BT - G^2) y^2 + (CT - G^2) z^2 = 0.$$

Der Kegel hat dieselben Kreisschnitte, wie das Poinsot'sche Ellipsoid und schneidet es in einem sphärischen Kegelschnitt.

Beisp. 2. Die Polarebene der Momentanaxe in Bezug auf den excentrischen Kegel berührt den invariablen Kegel längs der entsprechenden Lage der invariablen Linie. Auf diese Art sind der invariable und der Momentankegel in Bezug auf den excentrischen Kegel reciprok zu einander.

§ 161. **Die sphärischen Kegelschnitte.** Man beschreibe eine Kugel, deren Radius die Einheit ist und deren Centrum in dem festen Punkt $O$ liegt, um welchen sich der Körper frei bewegen kann. Diese Kugel liege im Körper fest und bewege sich daher mit ihm im Raum. Die invariable Linie, die Momentanaxe und die excentrische Linie mögen die Kugel in den Punkten $L$, $I$ bez. $E$ treffen; die Hauptaxen ferner in $A$, $B$, $C$. Offenbar sind die Schnitte der invariablen, Momentan- und excentrischen Kegel mit der Kugel drei sphärische Kegelschnitte, die in der Figur durch die Linien $KK'$, $JJ'$ bez. $DD'$

dargestellt sind. Es ist angenommen, das Auge befinde sich über der Axe $OA$ und betrachte die Kugel aus ansehnlicher Entfernung. Alle grössten Kreise auf der Kugel sind durch grade Linien wiedergegeben. Da die Kegel mit dem Poinsot'schen Ellipsoid gleichaxig sind, so liegen die sphärischen Kegelschnitte symmetrisch um die Hauptebenen des Körpers. Die Schnitte der Hauptebenen mit der Kugel sind drei




grösste Kreisbogen und die Theile dieser Bogen, welche von jedem sphärischen Kegelschnitt abgeschnitten werden, heissen die Axen dieses Kegelschnittes. Setzt man in den Gleichungen irgend eines der drei Kegel $z = 0$, so ist der Werth von $y/x$ die Tangente derjenigen Halbaxe des sphärischen Kegelschnittes, welche in der $xy$-Ebene liegt. Ebenso erhält man für $y = 0$ die Axe in der $xz$-Ebene. Bezeichnen $(a, b)$, $(a', b')$, $(\alpha, \beta)$ die Halbaxen des invariablen, momentanen bez. excentrischen sphärischen Kegelschnitts, so findet man auf diese Art

$$\frac{\operatorname{tg} a}{B} = \frac{\operatorname{tg} a'}{A} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{AB}} = \frac{\sqrt{AT - G^2}}{\sqrt{G^2 - BT}} \frac{1}{\sqrt{AB}},$$

$$\frac{\operatorname{tg} b}{C} = \frac{\operatorname{tg} b'}{A} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{AC}} = \frac{\sqrt{AT - G^2}}{\sqrt{G^2 - CT}} \frac{1}{\sqrt{AC}}.$$

Die erste Reihe liefert die Axen in der Ebene $AOB$, die zweite die in der Ebene $AOC$. Die Axen in der ersten werden imaginär, wenn $G^2 < BT$ ist. In diesem Fall schneiden die sphärischen Kegelschnitte die Ebene $AOB$ nicht. Ihre concaven Seiten sind daher den Endpunkten der Axen $OA$ oder $OC$, d. h. den Enden der Axen des grössten oder kleinsten Trägheitsmomentes zugewendet, je nachdem $G^2 >$ oder $< BT$ ist. Da $\operatorname{tg} b / \operatorname{tg} b' = C/A$ ist, so liegt offenbar der invariable Kegel und die Axe des grössten Trägheitsmomentes stets auf derselben Seite des Momentankegels.

§ 162. Beisp. 1. Setzt man $1 - e^2 = \sin^2 b / \sin^2 a$, so lässt sich $e$ als die Excentricität des sphärischen Kegelschnittes definiren, dessen Halbaxen $a$ und $b$ sind. Wenn $e$ und $e'$ die Excentricitäten des invariablen bezügl. excentrischen sphärischen Kegelschnittes sind, zu beweisen, dass

$$e^2 = A(B - C)/B(A - C) \text{ und } e'^2 = (B - C)/(A - C)$$

ist, diese beiden Excentricitäten also unabhängig von den Anfangsbedingungen sind.

Beisp. 2. Wenn man, statt der Einheit, $(G^2/MT)^{\frac{1}{2}}$ zum Radius der Kugel nimmt, zu zeigen, dass die Kugel das reciproke Ellipsoid längs des invariablen Kegels schneidet; würde man dagegen $(KT/G^2)^{\frac{1}{2}}$ zum Radius genommen haben, so würde sie das Poinsot'sche Ellipsoid längs des excentrischen Kegels schneiden.

Beisp. 3. Ein Körper wird mit der Anfangswinkelgeschwindigkeit $n$ um eine Axe in Rotation gesetzt, die nahezu mit der Hauptaxe $OC$ für den festen Punkt $O$ zusammenfällt. Dann kann man die Bewegung der Momentanaxe in dem Körper auf die folgende Art ermitteln. Eine Kugel werde aus dem Centrum $O$ beschrieben und $I$ sei das Ende des Radiusvectors, welcher die Momentanaxe zur Zeit $t$ ist. Wenn $(x, y)$ die Coordinaten der Projection von $I$ auf die Ebene $AOB$ bezügl. der Hauptaxen $OA$, $OB$ bezeichnen, so ist

$$x = \sqrt{B(B - C)}\, L \sin(pnt + M),$$

$$y = \sqrt{A(A - C)}\, L \cos(pnt + M),$$

worin $p^2 = (B - C)(A - C)/AB$ und $L$, $M$ zwei willkürliche von den Anfangswerthen von $x$, $y$ abhängige Constanten sind.

Beisp. 4. Ist in der letzten Aufgabe $L$ der Punkt, in welchem die Kugel die invariable Linie trifft, sind ferner $(\varrho, \theta)$ die sphärischen Polarcoordinaten von $C$ in Bezug auf $L$ als Anfangspunkt und ist $a$ der Radius der Kugel, so wird

$$\varrho^2 = n^2 \frac{AB}{2G^2} L^2 \{2AB - C(A + B) + (A - B)C\cos 2(pnt + M)\},$$

$$\theta = \frac{T}{G}t + \frac{CT - G^2}{CG}\int \frac{a^2 dt}{\varrho^2}.$$

§ 163. *Die Bewegung der invariablen Linie und der Momentanaxe in dem Körper zu finden.*

Da die invariable Linie $OL$ im Raum festliegt und der Körper sich um $OI$ als Momentanaxe dreht, so ist offenbar die Richtung der Bewegung von $OL$ in dem Körper senkrecht zur Ebene $IOL$. Daher steht auf einer Kugel, deren Centrum in $O$ liegt, *der Bogen $IL$ senkrecht auf dem von der invariablen Linie beschriebenen sphärischen Kegelschnitt.* Diese einfache Beziehung kann man dazu benutzen, die Bewegungen der invariablen Linie und der Momentanaxe auf ihren bezüglichen sphärischen Kegelschnitten miteinander in Verbindung zu bringen.

Nimmt man an, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ seien sämmtlich positiv, so liegt die Axe $OI$ in dem positiven Octanten und der Körper dreht sich um $OI$ in der Richtung $ABC$ (siehe die Figur in § 161). Da $OL$ im Raum festliegt, so scheint sich $OL$ im Körper in der zur Rotation entgegengesetzten Richtung zu bewegen.

Liegen ferner $L$ und $A$ auf derselben Seite des sphärischen Kegelschnittes $JJ'$, wie es der Fall ist, wenn sich $A$, $B$, $C$ in abnehmender Reihenfolge befinden, so bewegt sich $L$ in dem Körper auf seinem sphärischen Kegelschnitt in der

Richtung $KK'$. Liegen dagegen $L$ und $A$ auf entgegengesetzten Seiten des sphärischen Kegelschnittes $JJ'$, so bewegt sich $L$ in der umgekehrten Richtung. Siehe auch § 150.

§ 164. Bezeichnet $v$ die Geschwindigkeit der invariablen Linie auf ihrem sphärischen Kegelschnitt, so ist, da sich der Körper um $OI$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ dreht und $OL$ die Einheit ist, $v = \omega \sin LOI$. Nach § 143 ist aber $T/G = \omega \cos LOI$. Man erhält daher durch Elimination von $\omega$

$$v = (T/G) \operatorname{tg} LOI.$$

§ 165. Man verlängere den Bogen $IL$, bis er die Axe $AK$ in $N$ schneidet, so dass also $LN$ auf dem von der invariablen Linie beschriebenen sphärischen Kegelschnitt senkrecht steht. Nimmt man dann die Hauptaxen für den festliegenden Punkt $O$ zu Bezugsaxen, so sind die Richtungscosinusse von $OL$ und $OI$ proportional zu $A\omega_1$, $B\omega_2$, $C\omega_3$ bez. $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$. Die Gleichung der Ebene $LOI$ ist

$$(B - C)\,\omega_2\omega_3 x + (C - A)\,\omega_3\omega_1 y + (A - B)\,\omega_1\omega_2 z = 0.$$

Diese Ebene schneidet die $xy$-Ebene in der Geraden $ON$; setzt man daher $z = 0$, so ergeben sich die Richtungscosinusse von $ON$ als $(A - C)\,\omega_1$, $(B - C)\,\omega_2$ und 0 proportional. Daraus folgt

$$\cos LON = \frac{A\,(A - C)\,\omega_1^2 + B\,(B - C)\,\omega_2^2}{G\sqrt{(A - C)^2\omega_1^2 + (B - C)^2\omega_2^2}}.$$

Benutzt man (1) und (2) in § 137, so sieht man leicht, dass der Nenner dieses Bruches $G^2 - CT$ ist. Entwickelt man die Grösse unter dem Wurzelzeichen, so wird sie

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 - 2C\,(A\omega_1^2 + B\omega_2^2) + C^2\,(\omega_1^2 + \omega_2^2),$$

welches offenbar gleich

$$G^2 - C^2\omega_3^2 - 2C\,(T - C\omega_3^2) + C^2\,(\omega^2 - \omega_3^2) \text{ ist.}$$

Durch Substitution erhält man dann

$$\cos LON = \frac{G^2 - CT}{G\sqrt{G^2 - 2CT + C^2\omega^2}};$$

daher

$$\operatorname{tg} LON = \frac{C\sqrt{G^2\omega^2 - T^2}}{G^2 - CT}.$$

Es ist aber $T/G = \omega \cos LOI$; daher $T \operatorname{tg} LOI = \sqrt{G^2\omega^2 - T^2}$. *Mithin ist das Verhältniss* $\frac{\operatorname{tg} LOI}{\operatorname{tg} LON} = \frac{G^2 - CT}{CT}$ *und folglich während der Bewegung constant.*

Combinirt man dieses Resultat mit dem in dem letzten Paragraphen, so ist

$$\left.\begin{matrix}\text{die Geschwindigkeit von } L\\ \text{auf seinem Kegelschnitt}\end{matrix}\right\} = \frac{G^2 - CT}{CG} \operatorname{tg} n,$$

worin $n$ den Winkel $LON$ bezeichnet. Nach den Vereinbarungen der sphärischen Trigonometrie ist $n$ auch die Länge des auf dem sphärischen Kegelschnitt senkrecht stehenden zwischen der Curve und der Hauptebene $AB$ des Körpers enthaltenen Bogens.

§ 166. Beisp. 1. Die Punkte $S$ und $S'$, in welchen die Focallinien des invariablen Kegels die Kugel schneiden, heissen die Brennpunkte des sphärischen Kegelschnittes. Man beweise, dass *die Componente der Geschwindigkeit von $L$ senkrecht zu dem Bogen $SL$ während der Bewegung constant* und gleich

$$\{(G^2-BT)(AT-G^2)/ABG^2\}^{\frac{1}{2}}$$

ist. Wenn $LM$ den Bogen des grössten Kreises, welcher auf der die Brennpunkte enthaltenden Axe senkrecht steht und $\varrho$ den Bogen $SL$ bezeichnet, zu beweisen, dass

$$\frac{d\varrho}{dt}=-\frac{G}{C}\left\{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}\right\}^{\frac{1}{2}}\sin LM$$

ist.

Beisp. 2. Man beweise, dass die Componente der Geschwindigkeit von $L$ senkrecht zu dem centralen Radiusvector $AL$ gleich $\frac{AT-G^2}{AG}\operatorname{cotg} AL$ ist.

Beisp. 3. Wenn $r$, $r'$, $r''$ die Längen der Bogen sind, welche das Ende $A$ einer Hauptaxe mit den Enden $L$, $I$, $E$ der invariablen Linie der Momentanaxe bez. der excentrischen Linie verbinden und $\theta$, $\theta'$, $\theta''$ die Winkel sind, welche diese Bogen mit irgend einer Hauptebene $AOB$ machen, zu beweisen, dass

$$\frac{\cos r}{AT}=\frac{\cos r'}{G^2\cos\zeta}=\frac{\cos r''}{G\sqrt{AT}},\quad \frac{\operatorname{tg}\theta}{C}=\frac{\operatorname{tg}\theta'}{B}=\frac{\operatorname{tg}\theta''}{\sqrt{BC}},$$

worin $\zeta=\operatorname{arc} LI$. Mittelst dieses Theorems ist man in den Stand gesetzt, die Beziehungen zwischen den Bewegungen der drei Punkte $L$, $I$, $E$ aufzufinden.

Beisp. 4. Man zeige, dass die Geschwindigkeit der Momentanaxe längs ihres sphärischen Kegelschnittes $\frac{G}{T}\,\frac{G^2-CT}{AB}\operatorname{tg} n'\cos\zeta$ ist, worin $n'$ die Länge des auf dem sphärischen Kegelschnitt der Momentanaxe errichteten Lothes zwischen der Curve und dem Bogen $AB$ und $\zeta=\operatorname{arc} LI$ ist.

Vergleicht man diese Formel mit der entsprechenden in § 165 für die Bewegung von $L$, so sieht man, dass für jeden sich auf die Bewegung von $L$ in seinem sphärischen Kegelschnitt beziehenden Satz ein entsprechender für die von $I$ existirt. Wenn z. B. $S'$ ein Brennpunkt des sphärischen Momentankegelschnittes ist, so ergibt sich aus Beisp. 1, dass die Componente der Geschwindigkeit von $I$ senkrecht zu dem focalen Radiusvector $S'I$ in constantem Verhältniss zu $\cos LI$ steht. Dies Verhältniss ist dem in Beisp. 1, multiplicirt mit $G^2C/TAB$, gleich.

Beisp. 5. Man zeige, dass die Geschwindigkeit der excentrischen Linie längs ihres sphärischen Kegelschnittes $\{(G^2-CT)/\sqrt{ABCT}\}\operatorname{tg} n''$ ist, worin $n''$ die Länge des auf dem sphärischen Kegelschnitt senkrechten Bogens zwischen der Curve und dem Hauptbogen $AB$ bedeutet.

Beisp. 6. Man beweise, dass

$$(\text{Geschwindigkeit von } E)^2-(\text{Geschwindigkeit von } L)^2=\text{Constante}$$

ist. Man zeige auch, dass die Constante

$$=(AT-G^2)(BT-G^2)(CT-G^2)/ABCG^2T \text{ ist.}$$

Beisp. 7. Die Bewegung von $L$ längs seines sphärischen Kegelschnittes ist dieselbe, wie die eines Massenpunktes, an dem zwei Kräfte angreifen, welche die Richtung der Tangenten in $L$ an die Bogen $LS$, $LS'$ haben, welche $L$ mit den Brennpunkten des sphärisches Kegelschnittes verbinden, und deren Grösse $\sin LS \cos LS'$ bez. $\sin LS' \cos LS$ proportional ist.

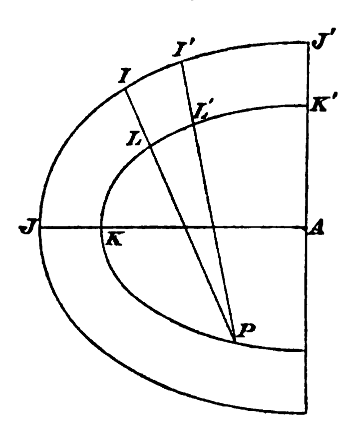
Auflösungen dieser Beispiele und Beweise anderer Sätze in diesem Abschnitt findet man in einer Abhandlung des Verfassers in den *Proceedings of the Royal Society*, 1873.

§ 167. Die Momentanaxe beschreibt im Raum einen Kegel, den wir den Kegel der Herpolodie genannt haben. Seine Gleichung kann im Allgemeinen auf elementarem Weg nicht gefunden werden; ist es aber möglich, so erhalten wir eine weitere geometrische Darstellung der Bewegung. Denn, man nehme an, die beiden von der Momentanaxe im Raum und im Körper beschriebenen Kegel seien construirt. Da jeder von ihnen zwei aufeinander folgende Lagen ihrer gemeinschaftlichen Erzeugenden enthält, so berühren sie sich längs der Momentanaxe. Da ferner die Berührungspunkte keine Geschwindigkeit haben, so kann man die Bewegung dadurch darstellen, dass man den im Körper festliegenden Kegel auf dem im Raum festliegenden rollen lässt.

§ 168. **Das Poinsot'sche Theorem.** *Die Bewegung der Momentanaxe im Raum zu finden.*

Da die invariable Linie $OL$ im Raum festliegt, so empfiehlt es sich, die Bewegung auf $OL$ als eine der Coordinatenaxen zu beziehen. Der Winkel, den die Momentanaxe $OI$ mit $OL$ macht, möge $\xi$ und der Winkel zwischen der Ebene $IOL$ und einer durch $OL$ gehenden im Raum festliegenden Ebene möge $\varphi$ heissen. Siehe die Fig. in § 149.

Während der Bewegung rollt der von $OI$ in dem Körper beschriebene Kegel auf dem von $OI$ im Raum beschriebenen. Es leuchtet daher ein, dass die Winkelgeschwindigkeit der Momentanaxe im Raum dieselbe, wie ihre Winkelgeschwindigkeit im Körper ist. Man beschreibe mit dem Centrum in $O$ und einem der Einheit gleichen Radius eine Kugel, die im Körper festliegen möge. $L$ und $I$ seien die Durchschnittspunkte der invariablen Linie und der Momentanaxe mit der Kugel zur Zeit $t$ und $L'$, $I'$ zur Zeit $t + dt$. Es sind dann $IL$, $I'L'$ zwei consecutive Normalen an den sphärischen Kegelschnitt $KK'$, welchen die invariable Linie beschreibt und schneiden sich daher in einem Punkt $P$, den man als den Krümmungsmittelpunkt des sphärischen Kegelschnittes ansehen kann. Es sei $PL = \varrho$. Offenbar ist



$$\left.\begin{array}{c}\text{die Componente der Geschwindig-}\\ \text{keit von } I \text{ senkrecht zu } IL\end{array}\right\} = \left(\begin{array}{c}\text{Geschwindig-}\\ \text{keit von } L\end{array}\right) \cdot \frac{\sin(\varrho + \zeta)}{\sin \varrho}.$$

Daher nach § 164, weil $\zeta = IL$,

$$\sin \zeta \frac{d\varphi}{dt} = \frac{T}{G} \operatorname{tg} \zeta (\cos \zeta + \operatorname{cotg} \varrho \sin \zeta)$$

und daraus

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{T}{G}\left(1 + \frac{\operatorname{tg} \zeta}{\operatorname{tg} \varrho}\right).$$

In jedem sphärischen Kegelschnitt ist aber $\operatorname{tg} \varrho = \operatorname{tg}^3 n / \operatorname{tg}^2 l$, worin $n$ die Länge des Lothes zwischen der Curve und der die Brennpunkte enthaltenden Axe und $2l$ die Länge der Ordinate bezeichnet, welche durch einen der beiden Brennpunkte geht und gewöhnlich der Parameter genannt wird. Setzt man für $\operatorname{tg} \varrho$ seinen Werth ein und bedenkt, dass nach § 165

$$\frac{\operatorname{tg} \zeta}{\operatorname{tg} n} = \frac{G^2 - CT}{CT} \text{ und } \operatorname{tg} l = \frac{\operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg} a}$$

ist, so erhält man

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{T}{G} + \frac{T}{G}\left(\frac{G^2 - CT}{CT}\right)^2 \cdot \left(\frac{\operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg} a}\right)^2 \operatorname{cotg}^2 \zeta.$$

Substituirt man für $\operatorname{tg} a$ und $\operatorname{tg} b$, so wird

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{T}{G} + \frac{(AT - G^2)(BT - G^2)(CT - G^2)}{ABCGT^2} \operatorname{cotg}^2 \zeta.$$

§ 169. Eine einfache geometrische Construction dieses Resultates hat Dr. Ferrers, Master des Caius College, in einem Smith'schen *Prize paper* (1882) angegeben. Wenn $OH$ die Projection der Momentanaxe $OI$ auf die durch den festen Punkt $O$ gelegte invariable Ebene bezeichnet und $OH$ das Poinsot'sche Trägheitsellipsoid in $H$ schneidet, so ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{G^2 K}{TABC} \frac{1}{OH^2}.$$

§ 170. Da die Componente der Winkelgeschwindigkeit um die invariable Linie constant ist, so ergibt sich leicht $\omega = \sec \zeta \, T/G$. Setzt man diesen Werth von $\omega$ in Gleichung (6), § 137 ein, so findet man eine Beziehung zwischen $\zeta$ und $\frac{d\zeta}{dt}$, die indessen zu complicirt ist, um grossen Nutzen bringen zu können.

Sowohl $d\varphi/dt$ als $d\zeta/dt$ sind durch $\zeta$ ausgedrückt worden; daraus lässt sich nun die Bewegung der Momentanaxe im Raum ableiten.

§ 171. Beisp. 1. Man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit $v'$ der Momentanaxe im Raum oder im Körper durch

$$\omega^2 v'^2 = \frac{T^2}{ABC}\left(A + B + C - 2\frac{G^2}{T}\right) - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\omega^2}$$

gegeben ist, worin $\omega$ die resultirende Winkelgeschwindigkeit des Körpers be-

zeichnet und $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ dieselbe Bedeutung wie in § 137 haben. Der Satz rührt von Poinsot her.

Beisp. 2. Die zwischen zwei aufeinander folgenden Scheiteln gemessene Länge der Spirale, welche die Momentanaxe auf der Oberfläche einer festliegenden concentrischen Kugel im absoluten Raum beschreibt, ist dem Quadranten der sphärischen Ellipse gleich, welche dieselbe Axe auf einer gleichen, sich mit dem Körper bewegenden Kugel beschreibt. (Das Booth'sche Theorem.)

Beisp. 3. Wenn die excentrische Linie die im Körper festliegende Kugel, deren Radius = 1 ist und deren Centrum im festen Punkt liegt, in dem Punkt $E$ trifft, zu beweisen, dass

$$\begin{pmatrix}\text{die Geschwindig-}\\ \text{keit von } E\end{pmatrix}^2 = \frac{T}{G}\frac{d\varphi}{dt}\,\mathrm{tg}^2\,\zeta$$

ist, worin die Buchstaben dieselbe Bedeutung wie in § 168 haben.

§ 172. **Der rollende und gleitende Kegel.** $O$ sei der feste Punkt, $OI$ die Momentanaxe. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um $OI$ werde in zwei Componenten zerlegt, eine gleichförmige Winkelgeschwindigkeit $T/G$ um die invariable Linie $OL$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin IOL$ um eine Linie $OH$, welche in einer im Raum festliegenden, auf der invariablen Linie senkrechten und durch den festen Punkt $O$ gehenden Ebene liegt. Diese feste Ebene möge die invariable Ebene für $O$ heissen. Bei der Bewegung des Körpers beschreibt $OH$ in dem Körper einen Kegel, der diese feste Ebene stets berührt. Die Geschwindigkeit eines jeden Punktes des Körpers, der momentan in $OH$ liegt, bleibt durch die Rotation um $OH$ unberührt und der Punkt hat daher nur die Bewegung, welche eine Folge der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit um $OL$ ist. Wir erhalten auf diese Art eine neue Darstellung der Bewegung des Körpers. Man construire den von $OH$ in dem Körper beschriebenen Kegel und lasse ihn auf der invariablen Ebene für $O$ mit der richtigen Winkelgeschwindigkeit rollen, während diese Ebene sich gleichzeitig um die invariable Linie mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $T/G$ dreht. Der von $OH$ im Körper beschriebene Kegel wurde von Poinsot *der rollende und gleitende Kegel* genannt.

*Eine Construction des gleitenden Kegels zu finden.* Seine Erzeugende $OH$ steht auf $OL$ senkrecht und befindet sich in der Ebene $IOL$. Nun liegt $OL$ im Raum fest; $OL'$ sei die Linie im Körper, die nach dem Zeitintervall $dt$ in die Lage $OL$ kommt. Da der Körper sich um $OI$ dreht, so steht die Ebene $LOL'$ auf der Ebene $LOI$ senkrecht und $OH$ ist daher ein Loth sowohl auf $OL$ als auf $OL'$. Das heisst aber, dass $OH$ auf der Berührungsebene an den von $OL$ im Körper beschriebenen Kegel senkrecht steht. Der von $OH$ in dem Körper beschriebene Kegel ist daher *reciprok* zu dem von $OL$ beschriebenen. Die Gleichung des von $OL$ beschriebenen Kegels haben wir in § 159 gefunden. Durch Umdrehen ihrer

Coefficienten erhält man mithin die Gleichung des von $OH$ beschriebenen Kegels, nämlich

$$\frac{A}{AT-G^2}x^2+\frac{B}{BT-G^2}y^2+\frac{C}{CT-G^2}z^2=0.$$

Die Focallinien des von $OH$ beschriebenen Kegels sind Lothe auf die Kreisschnitte des reciproken, d. h. also des von $OL$ beschriebenen Kegels. Ferner sind diese Kreisschnitte dieselben, wie die des reciproken Trägheitsellipsoids. Die Focallinien liegen daher in der Ebene, welche die Axen des grössten und kleinsten Momentes enthält und sind von den Anfangsbedingungen unabhängig.

Der Kegel wird eine grade Linie, wenn der von $OL$ beschriebene eine Ebene wird, d. h. also, wenn die Anfangsbedingungen derart sind, dass $G^2=BT$ ist.

§ 173. *Die Bewegung von $OH$ im Raum und im Körper zu finden.*

Da $OL$, $OH$ und $OI$ immer in derselben Ebene bleiben, so ist die Bewegung von $OH$ im Raum um die feste Gerade $OL$ dieselbe, wie die von $OI$, und durch den Ausdruck für $d\varphi/dt$ in § 168 gegeben.

Um die Bewegung von $OH$ im Körper zu finden, empfiehlt es sich, die Figur in § 168 zu benutzen. Man verlängere die Bogen $PL$, $PL'$ bis $H$ und $H'$, so dass also sowohl $LH$ als $L'H'$ ein Quadrant wird. $H$ und $H'$ sind alsdann die Punkte, in denen die Axe $OH$ die Kugel vom Radius $=1$ zur Zeit $t$ und $t+dt$ schneidet. Es ist daher

$$\begin{pmatrix}\text{die Geschwindigkeit}\\ \text{von } H\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Geschwindigkeit}\\ \text{von } L\end{pmatrix}\cdot\frac{\sin(\varrho+\frac{1}{2}\pi)}{\sin\varrho}=\frac{T}{G}\operatorname{tg}\zeta\operatorname{cotg}\varrho.$$

Substituirt man für $\operatorname{tg}\varrho$, wie zuvor, so lässt sich die Geschwindigkeit, ganz wie wir wollen, durch $\zeta$ oder $\omega$ ausdrücken.

Da der von $OH$ im Körper beschriebene Kegel auf einer Ebene rollt, die sich selbst um eine Gerade dreht, die im Punkt $O$ auf ihr senkrecht steht, so muss offenbar die Winkelgeschwindigkeit von $OH$ im Körper um die Winkelgeschwindigkeit der Ebene kleiner, als die Winkelgeschwindigkeit von $OH$ im Raum, d. h.

$$\begin{pmatrix}\text{Geschwindigkeit}\\ \text{von } H\end{pmatrix}=\frac{d\varphi}{dt}-\frac{T}{G},$$

sein.

Beisp. Wenn $l$, $m$, $n$ die Richtungscosinusse von $OH$ in Bezug auf die Hauptaxen des Körpers sind, zu beweisen, dass

$$\frac{l}{(AT-G^2)\omega_1}=\frac{m}{(BT-G^2)\omega_2}=\frac{n}{(CT-G^2)\omega_3}=\frac{1}{G\sqrt{G^2\omega^2-T^2}}$$

ist.

## Das conjugirte Ellipsoid und die conjugirte Linie.

§ 174. Das Poinsot'sche Trägheitsellipsoid für den festen Punkt sei

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = K \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Man hat ferner

$$\left.\begin{aligned} A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 &= T \\ A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 &= G^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} (\lambda A - A^2)\omega_1^2 + (\lambda B - B^2)\omega_2^2 + (\lambda C - C^2)\omega_3^2 &= \lambda T - G^2 \\ (\mu A - A^2)\omega_1^2 + (\mu B - B^2)\omega_2^2 + (\mu C - C^2)\omega_3^2 &= \mu T - G^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (3).$$

Wählt man nun drei Grössen $A'$, $B'$, $C'$ derart, dass

$$\left.\begin{aligned} A' &= (\lambda A - A^2)i, & A'^2 &= (\mu A - A^2)j \\ B' &= (\lambda B - B^2)i, & B'^2 &= (\mu B - B^2)j \\ C' &= (\lambda C - C^2)i, & C'^2 &= (\mu C - C^2)j \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

ist, so lässt sich in dem Körper noch eine Fläche zweiten Grades construiren, nämlich

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = K' \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

welche, wie wir weiter unten zeigen werden, ein Ellipsoid ist. Man hat auch

$$\left.\begin{aligned} A'\omega_1^2 + B'\omega_2^2 + C'\omega_3^2 &= T' \\ A'^2\omega_1^2 + B'^2\omega_2^2 + C'^2\omega_3^2 &= G'^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6),$$

worin $T'$ und $G'$ neue Constanten sind.

Dieses zweite Ellipsoid besitzt verschiedene Eigenschaften, welche denen des Poinsot'schen analog sind. Z. B.:

(1) Die Winkelgeschwindigkeit um den Radiusvector, um den der Körper rotirt, variirt wie dieser Radiusvector.

(2) Die Länge des Lothes auf die Berührungsebene im Endpunkt der Momentanaxe ist constant.

(3) Die Componente der Winkelgeschwindigkeit des Körpers um das Loth auf die Berührungsebene ist constant und gleich $T'/G'$.

Im Allgemeinen lässt sich nicht behaupten, dass dieses Loth im Raum festliege.

Um zu bestimmen, ob die Umformung möglich ist oder nicht, muss man die Constanten $\lambda$ und $\mu$ prüfen. Löst man (4) auf, so wird

$$\lambda = \frac{1}{2}(A + B + C),$$

$$\frac{4ABC}{\mu} = 2AB + 2BC + 2CA - A^2 - B^2 - C^2 = \frac{4j}{i^2}.$$

Man kommt daher zu folgendem Resultat:

$$A' = \frac{1}{2}iA(B + C - A),\quad B' = \frac{1}{2}iB(C + A - B),\quad C' = \frac{1}{2}iC(A + B - C),$$

$$T' = i(\lambda T - G^2),\quad G'^2 = i^2\frac{ABC}{\mu}(\mu T - G^2).$$

$A$, $B$, $C$ sind als Trägheitsmomente sämmtlich positiv und die Summe je zweier von ihnen ist aus demselben Grund grösser als die dritte. Daraus schliessen wir (1), dass auch $A'$, $B'$, $C'$ sämmtlich positiv sind, (2), dass $\lambda$ und $\mu$ positiv und grösser sind, als der grösste der drei Werthe von $A$, $B$, $C$ und (3), dass $T'$ sowohl als $G'^2$ reell und positiv ist.

§ 175. Daraus, dass diese Analyse nur *einen* Werth für $\lambda$ wie für $\mu$ liefert, folgt, dass man bei Ausführung derselben Operationen an dem zweiten Ellipsoid das erste Ellipsoid erhält und kein anderes. *Die beiden Ellipsoide sind daher einander conjugirt.* Man erhält so

$$A = \frac{1}{2} i' A'(B' + C' - A'), \text{ etc., etc.,}$$

und durch Substitution $i'/i = ABC/A'B'C'$.

Jeden der beiden Körper, deren Trägheitsmomente $A$, $B$, $C$ und $A'$, $B'$, $C'$ sind, kann man zu dem andern *conjugirt* nennen. Haben wir es mit der Bewegung nur eines Körpers zu thun, so nehmen wir an, der Körper führe die beiden Ellipsoide mit sich, als ob sie starr mit ihm verbunden wären. Das Loth auf die Berührungsebene an das Trägheitsellipsoid des Körpers in dem Durchschnittspunkt mit der Momentanaxe ist die invariable Linie, während das entsprechende Loth auf die Berührungsebene an das ihm conjugirte Ellipsoid in dem Durchschnittspunkt der Momentanaxe *die conjugirte Linie* heisst. Die Richtungscosinusse der conjugirten Linie sind daher $A'\omega_1/G'$, $B'\omega_2/G'$, $C'\omega_3/G'$. Siehe eine Abhandlung des Verfassers in dem *Quarterly Journal*, 1888.

Beisp. 1. Man zeige, dass die Gleichungen

$$\frac{B'-C'}{A'} = -\frac{B-C}{A}, \quad \frac{A'(A'T'-G'^2)}{A(AT-G'^2)} = -\frac{A'B'C'}{ABC}$$

und ähnliche für die übrigen Buchstaben bestehen.

Man zeige auch, dass $A'$, $B'$, $C'$ der Grösse nach zunehmen, wenn sich $A$, $B$, $C$ in abnehmender Reihenfolge befinden.

Beisp. 2. Man zeige, dass die Bewegung im Raum irgend eines in der conjugirten Linie gelegenen Punktes dieselbe Richtung hat, wie wenn der Punkt für den Augenblick im Körper festläge, aber eine doppelt so grosse Geschwindigkeit hätte. Siehe § 5, (1) und die Anm. zu § 140.

Beisp. 3. Viele Theoreme, die für die Bewegung der conjugirten Linie $OL'$ gelten, sind denen für die Bewegung der invariablen Linie $OL$ ähnlich.

Die folgenden Sätze sind Beispiele dazu:

(1) Die Geraden $OL$, $OI$, $OL'$ beschreiben in derselben Richtung in dem Körper Kegel zweiten Grades und der von der Momentanaxe $OI$ beschriebene Kegel liegt dabei zwischen den von der invariablen Linie $OL$ und der conjugirten Linie $OL'$ beschriebenen Kegeln.

(2) Die Ebenen, welche auf den von $OL$, $OL'$ beschriebenen Kegeln senkrecht stehen, schneiden einander in der Momentanaxe $OI$.

(3) Die Geschwindigkeit der Geraden $OL'$ längs ihres Kegels variirt wie die Tangente ihrer Neigung gegen $OI$ und das Verhältniss ist $T'/G'$. Sie variirt

auch, wie die Tangente des Winkels, den $OL'$ mit der Geraden macht, in welcher die Ebene $L'OI$ einen Hauptschnitt des conjugirten Ellipsoids schneidet. Siehe § 165.

(4) Die Cosinusse der Winkel $IOL$, $IOL'$ stehen stets in constantem Verhältniss.

Beisp. 4. Wenn $\theta$, $\psi$ die Winkelcoordinaten der conjugirten Linie $OL'$ in Bezug auf die invariable Linie $OL$ als $z$-Axe sind, zu zeigen, dass

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = 2\left(\frac{T}{G} - \frac{T'}{G'}\cos\theta\right) \quad \cdots \quad (1),$$

$$\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = H - 4\left(\frac{T'}{G'}\right)^2 - \frac{4}{ABC}\frac{GG'}{i}\cos\theta \quad \cdots \quad (2)$$

ist, worin

$$\tfrac{1}{4}ABCH = T(BC + CA + AB) - \tfrac{1}{2}G^2(A + B + C),$$

$$\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4}{ABC}\frac{GG'}{i}(\cos\theta - \alpha)(\cos\theta - \beta)(\cos\theta - \gamma) \quad \cdots \quad (3)$$

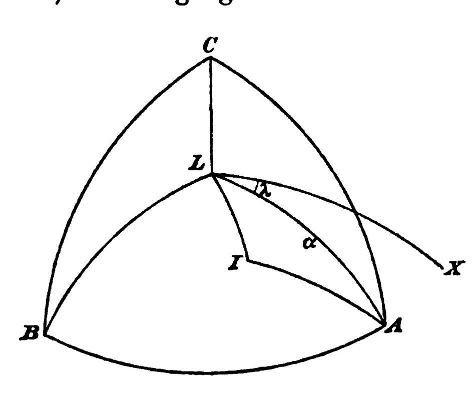
ist und $\alpha GG'/i = TBC + G^2(A - \lambda)$, etc., etc. Man beachte, dass $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ reell sind.

Beisp. 5. Zwei Körper, von denen jeder sich um einen festen Punkt dreht, haben die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ und $\omega_1'$, $\omega_2'$, $\omega_3'$ um ihre Hauptaxen und ihre Hauptmomente sind $A$, $B$, $C$ und $A'$, $B'$, $C'$. Wenn sich die Körper so bewegen, dass $\omega_1 = \omega_1'$, $\omega_2 = \omega_2'$, $\omega_3 = \omega_3'$ ist, aus den Euler'schen Gleichungen zu beweisen, dass $A'/A = B'/B = C'/C$. Bewegen sie sich dagegen so, dass $\omega_1 = -\omega_1'$, $\omega_2 = -\omega_2'$, $\omega_3 = -\omega_3'$, zu beweisen, dass die Körper einander conjugirt sind.

Man beweise ferner, dass die zwischen den Winkelgeschwindigkeiten gegebenen Beziehungen, wenn sie auch Anfangs gültig sind, immer bestehen und dass dann die von den Momentanaxen beschriebenen Kegel gleich und ähnlich sind.

## Die Bewegung der Hauptaxen.

§ 176. *Die Winkelbewegungen der Hauptaxen im Raum zu finden.* Da die invariable Linie $OL$ im Raum festliegt, so empfiehlt es sich, die Bewegung auf sie als $z$-Axe zu beziehen. Es seien $OA$, $OB$, $OC$ die Hauptaxen für den festen Punkt $O$ und, wie früher, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ihre Neigungen gegen die Axe $OL$ oder $OZ$; ferner $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel, welche die Ebenen $LOA$, $LOB$, $LOC$ mit einer festen durch $LO$ gehenden Ebene $LOX$ machen. Unsere Aufgabe ist, $d\alpha/dt$ und $d\lambda/dt$ zu finden und ähnliche Ausdrücke für die andern Axen. Man könnte dabei die Euler'schen geometrischen Gleichungen benutzen, die in Bd. 1, Kap. 5 behandelt wurden, $\alpha$, $\lambda$ für $\theta$ bez. $\psi$ setzen und auf diese Weise die gesuchten Ausdrücke finden; es ist jedoch vortheilhafter, von diesem Verfahren etwas abzuweichen.



Man beschreibe eine Kugel, deren Centrum in dem festliegenden Punkt sich befindet und deren Radius die Einheit ist. Die invariable Linie, die Momentanaxe und die Hauptaxen mögen sie in den Punkten $L$, $I$, $A$, $B$ bez. $C$ schneiden. Die Componente der Geschwindigkeit von $A$ senkrecht zu $LA$ ist dann $\sin\alpha\, d\lambda/dt$. Da sich aber der Körper um $OI$ als Momentanaxe dreht, so bewegt sich der Punkt $A$ senkrecht zu dem Bogen $IA$ und seine Geschwindigkeit ist $\omega \sin IA$. Daraus ergibt sich ebenfalls die Componente senkrecht zum Bogen $LA$ und man erhält

$$\sin\alpha \frac{d\lambda}{dt} = \omega \sin AI \cos LAI = \omega \frac{\cos LI - \cos LA \cos IA}{\sin LA}$$

nach einer Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie. $\omega \cos LI$ ist aber die Componente der Winkelgeschwindigkeit um $OL$, welche $T/G$ gleichkommt, und $\omega \cos IA$ ist die Componente der Geschwindigkeit um $OA$, also gleich $\omega_1$. Daher wird

$$\sin^2\alpha \frac{d\lambda}{dt} = \frac{T}{G} - \omega_1 \cos\alpha,$$

wie sich unmittelbar aus § 19 ergibt. Weil $G\cos\alpha = A\omega_1$ ist, so erhält man die Gleichung

$$\sin^2\alpha \frac{d\lambda}{dt} = \frac{T}{G} - \frac{G\cos^2\alpha}{A} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

der man auch die Form geben kann

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{AT - G^2}{AG} \operatorname{cotg}^2\alpha \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

§ 177. Um $\frac{d\alpha}{dt}$ zu finden, verfährt man folgendermassen. Nach § 140 hat man $\cos\alpha = A\omega_1/G$, $\cos\beta = B\omega_2/G$, $\cos\gamma = C\omega_3/G$. Setzt man in die Euler'sche Gleichung

$$A\frac{d\omega_1}{dt} - (B - C)\omega_2\omega_3 = 0$$

ein, so wird

$$\sin\alpha \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) G \cos\beta \cos\gamma \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Nach § 137 sind aber $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ durch die Gleichungen verbunden

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos^2\alpha}{A} + \frac{\cos^2\beta}{B} + \frac{\cos^2\gamma}{C} &= \frac{T}{G^2} \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Löst man die Gleichungen derart auf, dass man $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ durch $\cos\alpha$ ausdrückt, so ergibt sich leicht

$$\sin^2\alpha \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = -\frac{G^2}{BC}\left(\frac{G^2 - CT}{G^2} - \frac{A - C}{A}\cos^2\alpha\right)\left(\frac{G^2 - BT}{G^2} - \frac{A - B}{A}\cos^2\alpha\right) \quad (5).$$

§ 178. Da die linke Seite der Gleichung (5) nothwendiger Weise reell ist, so müssen, wie man sieht, die Werthe von $\cos^2\alpha$ zwischen gewissen Grenzen liegen. Wenn die Axe, deren Bewegung untersucht wird, die Axe des kleinsten oder grössten Momentes ist, so sei $B$ die Axe des mittleren Momentes. Alsdann muss $\cos^2\alpha$ *zwischen* den beiden Grenzen $\frac{G^2-CT}{G^2}\,\frac{A}{A-C}$ und $\frac{G^2-BT}{G^2}\,\frac{A}{A-B}$ liegen, wenn beide positiv sind. Nach § 188 ist die erstere positiv und kleiner als die Einheit, wovon man sich leicht durch Division des Zählers und Nenners mit $ACG^2$ überzeugen kann. Ist die letztere positiv, so liegt die Spirale, welche von der Hauptaxe auf der Oberfläche einer Kugel beschrieben wird, deren Centrum sich in dem festen Punkt befindet, zwischen zwei concentrischen Kreisen, die sie abwechselnd berührt. Ist die letztere Grenze negativ, so hat $\cos\alpha$ keine untere Grenze. In diesem Fall liegt die Spirale stets zwischen zwei kleinen Kreisen auf der Kugel, von denen der eine dem andern genau gegenüberliegt.

Ist die fragliche Axe dagegen die des mittleren Momentes, so muss $\cos^2\alpha$ *ausserhalb* der obigen zwei Grenzen liegen. Beide sind positiv, jedoch ist eine grösser, die andere kleiner als die Einheit. Die Spirale liegt daher zwischen zwei kleinen einander gegenüberliegenden Kreisen.

Soll $d\lambda/dt$ verschwinden, so muss $G^2\cos^2\alpha = AT$ sein; dadurch wird aber, wie man durch Substitution in (4) sieht, die Summe zweier positiven Grössen gleich Null. *$d\lambda/dt$ behält daher stets dasselbe Vorzeichen.* Wenn die Anfangsbedingungen derart sind, dass $G^2/T$ kleiner als das Trägheitsmoment für die Axe ist, welche die fragliche Spirale beschreibt, so wird, wie man leicht sieht, die Winkelgeschwindigkeit um so grösser, je näher die Axe der invariablen Linie kommt, und am kleinsten, wenn sie am weitesten von ihr entfernt ist. Umgekehrt verhält es sich, wenn $G^2/T$ grösser als das Trägheitsmoment ist.

§ 179. Beisp. 1. Es sei $OM$ eine in dem Körper festliegende Gerade, die durch $O$ geht und das Trägheitsellipsoid für $O$ in $M$ schneidet. $OM'$ sei ferner das Loth von $O$ auf die Berührungsebene in $M$. Wenn $OM=r$, $OM'=p$ und $i$, $i'$ die Winkel sind, die $OM$, $OM'$ mit der invariablen Linie $OL$ macht, zu beweisen, dass

$$\sin^2 i\,\frac{dj}{dt} = \frac{T}{G} - \frac{G}{mpr}\cos i\cos i'$$

ist, worin $j$ den Winkel zwischen der Ebene $LOM$ und einer im Raum festliegenden durch $OL$ gehenden Ebene und $m$ die Masse des Körpers bezeichnet. Dies folgt aus § 19.

Beisp. 2. Wenn $KLK'$ der Kegelschnitt ist, den die invariable Linie auf die in § 161 angegebene Art erzeugt, zu zeigen, dass

$$\lambda = (T/G)\,t + (\text{Winkel } LAK) - \left(\begin{matrix}\text{der von dem Vector}\\ \text{beschriebenen Fläche } LAK\end{matrix}\right)$$

ist, worin $\lambda$ den Winkel bezeichnet, um den die Ebene sich dreht, welche die invariable Linie und die Hauptaxe $OA$ enthält.

Beisp. 3. Wenn man auf den Hauptaxen für den festen Punkt $O$ drei Gerade $OA$, $OB$, $OC$ von gleicher Länge abträgt, so ist die Summe der von ihnen auf der invariablen Ebene beschriebenen Flächen der Zeit proportional. [Poinsot.]

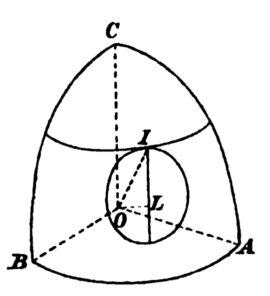
Beisp. 4. Wenn die Längen $OA$, $OB$, $OC$ den Trägheitsradien für die Axen bezüglich proportional sind, so ist die Summe der von diesen Linien auf der invariablen Ebene beschriebenen Flächen ebenfalls der Zeit proportional. [Poinsot.]

Beisp. 5. Ein massives Ellipsoid, dessen Halbaxen $c$, $c\sqrt{3}$, $c\sqrt{5}$ sind, wird um einen Durchmesser in Rotation gesetzt, der in der Ebene der grössten und

kleinsten Axe liegt und mit der ersteren einen Winkel macht, dessen Cotangente $\sqrt{2}$ ist. Man suche die Anfangsrichtungscosinusse der invariablen Linie in Bezug auf die Axen des Ellipsoids und zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit der mittleren Axe um die invariable Linie während der nun folgenden Bewegung constant bleibt.

## Die Bewegung des Körpers, wenn zwei Hauptaxen gleich sind.

§ 180. Der Körper rotire mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um die Momentanaxe $OI$. $OL$ sei das Loth auf die invariable Ebene. Das Trägheitsellipsoid ist im vorliegenden Fall ein Sphäroid, dessen Axe die Axe des ungleichen Momentes in dem Körper ist. Die gleichen Trägheitsmomente seien $A$ und $B$. Aus der Symmetrie der Figur ergibt sich, dass bei dem Rollen des Sphäroids auf der invariablen Ebene die Winkel $LOC$, $LOI$ *constant* bleiben und die drei Axen $OI$, $OL$, $OC$ stets in einer Ebene liegen. Es seien die Winkel $LOC = \gamma$, $IOC = i$.




Benutzt man dieselbe Bezeichnung wie in § 137, so hat man

$$\omega_3 = \omega \cos i, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega^2 \sin^2 i,$$
$$G^2 = (A^2 \sin^2 i + C^2 \cos^2 i)\, \omega^2,$$
$$T = (A \sin^2 i + C \cos^2 i)\, \omega^2$$

und daher

$$\cos \gamma = \frac{C\omega_3}{G} = \frac{C \cos i}{\sqrt{A^2 \sin^2 i + C^2 \cos^2 i}}.$$

Zu diesem Resultat kann man auch auf folgende Art kommen. Wenn in irgend einem Kegelschnitt $i$ und $\gamma$ die Winkel sind, die ein centraler Radiusvector und das Loth auf die Tangente in seinem Endpunkt mit der kleinen Axe bilden und wenn $a$, $b$ die Halbaxen bezeichnen, so ist $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} i \cdot b^2/a^2$. Wendet man diesen Satz auf das Trägheitssphäroid an, so erhält man

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A}{C} \operatorname{tg} i.$$

Ist der Winkel $i$ aus den Anfangsbedingungen bekannt, so lässt sich $\gamma$ aus einem der beiden Ausdrücke ermitteln. Die Bewegung hat nun die folgenden Besonderheiten:

Die invariable Linie beschreibt in dem Körper einen geraden Kegel, dessen Axe die Axe des ungleichen Momentes und dessen halber Winkel an der Spitze $\gamma$ ist.

Die Momentanaxe beschreibt in dem Körper einen geraden Kegel, dessen Axe die Axe des ungleichen Momentes und dessen halber Winkel an der Spitze $i$ ist.

Die Momentanaxe beschreibt im Raum einen graden Kegel, dessen Axe die invariable Linie und dessen halber Winkel an der Spitze $i \sim \gamma$ ist.

Die Axe des ungleichen Momentes beschreibt im Raum einen graden Kegel, dessen Axe die invariable Linie und dessen halber Winkel an der Spitze $\gamma$ ist.

Die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Momentanaxe endlich variirt wie der Radiusvector des Rotationsellipsoids und ist daher constant.

§ 181. *Die gemeinsame Winkelgeschwindigkeit zu finden, mit welcher die Momentanaxe und die Axe des ungleichen Momentes im Raum um die invariable Linie rotirt.*

Es sei $C$ der Endpunkt der Axe der Figur des Trägheitsellipsoids und $\Omega$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Ebene $LOC$ um $OL$ dreht. $CM$, $CN$ seien die Lothe auf $OL$ und $OI$. Da sich nun der Körper um $OI$ dreht, so ist die Geschwindigkeit von $C$ gleich $CN \cdot \omega$. Sie ist aber auch $CM \cdot \Omega$. Weil ferner $CM = OC \sin \gamma$, $CN = OC \sin i$ ist, so ergibt sich sofort $\Omega \sin \gamma = \omega \sin i$, woraus $\Omega$ sich finden lässt.

§ 182. *Die gemeinsame Winkelgeschwindigkeit zu finden, mit welcher die invariable Linie und die Momentanaxe im Körper um die Axe des ungleichen Momentes rotirt.*

$\Omega'$ sei die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Ebene $LOC$ in dem Körper um $OC$ dreht. $LM$, $LN$ seien Lothe von irgend einem Punkt $L$ in der invariablen Linie auf $OC$ und $OI$. Da $OL$ im Raum festliegt und der Körper sich um $OI$ in positiver Richtung, d. h. in der Richtung $ABC$, dreht, so scheint sich der Punkt $L$ bezüglich des Körpers in negativer Richtung mit der Geschwindigkeit $LN \cdot \omega$ zu drehen. Die Geschwindigkeit von $L$ im Körper in positiver Richtung ist aber ebenfalls $LM \cdot \Omega'$. In dem Normalfall ist das Trägheitsellipsoid ein abgeplattetes, da $A$ grösser als $C$ ist; mithin ist $\gamma > i$, $LN = OL \cdot \sin(\gamma - i)$ und $LM = OL \cdot \sin \gamma$. Daraus ergibt sich unmittelbar $\Omega' \sin \gamma = \omega \sin (i - \gamma)$.

§ 183. Beisp. 1. Wenn ein grader Kreiskegel, dessen Höhe $a$ doppelt so gross als der Radius seiner Basis ist, sich um seinen Schwerpunkt als festen Punkt dreht und ursprünglich um eine Axe in Bewegung gesetzt wird, die den Winkel $\alpha$ mit der Axe der Figur macht, so beschreibt die Spitze des Kegels einen Kreis vom Radius $\frac{3}{4} a \sin \alpha$. [Coll. Exam.]

Beisp. 2. Eine kreisförmige Platte dreht sich um ihren Schwerpunkt als festen Punkt. Wenn ihr im Anfang die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um eine Axe mitgetheilt wird, die den Winkel $\alpha$ mit ihrer Ebene macht, so macht ein Loth auf die Ebene in einer Zeit $\tau$ eine Umdrehung im Raum, welche durch die Gleichung $2\pi/\tau = \omega \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}$ gegeben ist. [Coll. Exam.]

Beisp. 3. Ein Körper, der sich frei um einen festen Punkt drehen kann, für welchen zwei der Hauptmomente gleich und kleiner als das dritte sind, wird um irgend eine Axe in Rotation gesetzt. In Folge des Widerstandes der Luft und aus andern Gründen wirkt beständig ein verzögerndes Paar auf ihn ein,

dessen Axe die Momentanaxe und dessen Grösse der Winkelgeschwindigkeit proportional ist. Man zeige, dass die Rotationsaxe fortwährend das Bestreben hat, mit der Axe des ungleichen Momentes zusammenzufallen. Hieraus ergibt sich für die Erdrotation der Satz, dass, wenn auch jetzt Rotations- und Figurenaxe beinahe zusammenfallen, dies nicht nothwendiger Weise immer der Fall war.

[Stone, *Astronomical Notices*, 8. März 1867.]

Beisp. 4. Wenn $A = B$ ist, zu zeigen, dass das conjugirte Ellipsoid ein Sphäroid ist, das die Axe $OC$ des ungleichen Momentes in dem Körper zur Axe hat.

Man zeige ferner, dass die conjugirte Linie $OL'$ in der Ebene liegt, welche $OC$, $OI$ und $OL$ enthält und dass, wenn $\gamma'$ den Winkel $COL'$ bezeichnet, $\operatorname{tg}\gamma' = A \operatorname{tg} i/(2A - C)$ und daher

$$\operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\gamma' = 2 \operatorname{cotg} i$$

ist.

## Die Bewegung, wenn $G^2 = BT$ ist.

§ 184. Auf die Besonderheiten dieses Falles ist schon in § 137 hingewiesen worden. Wenn in Folge der Anfangsbedingungen diese Beziehung zwischen der lebendigen Kraft und der Bewegungsgrösse des Körpers besteht, so wird die ganze Erörterung der Bewegung einfacher[1]).

Die Fundamentalgleichungen der Bewegung sind dann

$$\left.\begin{aligned} A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 &= T \\ A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 &= G^2 = BT \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (1).$$

Löst man auf, so wird

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{B-C}{A-C} \cdot \frac{G^2 - B^2\omega_2^2}{AB} \\ \omega_3^2 &= \frac{A-B}{A-C} \cdot \frac{G^2 - B^2\omega_2^2}{BC} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (2).$$

Es ist aber

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{C-A}{B}\,\omega_1\omega_3,$$

daher

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \mp\sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}} \cdot \frac{G^2 - B^2\omega_2^2}{B^2}.$$

Wenn die Anfangswerthe von $\omega_1$ und $\omega_3$ gleiche Vorzeichen haben, so ist $(C - A)\,\omega_1\omega_3$ negativ und daher auch $\frac{d\omega_2}{dt}$. In dem vorstehenden Ausdruck ist daher das obere oder untere Zeichen zu gebrauchen, je nachdem die Anfangswerthe von $\omega_1$, $\omega_3$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

---

1) Wie es scheint, haben alle Schriftsteller, die über den Gegenstand geschrieben haben, auch diesen Fall untersucht. Beispiele verschiedener Behandlungsart findet man in Legendre, *Traité des Fonctions Elliptiques*, 1825, Bd. 1, S. 382 und Poinsot, *Théorie Nouvelle de la Rotation des Corps*, 1852, S. 104.

Es folgt

$$\frac{B^2}{G^2 - B^2\omega_2^2}\frac{d\omega_2}{dt} = \mp\sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}}.$$

Setzt man $\mp n$ für die rechte Seite und integrirt, so erhält man

$$\frac{G + B\omega_2}{G - B\omega_2} = E\cdot e^{\mp\frac{2G}{B}nt}, \quad \text{daher} \quad \frac{B\omega_2}{G} = \frac{E\cdot e^{\mp\frac{2G}{B}nt} - 1}{E\cdot e^{\mp\frac{2G}{B}nt} + 1},$$

worin $E$ eine unbestimmte Constante ist. Wenn $t$ unbegrenzt wächst, so nähert sich $\omega_2$ dem Grenzwerth $\mp G/B$ und $\omega_1$, $\omega_3$ daher nach (2) der Null.

Daraus schliessen wir, dass die Momentanaxe schliesslich dem Zusammenfallen mit der mittleren Axe der Hauptmomente sehr nahe kommt, thatsächlich aber nie vollständig sich mit ihr deckt. Sie nähert sich dem positiven oder negativen Ende der mittleren Axe, je nachdem der Anfangswerth von $(C - A)\omega_1\omega_3$ positiv oder negativ ist.

§ 185. *Zu ermitteln, was aus den von der invariablen Linie und der Momentanaxe in dem Körper beschriebenen Kegeln wird, wenn* $G^2 = BT$ ist.

Eliminirt man $\omega_2$ aus den Fundamentalgleichungen des letzten Paragraphen, so wird $A(A - B)\omega_1^2 = C(B - C)\omega_3^2$.

Nimmt man alsdann die Hauptaxen für den festen Punkt zu Bezugsaxen, so sind die Gleichungen der invariablen Linie $x/B\omega_1 = y/B\omega_2 = z/C\omega_3$. Durch Elimination von $\omega_1$ und $\omega_3$ erhält man als Ort der invariablen Linie eine der beiden Ebenen

$$\sqrt{\frac{A-B}{A}}\,x = \pm\sqrt{\frac{B-C}{C}}\,z.$$

Die Gleichungen der Momentanaxe sind $x/\omega_1 = y/\omega_2 = z/\omega_3$. Eliminirt man $\omega_1$ und $\omega_3$, so ergibt sich als Ort für die Momentanaxe eine der zwei Ebenen

$$\sqrt{A(A-B)}\,x = \pm\sqrt{C(B-C)}\,z.$$

In diesen Gleichungen ist, weil $z/x$ dasselbe Vorzeichen wie $\omega_3/\omega_1$ hat, das obere oder untere Zeichen zn nehmen, je nachdem die Anfangswerthe von $\omega_1$, $\omega_3$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Die Ebenen gehen durch die mittlere Axe und hängen von den Anfangsbedingungen nur insofern ab, als $G_2 = BT$ sein muss.

Der rollende und gleitende Kegel ist dem von der invariablen Ebene, § 172, beschriebenen reciprok und ist daher die Gerade, welche auf der von der invariablen Linie beschriebenen Ebene senkrecht steht.

Beisp. 1. Man zeige, dass die von der invariablen Linie beschriebenen Ebenen mit den centralen Kreisschnitten des reciproken Trägheitsellipsoids zusammenfallen und auf den Asymptoten desjenigen focalen Kegelschnittes des

Poinsot'schen Ellipsoids senkrecht stehen, welcher in der Ebene des grössten und kleinsten Momentes liegt.

Beisp. 2. Die von der Momentanaxe beschriebenen Ebenen stehen auf den Nabelpunktdurchmessern des reciproken Trägheitsellipsoids senkrecht und sind die Diametralebenen der Asymptoten des Focalkegelschnittes in dem Poinsot'schen Ellipsoid.

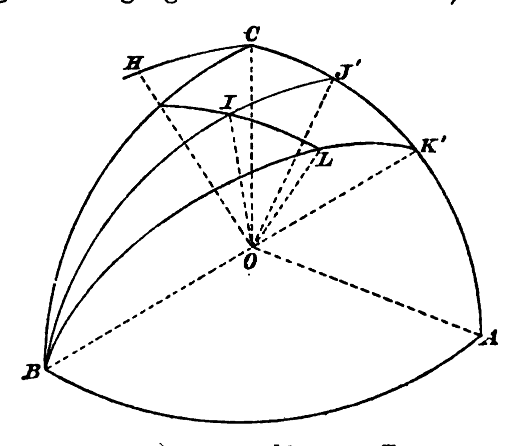
§ 186. Die Beziehungen der verschiedenen in dem Körper festliegenden Ebenen zueinander lassen sich durch die folgende Figur darstellen. $A$, $B$, $C$ seien die Punkte, in denen die Hauptaxen des Körpers eine aus dem Centrum $O$ mit einem der Einheit gleichen Radius beschriebene Kugel treffen. $BLK'$, $BIJ'$ seien die Ebenen, die von der invariablen Linie durch ihre Bewegung um die Momentanaxe erzeugt werden. Nach dem letzten Paragraphen ist dann

$$\operatorname{tg} CK' = \sqrt{\frac{A}{C} \cdot \frac{B-C}{A-B}}, \quad \operatorname{tg} CJ' = \sqrt{\frac{C}{A} \cdot \frac{B-C}{A-B}}.$$

Daraus ergibt sich

$$\operatorname{tg} K'J' = \operatorname{tg} LBI = \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}}.$$

Es ist dies dieselbe Grösse, die in § 184, $n$ genannt wurde. Genau wie in § 163 steht die Richtung der Bewegung von $L$ senkrecht auf $IL$, und ist der Winkel $ILB$ also ein Rechter. *In dem sphärischen Dreieck $ILB$ ist daher der eine Winkel ein Rechter und der andere constant und von allen Anfangsbedingungen unabhängig.*




Genau wie in § 163 ist ferner die Geschwindigkeit von $L$ längs $LB$ gleich $\omega \sin IL$, mithin nach § 143 gleich $\operatorname{tg} IL \,.\, T/G$. Aus dem sphärischen Dreieck $ILB$ erhält man $n \sin BL = \operatorname{tg} IL$. Setzt man dann, wie in § 140, $\beta = BL$, so wird $\frac{d\beta}{dt} = \pm \frac{T}{G} n \sin \beta$.

Haben die Anfangswerthe von $\omega_1$, $\omega_3$ dasselbe Vorzeichen, so dreht sich der Körper um $I$ von $K'$ nach $B$ hin. $BL$ wächst mithin, weil $L$ im Raum festliegt und *bei dieser Figur muss daher das obere Zeichen genommen werden.* Siehe auch § 184.

Man kann auch $\beta$ durch die Zeit ausdrücken. Durch Integration erhält man $\operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{E}\, e^{\mp \frac{G}{B} nt}$. Dasselbe Resultat folgt auch aus § 184, wenn man $\cos \beta = B\omega_2/G$ setzt.

Beisp. 1. Wenn sich der Körper so bewegt, dass $G^2 = BT$ ist, zu beweisen, dass sich auch der conjugirte Körper (§ 174) so bewegt, dass $G'^2 = B'T'$ ist. Daraus leite man ab, dass die conjugirte Linie $OL'$ einen grössten Kreis $BQ'$ beschreibt, der derart durch $B$ geht, dass $BQ'$ und $BK'$ auf entgegengesetzten Seiten gleiche Winkel mit $BJ'$ machen.

Man zeige auch, dass in dem sphärischen Dreieck $IL'B$ ein Winkel, nämlich $IL'B$, ein rechter und ein anderer, nämlich $IBL'$, constant und gleich $\operatorname{arc} \operatorname{tg} n$ ist, worin $n$ die oben erklärte Bedeutung hat.

Beisp. 2. Man zeige, dass die excentrische Linie einen grössten Kreis beschreibt, der durch $B$ geht und $AC$ in einem Punkt $D'$ schneidet, der durch $\operatorname{tg}^2 CD' = \operatorname{tg} CJ' \operatorname{tg} CK'$ bestimmt wird. Ist $E$ der Durchschnitt der excentrischen Linie mit der Kugel, zu zeigen, dass die Bogen $BE$ und $BL$ einander stets gleich bleiben.

§ 187. *Die Bewegung des Körpers im Raum zu finden.* Wie wir schon gesehen haben, bewegt sich der Körper so, dass eine in ihm festliegende Ebene, nämlich die Ebene $BK'$, eine im Raum festliegende Gerade, die invariable Linie $OL$, enthält. Weil der Körper aus irgend einer Lage in die nächste durch die Winkelgeschwindigkeit $\omega \cos IOL = T/G$ um $OL$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin IOL$ um das Loth auf $OL$, nämlich $LH$, gebracht wird, *so dreht sich die in dem Körper festliegende Ebene um die im Raum festliegende Linie mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $T/G$ oder $G/B$.* Zu gleicher Zeit bewegt sich die Ebene so, dass die im Raum festliegende Linie die Ebene mit der variablen Geschwindigkeit $\omega \sin IOL$ zu beschreiben scheint. In dem letzten Paragraphen wurde bewiesen, dass dieser Ausdruck, wenn $\beta$ den Winkel $BL$ bezeichnet, gleich $n \sin \beta \cdot T/G$ ist.

§ 188. Der von $OH$ in dem Körper beschriebene Kegel ist dem von $OL$ beschriebenen reciprok und daraus lassen sich reciproke Theoreme ableiten. Die Bewegung ist daher derart, dass *eine im Körper festliegende Gerade, nämlich $OH$, eine im Raum festliegende Ebene beschreibt, d. h. die auf $OL$ senkrechte Ebene.* Die Gerade bewegt sich längs der Ebene mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $T/G$ oder $G/B$, während die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um diese Gerade $\pm n \sin \beta \cdot G/B$ ist.

§ 189. Die Bewegung der Hauptaxen lässt sich aus den allgemeinen Formeln in § 176 ermitteln. Man kann aber auch so verfahren. Da der Körper sich um $OI$ dreht, so bewegt sich der Punkt $B$ auf der Kugel senkrecht zu dem Bogen $IB$. Die Tangente an die Bahn von $B$ macht daher mit $LB$ einen Winkel, der das Complement zu dem constanten Winkel $IBL$ ist. *Die von der Axe des mittleren Momentes auf einer Kugel, deren Centrum in $O$ liegt, aufgezeichnete Bahn ist eine Loxodrome, die alle durch $L$ gehenden grössten Kreise unter einem Winkel schneidet, dessen Cotangente $\pm n$ ist.*

§ 190. *Die Bewegung der Momentanaxe im Raum zu finden.*

Das Problem ist dasselbe, wie das in § 168 betrachtete. Man kann übrigens das Resultat auch unmittelbar aus § 187 ableiten. Der Winkel $ILB$ ist stets ein Rechter. Daraus folgt, dass die Winkelgeschwindigkeit von $I$ um $L$ dieselbe ist, wie die des Bogens $BL$ um $L$. Die Winkelgeschwindigkeit des letzteren ist aber constant und gleich $T/G$. Bezeichnet man also mit $\varphi$ den Winkel zwischen der die Momentanaxe und die invariable Linie enthaltenden Ebene $LOI$ und einer beliebigen festen durch die invariable Linie gehenden Ebene, so ist $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{T}{G}$.

§ 191. Um die Gleichung des von der Momentanaxe im Raum beschriebenen Kegels zu finden, hat man eine Beziehung zwischen $\zeta$ und $\varphi$ nöthig, worin $\zeta$ den Bogen $IL$ auf der Kugel bedeutet. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $ILB$ erhält man $n \sin \beta = \operatorname{tg} \zeta$ und nach § 186 ist

$$\operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{E}\, e^{\mp \frac{G}{B} nt}.$$

Durch Elimination von $\beta$ findet man $\zeta$ als Function von $t$. Es wird

$$\frac{2n}{\operatorname{tg} \zeta} = \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{E}\, e^{\mp \frac{G}{B} nt} + \frac{1}{\sqrt{E}}\, e^{\pm \frac{G}{B} nt}.$$

Nach dem letzten Paragraphen ist $\varphi = (T/G)t + F$, unter $F$ eine Constante verstanden. Wir wollen in die erste Gleichung den Werth von $t$ aus der zweiten einsetzen und die Ebene, von welcher aus $\varphi$ gemessen wird, so wählen, dass $\sqrt{E}\, e^{\mp nF} = 1$ ist.

Die Gleichung des von der Momentanaxe im Raum beschriebenen Kegels ist dann

$$2n \operatorname{cotg} \zeta = e^{n\varphi} + e^{-n\varphi}.$$

Für $\varphi = 0$ wird $\operatorname{tg} \zeta = n$. Die im Raum festliegende Ebene, von welcher aus $\varphi$ gemessen wird, fällt daher mit der beweglichen Ebene, welche die Axen des grössten und kleinsten Momentes enthält, in dem Augenblick zusammen, in welchem auch die invariable Linie in die letztere fällt.

Zeichnet man den Kegel auf, so sieht man, dass er eine Kugel, deren Centrum im festliegenden Punkt sich befindet, in einer Spirale schneidet. Die von den positiven und negativen Werthen von $\varphi$ bestimmten Zweige sind vollkommen gleich. Wenn $\varphi$ positiv wächst, so nimmt der radiale Bogen $\zeta$ beständig ab, die Spirale macht daher eine unendlich grosse Anzahl von Windungen um den Punkt $L$, von denen die letzte unendlich klein ist. Siehe § 151.

## Correlative und contrarelative Körper.

§ 192. *Die Bewegungen verschiedener Körper zu vergleichen, auf welche Anfangspaare eingewirkt haben, deren Ebenen parallel sind.*

Wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel bezeichnen, welche die Hauptaxen $OA$, $OB$, $OC$ eines Körpers für den festen Punkt $O$ mit der invariablen Linie $OL$ machen, so lassen sich nach § 140 die Euler'schen Gleichungen in die Form bringen

$$\frac{d \cos\alpha}{dt} + G\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)\cos\beta\cos\gamma = 0 \quad \ldots \quad (1),$$

wozu noch zwei ähnliche kommen. Sind $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel, welche die Ebenen $LOA$, $LOB$, $LOC$ mit einer beliebigen im Raum festliegenden durch $OL$ gehenden Ebene machen, so ist

$$\sin^2\alpha \frac{d\lambda}{dt} = \frac{T}{G} - \frac{G\cos^2\alpha}{A} \quad \ldots \quad (2)$$

mit ähnlichen Gleichungen für $\mu$ und $\nu$.

Bezeichnen die accentuirten Buchstaben ähnliche Grössen für einen andern Körper, so sind die entsprechenden Gleichungen für ihn

$$\frac{d \cos\alpha'}{dt} + G'\left(\frac{1}{B'} - \frac{1}{C'}\right)\cos\beta'\cos\gamma' = 0 \quad \ldots \quad (3),$$

$$\sin^2\alpha' \frac{d\lambda'}{dt} = \frac{T'}{G'} - \frac{G'\cos^2\alpha'}{A'} \quad \ldots \quad (4).$$

Wenn nun bei den Körpern

$$G\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) = G'\left(\frac{1}{B'} - \frac{1}{C'}\right), \text{ etc.} = \text{etc.} \quad \ldots \quad (5)$$

ist, so sind die Gleichungen (1) zur Ermittlung von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ dieselben, wie die Gl. (3) zur Ermittlung von $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$. Werden daher die beiden Körper im Anfang in eine solche Lage gebracht, dass ihre Hauptaxen parallel laufen, und durch Momentanpaare in Bewegung gesetzt, deren Grösse $G$ und $G'$ ist und deren Ebenen parallel sind, so haben nach dem Verlauf irgend einer Zeit $t$ die Hauptaxen der beiden Körper noch die gleiche Neigung gegen die gemeinschaftliche Axe der Paare.

Den Gleichungen (5) kann man die Gestalt geben

$$\frac{G}{A} - \frac{G'}{A'} = \frac{G}{B} - \frac{G'}{B'} = \frac{G}{C} - \frac{G'}{C'} \quad \ldots \quad (6).$$

Da nach § 142 die lebendige Kraft durch

$$\frac{T}{G^2} = \frac{\cos^2\alpha}{A} + \frac{\cos^2\beta}{B} + \frac{\cos^2\gamma}{C} \quad \ldots \quad (7)$$

gegeben ist, so sieht man, dass jeder der Ausdrücke in (6) gleich $T/G - T'/G'$ ist.

Daraus folgt unmittelbar durch Subtraction der Gleichung (2) von (4) und Division durch $\sin^2\alpha$

$$\frac{d\lambda}{dt}-\frac{d\lambda'}{dt}=T/G-T'/G' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

mit ähnlichen Gleichungen für $\mu$ und $\nu$. Werden daher die beiden Körper, wie zuvor, so in Bewegung gesetzt, dass die Hauptaxen einzeln einander parallel laufen, so lässt sich der Parallelismus der Hauptaxen dadurch wieder herstellen, dass man den Körper, dessen Hauptaxen $A'$, $B'$, $C'$ sind, um die gemeinschaftliche Axe der Momentanpaare den Winkel $(T/G-T'/G')\,t$ in der Richtung beschreiben lässt, in welcher positive Momentanpaare wirken.

§ 193. Sind die Paare $G$ und $G'$ gleich, so wird die Bedingung (6)

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{A'}=\frac{1}{B}-\frac{1}{B'}=\frac{1}{C}-\frac{1}{C'}=\frac{T-T'}{G^2} \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Die Körper heissen dann *correlative.* Nimmt man für beide Körper solche Trägheitsellipsoide, dass das Trägheitsmoment für jedes dasselbe Verhältniss zu dem Quadrat des reciproken Radiusvectors hat, so sind die Ellipsoide offenbar confocal.

Sind die Paare $G$ und $G'$ gleich und entgegengesetzt, so wird die Gleichung (6)

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{A'}=\frac{1}{B}+\frac{1}{B'}=\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}=\frac{T+T'}{G^2} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und die Körper heissen *contrarelative.*

§ 194. *Die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Körper in irgend einem Augenblick mit einander zu vergleichen.*

Ist $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit des einen Körpers in irgend einem Moment, so hat man bei der gewöhnlichen Bezeichnung

$$\omega^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=G^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{A^2}+\frac{\cos^2\beta}{B^2}+\frac{\cos^2\gamma}{C^2}\right)$$

und, wenn dieselben Buchstaben accentuirt ähnliche Grössen für den andern Körper bezeichnen,

$$\omega'^2=G'^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{A'^2}+\frac{\cos^2\beta}{B'^2}+\frac{\cos^2\gamma}{C'^2}\right).$$

Erinnert man sich aber der Bedingung (6), so erhält man

$$\omega^2-\omega'^2=\left(\frac{T}{G}-\frac{T'}{G'}\right)\left[\cos^2\alpha\left(\frac{G}{A}+\frac{G'}{A'}\right)+\cos^2\beta\left(\frac{G}{B}+\frac{G'}{B'}\right)+\cos^2\gamma\left(\frac{G}{C}+\frac{G'}{C'}\right)\right].$$

Berücksichtigt man (7), so sieht man leicht, dass die in den eckigen Klammern stehende Grösse $T/G+T'/G'$ ist. Daher wird

$$\omega^2-\omega'^2=\frac{T^2}{G^2}-\frac{T'^2}{G'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

§ 195. Beisp. 1. Stehen zwei Körper in solcher Relation, dass ihre reciproken Trägheitsellipsoide confocal sind und ist ihre anfängliche Lage derart, dass die Winkel $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$, welche ihre Hauptaxen mit der invariablen Linie machen, durch die Gleichungen

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{A}} = \frac{\cos\alpha'}{\sqrt{A'}}, \quad \frac{\cos\beta}{\sqrt{B}} = \frac{\cos\beta'}{\sqrt{B'}}, \quad \frac{\cos\gamma}{\sqrt{C}} = \frac{\cos\gamma'}{\sqrt{C'}}$$

verbunden sind und werden ferner die Körper durch zwei Momentanpaare $G$, $G'$ in Bewegung gesetzt, die $\sqrt{ABC}$ bezüglich $\sqrt{A'B'C'}$ proportional sind, so bestehen die obigen Beziehungen zwischen den Winkeln $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$ stets. Sind $p$ und $p'$ reciprok zu $d\lambda/dt$ und $d\lambda'/dt$, so bleibt $Gp - G'p'$ während der Bewegung constant, worin $\lambda$, $\lambda'$, etc. die Winkel sind, welche die Ebenen $LOA$, $L'O'A'$ zur Zeit $t$ mit ihren Lagen zur Zeit $t = 0$ machen.

Beisp. 2. Sollen die Winkel, welche die Hauptaxen mit der Axe des Paares machen, in jedem Körper dieselben sein, so müssen die invariablen Kegel und daher auch ihre reciproken, d. h. die Poinsot'schen rollenden und gleitenden Kegel, in jedem Körper die gleichen sein. So sind in beiden Körpern die rollenden Bewegungen dieser Kegel gleich, während die gleitenden verschieden sein können. Daraus leite man die Gleichungen (8) und (11) ab. Diese Art des Beweises verdankt man zum Theil Cayley.

§ 196. **Sylvester's Messung der Zeit für die kräftefreie Bewegung.** Wenn sich ein Körper um einen festen Punkt dreht, so wird seine Bewegung im Raum so dargestellt, dass man sein Trägheitsellipsoid auf einer festen Ebene rollen lässt. Dadurch erhält man aber keine Vorstellung von *der Zeit*, welche der Körper braucht, um von einer Lage in die andre zu kommen. Die vorstehenden Paragraphen setzen uns in den Stand, diesem Mangel abzuhelfen.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, das Trägheitsellipsoid rolle auf einer horizontalen Ebene unterhalb des festen Punktes $O$ und die Momentanaxe $OI$ beschreibe um die Axe von $A$ eine Polodie. Wir wollen nun diejenige Hälfte des Ellipsoids entfernen, welche von der Ebene $BC$ begrenzt wird und die feste Ebene nicht berührt. Wir ersetzen diese Hälfte durch die eines andern kleineren Ellipsoids, welches mit dem ersten confocal ist. Eine Ebene werde dann construirt, welche der invariablen Ebene parallel ist und das letztere Ellipsoid in $I'$ berührt und auch sie liege im Raum fest. Die beiden Halbellipsoide können als die Trägheitsellipsoide zweier correlativer Körper angesehen werden. Wären sie nicht aneinander befestigt und könnten sich frei ohne gegenseitige Einwirkung bewegen, so würde ein jedes rollen; das eine auf der festen Ebene, die in $I$ berührt, das andre auf der, die in $I'$ berührt. Nach den §§ 192 und 193 lässt sich das obere Ellipsoid als das kleinere in Parallelismus mit dem unteren durch eine Rotation $Gt(1/A - 1/A')$ um die invariable Linie bringen. Lässt man nun die obere Ebene, auf welcher das obere Ellipsoid rollt, um die invariable Linie als feste Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $G(1/A - 1/A')$ rotiren, so befinden sich die beiden Ellipsoide immer

im Zustand des Parallelismus und können als starr miteinander verbunden angesehen werden.

Man nehme jetzt an, die obere Berührungsebene sei vollkommen rauh und im Stande, sich in einer horizontalen Ebene um eine verticale durch den festen Punkt gehende Axe zu drehen. Lässt man die ganze Figur mit dem unteren Theil ihrer Fläche auf der festen unteren Ebene rollen, so veranlasst die Reibung zwischen der oberen Fläche und der Ebene eine Rotation der letzteren um ihre Axe[1]). Die verflossene Zeit steht dann in constantem Verhältniss zu dieser Rotationsbewegung, welche man auf einem absolut festliegenden Zifferblatt unmittelbar über der rotirenden Ebene abmessen kann.

§ 197. Die vorstehende Theorie, soweit sie sich auf correlative und contrarelative Körper bezieht, ist einer Abhandlung Sylvester's in den *Philosophical Transactions*, 1866 entnommen. Er untersucht auch, in welchen Fällen sich das obere Ellipsoid auf eine Scheibe reduciren lässt und kommt zu dem Resultat, dass, wenn zwei der Hauptmomente gleich sind, nur eine solche Scheibe existirt, sonst dagegen stets zwei und nicht mehr. Von diesen letzteren ist die eine dem gegebenen Körper correlativ, die andere contrarelativ. Sie stehen senkrecht auf der Axe des grössten bezügl. kleinsten Trägheitsmomentes.

§ 198. **Poinsot's Messung der Zeit.** Poinsot hat gezeigt, dass die Bewegung des Körpers dadurch hergestellt werden kann, dass man einen im Körper festliegenden Kegel auf einer Ebene rollen lässt, die sich gleichförmig um die invariable Linie dreht. Nimmt man, wie bei dem vorigen Zeitmesser, an, die Ebene sei rauh, und werde von dem Kegel bei seinem Rollen auf ihr herumgedreht, so misst der Winkel, um den sich die Ebene gedreht hat, die verflossene Zeit.

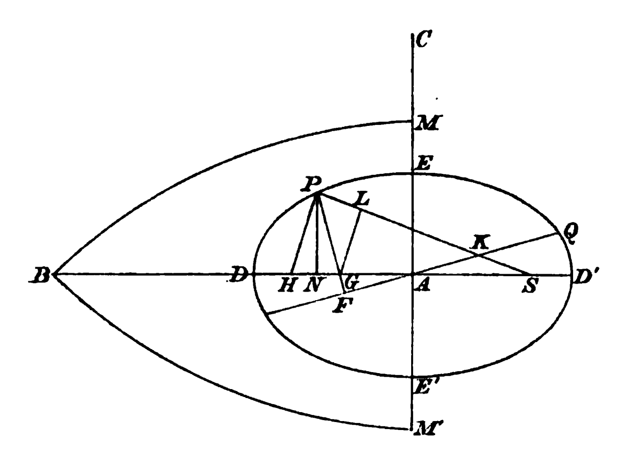
## Der sphärische Kegelschnitt oder die sphärische Ellipse.

§ 199. Die folgenden Sätze über den sphärischen Kegelschnitt lassen sich für die Theoreme in § 157 mit Vortheil verwenden. Sie scheinen uns neu zu sein. Die Curve werde durch die Linie $DED'E'$ dargestellt. Wie früher, wird angenommen, das Auge befinde sich in dem durch $A$ gehenden Radius und betrachte die Kugel aus grosser Entfernung. Die drei Hauptebenen des Kegels

1) Bei dem Rollen des Ellipsoids auf der unteren Ebene muss eine gewisse geometrische Bedingung erfüllt werden, damit der aus den beiden Halbellipsoiden bestehende Körper die obere Ebene weder verlässt, noch sie nach oben zu drücken sucht. Sie besteht darin, dass in der Ebene, welche $OI$, $OI'$ enthält, auch die invariable Linie liegen muss, denn nur in diesem Fall lässt sich die Rotation um $OI$ in eine Componente um $OI'$ und eine andre um die invariable Linie zerlegen. Dass diese Bedingung erfüllt werden muss, geht aus den Betrachtungen im Text hervor. Es folgt aber auch aus den bekannten Eigenschaften confocaler Ellipsoide.

schneiden die Kugel in den drei Quadranten $AB$, $BC$, $CA$ und jeder der drei Punkte $A$, $B$, $C$ kann Centrum genannt werden. Die Bogen $AD$ und $AE$ werden mit $a$ und $b$ bezeichnet.

Die Buchstaben sind nicht durchweg ebenso, wie bei den dynamischen Anwendungen der Curve, sondern so gewählt worden, dass sie möglichst mit den




Buchstaben übereinstimmen, die man bei ebenen Kegelschnitten gewöhnlich benutzt. Auf diese Art tritt die Analogie zwischen der ebenen und sphärischen Ellipse mehr hervor.

1. *Die Gleichung des Kegelschnittes.* Man ziehe den Bogen $PN$ senkrecht auf $AD$ und es sei $PN = y$, $AN = x$. Es möge die Verlängerung von $NP$ den über $DD'$ als Durchmesser beschriebenen kleinen Kreis in $P'$ schneiden und $NP'$ möge *die excentrische Ordinate* heissen und mit $y'$ bezeichnet werden. Alsdann ist

$$\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} y'} = \text{Constante} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}, \quad \cos a = \cos y' \cos x.$$

2. Die Projection der Normalen $PG$ auf den vom Brennpunkt aus gezogenen Radiusvector $SP$, d. h. also $PL$, ist constant und dem halben Parameter gleich. Auch $\frac{\operatorname{tg} GL}{\sin PN}$ ist constant.

Wenn $2l$ den Parameter bedeutet, so ist $\operatorname{tg} l = \frac{\operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg} a}$.

3. Wenn $QAF$ ein Bogen ist, der $PG$ rechtwinklig schneidet, so kann $QA$ *die halbe* zu $AP$ *Conjugirte* heissen. Es ist dann $\operatorname{tg} PG \cdot \operatorname{tg} PF = \operatorname{tg}^2 b$.

4. Die Länge $PK$, welche der conjugirte Diameter von dem focalen Radiusvector abschneidet, ist constant und gleich $a$. Dies folgt aus (2) und (3).

5. Wenn $1 - e^2 = \frac{\sin^2 b}{\sin^2 a}$, so kann man $e$ *die Excentricität* des sphärischen Kegelschnittes nennen. Es ist dann $\operatorname{tg} AG = e^2 \operatorname{tg} AN$.

6. Ist auch $S$ ein Brennpunkt, so hat man $SE = HE = a$, $\operatorname{tg} SA = e \operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg}(SP - a) = e \operatorname{tg} AN$.

7. Die Polargleichungen des Kegelschnittes sind

$$\frac{\operatorname{tg} l}{\operatorname{tg} SP} = 1 - \frac{e}{\cos^2 b} \cos PSA, \quad \frac{\sin^2 b}{\sin^2 AP} = 1 - e^2 \cos^2 PAD.$$

8. Ist $\varrho$ der Krümmungsradius für $P$, so ist $\operatorname{tg} \varrho = \frac{\operatorname{tg}^3 n}{\operatorname{tg}^2 l}$.

9. Sieht man $AP$, $AQ$ als conjugirte Halbmesser nach der obigen Definition an, so ist

$$\left.\begin{array}{r}\sin^2 AP + \sin^2 AQ = \sin^2 a + \sin^2 b \\ \sin AQ \cdot \sin PF = \sin a \,.\, \sin b\end{array}\right\}, \quad \operatorname{tg} PAD \cdot \operatorname{tg} QAD = -\frac{\sin^2 b}{\sin^2 a}.$$

10. Wenn $p$ das Loth vom Centrum $A$ auf die Tangente in $P$ bezeichnet, so ist

$$\frac{\operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg}^2 p} = \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2 AP.$$

11. $\operatorname{tg}^2 PG - \operatorname{tg}^2 l = \frac{e^2}{\cos^4 b} \sin^2 PN, \quad \frac{\operatorname{tg}^2 PG}{\sin SP \cdot \sin HP} = \frac{\operatorname{tg}^2 b}{\sin^2 a}.$

12. $$\left.\begin{array}{r}\sin^2 a - \sin^2 AP \\ = \sin^2 AQ - \sin^2 b\end{array}\right\} = \frac{e^2}{1 - e^2} \sin^2 PN.$$

Zusatz. $\operatorname{tg}^2 PG = \frac{\operatorname{tg}^2 b}{\cos^2 b \sin^2 a} (\cos^2 AP - \cos^2 a \cos^2 b).$

Wenn $\sin AM = \sin AM' = \frac{\sin b}{\sin a}$ ist, so sind die Ebenen der Bogen $BM$ und $BM'$ den Kreisschnitten des Kegels parallel. Einige Eigenschaften dieser Bogen gleichen denen der Asymptoten, wenn $B$ als Centrum des Kegelschnittes angesehen wird. Die Sätze, welche den sphärischen Kegelschnitt mit den Bogen $BM$, $BM'$ verbinden, findet man in Dr. Salmon's *Solid Geometry*, viele andere Eigenschaften ferner in Dr. Frost's *Solid Geometry*.

## Beispiele

(den an der Universität und den Colleges gegebenen Examination papers entnommen).

1. Ein grader Kegel, dessen Basis eine Ellipse ist, wird in seinem Schwerpunkt $G$ gestützt und erhält eine Bewegung um eine Axe, welche durch $G$ geht, senkrecht auf der Linie steht, die $G$ mit dem Ende $B$ der kleinen Axe der Basis verbindet, und in der Ebene liegt, welche $B$ und die Axe des Kegels enthält. Man bestimme die Lage der invariablen Ebene.

*Antwort.* Die Normale zur invariablen Ebene liegt in der durch die Axe des Kegels und die Momentanaxe gehenden Ebene unter einem Winkel, dessen Tangente $h(h^2 + 4a^2)/16b(a^2 + b^2)$ ist.

2. Ein materieller Punkt von der Masse $m$ wird an jedem Ende der Umdrehungsaxe eines Rotationsellipsoids befestigt und der Schwerpunkt liegt fest. Wenn der Körper um irgend eine Axe in Rotation gesetzt wird, zu zeigen, dass das Rotationsellipsoid während der Bewegung auf einer festen Ebene rollt, vorausgesetzt, dass die Bedingung $m/M = \frac{1}{10}(1 - a^2/c^2)$ erfüllt ist, worin $M$ die Masse des Rotationsellipsoids, $a$ und $c$ die Axen der Meridianellipse und $c$ zugleich die Axe der Figur ist.

3. Einer Lamelle von beliebiger Gestalt, welche mit der Winkelgeschwindigkeit $\alpha$ um eine durch ihren Schwerpunkt gehende, auf ihrer Ebene senkrechte Axe rotirt, wird die Winkelgeschwindigkeit $\alpha(B + C)^{\frac{1}{2}}/(B - C)^{\frac{1}{2}}$ um ihre Hauptaxe des kleinsten Momentes mitgetheilt, worin $A$, $B$, $C$ nach abnehmender Grösse geordnet sind. Man zeige, dass zu irgend einer Zeit $t$ die Winkelgeschwindigkeiten um die Hauptaxen bezüglich

$$\frac{2\alpha}{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}, \quad -\sqrt{\frac{B + C}{B - C}}\, \alpha \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{B + C}{B - C}} \frac{2\alpha}{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}$$

sind, und dass die Lamelle schliesslich um die Axe des mittleren Momentes rotirt.

4. Ein starrer Körper, an dem keine Kräfte angreifen, bewegt sich um seinen Schwerpunkt; man beweise, dass die Momentanaxe, wenn sie in irgend einem Augenblick in der Ebene liegt, in welcher einer oder der andere der graden um das Centralellipsoid beschriebenen Kreiscylinder berührt, d. h. welche diese Berührungspunkte enthält, während der ganzen Bewegung diese Lage hat.

Wenn $a$, $b$, $c$ die nach abnehmender Grösse geordneten Halbaxen des Centralellipsoids, $e_1$, $e_2$, $e_3$ die Excentricitäten seiner Hauptschnitte, $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ die Anfangscomponenten der Winkelgeschwindigkeit des Körpers um seine Hauptaxen bezeichnen, zu beweisen, dass die Momentanaxe nur unter der Bedingung in der oben beschriebenen Ebene liegt, wenn $\Omega_1/e_1 = (ab/c^2)(\Omega_3/e_3)$ ist.

5. Eine starre Lamelle, an welcher keine Kräfte angreifen, kann sich um einen ihrer Punkte, der festliegt, frei drehen. Sie wird um eine in ihrer Ebene liegende Gerade, für welche das Trägheitsmoment $Q$ ist, in Bewegung gesetzt. Man zeige, dass die grösste sich zur kleinsten Winkelgeschwindigkeit wie $\sqrt{A+B} : \sqrt{B+Q}$ verhält, worin $A$, $B$ die Hauptträgheitsmomente um Axen in der Ebene der Lamelle sind. Siehe § 150, Beisp. 2.

6. Wenn die Erde ein starrer Körper wäre, an dem keine Kräfte angriffen und der um einen Durchmesser rotirte, welcher keine Hauptaxe ist, zu zeigen, dass die Ortsbreiten variiren und ihre Werthe sich jedesmal dann wiederholen würden, wenn $\sqrt{A-B}\sqrt{A-C}\int \omega_1 dt$ ein Vielfaches von $2\pi\sqrt{BC}$ wird. Wenn ein Mensch sich niederlegt, wenn seine Breite ein Minimum ist und aufsteht, wenn sie ein Maximum wird, zu zeigen, dass er die lebendige Kraft vergrössern und auf diese Art veranlassen würde, dass sich der Pol der Erde von der Axe des grössten Trägheitsmomentes nach der des kleinsten hin bewegt.

7. Wenn $d\theta$ der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Lagen der Momentanaxe ist, zu beweisen, dass

$$\omega^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\omega_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\omega_3}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$$

ist.

Für den Elementarbogen einer Curve gelten die beiden folgenden Ausdrücke

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r\,d\theta)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2.$$

Wenn die Curve eine Polodie ist, so haben $r$, $x$, $y$, $z$ dasselbe constante Verhältniss zu $\omega$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, § 150. Durch Substitution erhält man die Antwort unmittelbar.

8. Wenn $n$ die Winkelgeschwindigkeit der durch die invariable Linie und die Momentanaxe gelegten Ebene um die invariable Linie ist und $\lambda$ die Componente der Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die invariable Linie, zu beweisen, dass

$$\left(\frac{1}{2}\frac{dn}{dt}\right)^2 + (n-\lambda)\left(n-\frac{G}{A}\right)\left(n-\frac{G}{B}\right)\left(n-\frac{G}{C}\right) = 0$$

ist.

Die Ferrers'sche Auflösung siehe *Quarterly Journal*, 1864.

9. Wenn sich ein Körper auf beliebige Art bewegt und die Richtungen aller Kräfte durch den Schwerpunkt gehen, zu beweisen, dass

$$\frac{d(\omega^2)}{dt} + 2\frac{d}{dt}(\log \omega_1)\frac{d}{dt}(\log \omega_2)\frac{d}{dt}(\log \omega_3) = 0$$

ist, worin $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten um die Hauptaxen für den Kräfte durch Schwerpunkt und $\omega$ die resultirende Winkelgeschwindigkeit bedeutet.

---

## Kapitel V.

# Die Bewegung der Körper unter der Einwirkung beliebiger Kräfte.

§ 200. In diesem Kapitel sollen als Beispiele zu den in dem ersten Kapitel erklärten Methoden einige Fälle der Bewegung starrer Körper in dem Raum von drei Dimensionen untersucht werden. Es wird für den Leser instructiv sein, wenn er ihre Lösung auch auf andre Art versucht; die Lagrange'schen Gleichungen z. B. lassen sich oft mit Vortheil verwenden.

In jedem Abschnitt dieses Kapitels soll zuerst das allgemeine Verfahren erklärt und dann eine Anzahl von Beispielen betrachtet werden. Als solche sind diejenigen Fälle der Bewegung eines Körpers ausgesucht worden, welche offenbar das meiste Interesse bieten. Da aber nicht alle Resultate gleich werthvoll sind und ausserdem einige Methoden nur in geringem Mass von den bereits erklärten abweichen, so schien es nicht nöthig zu sein, in jedem Fall die ganze algebraische Ausarbeitung zu bringen. Der Gang der Auflösung wird mehr oder weniger vollständig skizzirt und die Resultate werden angegeben. Dabei wird vorausgesetzt, dass der Leser im Stande ist, die fehlenden Zwischenstufen selbst zu ersetzen. Es wird sein Interesse an dem Gegenstand wesentlich vermehren, wenn er nach dem Durchlesen der ersten Paragraphen eines jeden Abschnittes die folgenden Probleme auf seine eigene Art in Angriff nimmt. Er kann dann seine Resultate mit den hier skizzirten Lösungen vergleichen.

## Die Bewegung des Kreisels[1]).

§ 201. *Zwei Hauptmomente für den Schwerpunkt eines Körpers sind gleich und der Körper bewegt sich um einen festen Punkt O in der Axe des ungleichen Momentes unter der Wirkung der Schwere; seine Bewegung zu bestimmen.* Man vergleiche Bd. 1, Kap. 8, wo eine theilweise Lösung gegeben wurde.

---

1) Siehe Appell, *Mécanique*, Paris 1896, Bd. 2, S. 344, wo auch Literatur angegeben ist.

Um einen Anhaltspunkt für unsere Vorstellungen zu gewinnen, wollen wir uns denken, der Körper sei ein Kreisel, der sich auf einer vollkommen rauhen horizontalen Ebene dreht.

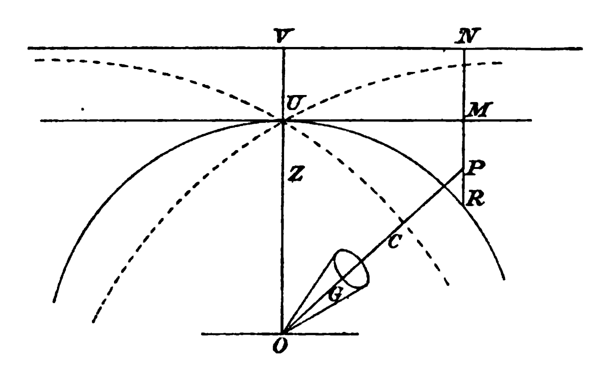
Die Axe $OZ$ sei vertical, und $OC$ möge die Axe des ungleichen Momentes für den Schwerpunkt sein und die Axe des Körpers heissen. $h$ sei der Abstand des Schwerpunktes $G$ des Körpers von dem festen Punkt $O$ und *die Masse des Körpers sei die Einheit.* $OA$ sei ferner die Hauptaxe für $O$, welche in der Ebene $ZOC$ liegt, $OB$ die auf dieser Ebene senkrechte Hauptaxe.

Nimmt man die Momente um $OC$, so erhält man aus den Euler'schen Gleichungen (Bd. 1, Kap. V)

$$C\frac{d\omega_3}{dt} - (A - B)\,\omega_1\omega_2 = N.$$

In unserm Fall ist aber $A = B$ und da der Schwerpunkt in der Axe $OC$ liegt, $N = 0$; $\omega_3$ ist daher constant und seinem Anfangswerth gleich. Er möge $n$ heissen.

Wir wollen auf der Axe $OC$ in der Richtung $OG$ die Länge $OP = A/h$ auftragen. Dann ist $P$ nach Bd. 1, Kap. 3 der Schwingungs-




mittelpunkt des Körpers[1]). Diese Länge sei $l$, $\theta$ die Neigung der Axe $OC$ gegen die Verticale und $\psi$ der Winkel, den die Ebene $ZOC$ mit einer im Raum festliegenden, durch $OZ$ gehenden Ebene macht. Man findet dann mittelst derselben Betrachtungen wie bei den Euler-schen Gleichungen (Bd. 1, Kap. 5) die Componenten der Geschwindigkeit von $P$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{senkrecht zur Ebene } ZOC = -l\omega_1 = l\sin\theta\, d\psi/dt \\ \text{parallel zur Ebene } ZOC = \phantom{-}l\omega_2 = l d\theta/dt \end{array}\right\} \quad . \quad (1).$$

Das Moment der Bewegungsgrösse um $OZ$ bleibt während der Bewegung offenbar constant. Da die Richtungscosinusse von $OZ$, auf

1) Um die Figur nicht undeutlich zu machen, ist der durch einen Kreisel dargestellte Körper kleiner gezeichnet, als er sein sollte.

$OA$, $OB$, $OC$ bezogen, $-\sin\theta$, 0 und $\cos\theta$ sind, so erhält man mithin

$$-A\omega_1 \sin\theta + Cn\cos\theta = E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin $E$ eine Constante bedeutet, die von den Anfangsbedingungen abhängt und deren Werth sich aus dieser Gleichung ergibt, wenn man die Anfangswerthe von $\omega_1$ und $\theta$ einsetzt.

Die Gleichung der lebendigen Kraft liefert

$$A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + Cn^2 = F - 2gh\cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wobei $F$ eine Constante ist und durch Substitution der Anfangswerthe von $\omega_1$, $\omega_2$ und $\theta$ gefunden wird[1]).

§ 202. **Die Bewegung des Schwingungsmittelpunktes.** Wir wollen auf der Verticalen $OZ$ in einer der Schwere entgegengesetzten Richtung, welche die positive sei, zwei Längen $OU = El/Cn$, $OV = l(F - Cn^2)/2gh$ abtragen. Diese Längen wollen wir der Kürze wegen $OU = a$ und $OV = b$ setzen. Man lege durch $U$ und $V$ zwei horizontale Ebenen und die durch $P$ gezogene Verticale möge sie in $M$ und $N$ schneiden. Aus den Gleichungen (2) und (3) erhält man dann mit Hülfe von (1)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{die Componente der Geschwindigkeit}\\ \text{von } P \text{ senkrecht zur Ebene } ZOC\end{array}\right\} = (Cn/h)\,\mathrm{tg}\,PUM \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

$$(\text{Geschwindigkeit von } P)^2 = 2g\,PN \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

*Die resultirende Geschwindigkeit von $P$ ist daher derjenigen gleich, welche $P$ erlangen würde, wenn es von der durch $V$ gelegten Horizontalebene herabfiele, und die Componente der Geschwindigkeit von $P$ senkrecht zur Ebene $ZOP$ ist der Tangente des Winkels proportional, den $PU$ mit einer horizontalen Ebene macht.*

Aus dem letzten Resultat folgt, dass die Ebene $POV$, wenn sich $P$ unter der durch $U$ gelegten Horizontalebene befindet, in derselben Richtung um die Verticale rotirt, in der sich der Körper um seine Axe dreht, d. h. nach der gewöhnlichen Regel, dass $OV$ und $OP$ die positiven Richtungen der Rotationsaxen sind. Erhebt sich $P$ über die durch $U$ gehende Horizontalebene, so dreht sich die Ebene $POV$ in entgegengesetzter Richtung um die Verticale. Ist $P$ sowohl unter der durch $U$ als auch unter der durch $O$ gehenden Horizontalebene, so gelten diese Resultate noch immer; sieht man den Kreisel aber von oben an, so scheint sich seine Axe um die Verticale in der seiner Rotation entgegengesetzten Richtung zu drehen. *In allen Fällen, in welchen sich $P$ unter der Ebene $UM$*

1) Eliminirt man $\omega_1$, $\omega_2$ aus den Gleichungen (1), (2), (3), so erhält man zwei Gleichungen, aus denen sich $\theta$ und $\psi$ durch Quadraturen ableiten lassen. Zuerst hat sie Lagrange in seiner *Mécanique Analytique* gegeben und später Poisson in dem *Traité de Mécanique*. Der Erstere hält sich nicht lange bei ihnen auf und geht dazu über, die kleinen Schwingungen der Körper von beliebiger Gestalt zu erörtern, die an einem festen Punkt aufgehängt sind und unter der Wirkung der Schwere stehen. Der Letztere beschränkt die Gleichungen auf den Fall, in welchem der Körper eine Anfangsgeschwindigkeit nur um seine Axe hat und benutzt sie zur directen Bestimmung der kleinen Schwingungen eines Kreisels (1), wenn seine Axe nahezu vertical ist und (2), wenn seine Axe einen nahezu constanten Winkel mit der Verticalen macht. Seine Resultate haben daher selbstverständlich keine so ausgedehnte Gültigkeit, wie die von uns im Texte gegebenen.

*befindet, bewegt sich der tiefste Punkt des Kreiselrandes in derselben Richtung um die Verticale, wie die Axe des Kreisels.*

Substituirt man für $\omega_1$, $\omega_2$, $E$ und $F$ ihre Werthe in (2) und (3), so findet man leicht

$$\left.\begin{aligned} hl\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}+Cn\cos\theta &= Cn\frac{a}{l} \\ l^2\left\{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right\} &= 2g(b-l\cos\theta) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Offenbar spielen die beiden festen Ebenen $UM$, $VN$ und der bewegliche Punkt $P$ bei der Bestimmung der Bewegung des Kreisels wichtige Rollen. Sind die Anfangswerthe von $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ gegeben, so folgen die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit von $P$ aus den Gleichungen (1). Ist auch die Anfangslage des Schwingungsmittelpunktes $P$ bekannt, so geht die Länge von $PN$ und der Werth von tg $PUM$ aus (4) und (5) hervor; man kann daher die Ebenen $UM$, $VN$ construiren. Die Bewegung von $P$ bei seinen Schwingungen lässt sich dann entweder aus (4) oder aus (5) oder den analytisch gleichwerthigen Gleichungen (6) ableiten. Aus (5) folgt, dass $PN$ nicht negativ sein kann, *dass also der Schwingungsmittelpunkt $P$ sich zwar über die Ebene $UM$, aber nicht über $VN$ erheben kann.*

Wenn ein Kreisel dadurch in Bewegung gesetzt wird, dass man eine Schnur von seiner Axe abrollt, so ist Anfangs $\omega_1=0$, $\omega_2=0$, $\omega_3=n$. Zugleich ist die Anfangsgeschwindigkeit und die Geschwindigkeit senkrecht zur Ebene $ZOP$ für jeden Punkt der Axe Null. Aus (4) und (5) folgt, dass der Punkt $P$ Anfangs in beiden Ebenen $UM$ und $VN$ liegt. *Die festen Ebenen $UM$, $VN$ fallen daher zusammen und der Schwingungsmittelpunkt $P$ schwingt zwischen seiner Anfangslage auf diesen Ebenen und einer andern tieferen Lage;* siehe § 203.

Beisp. 1. Wenn $\omega$ die resultirende Winkelgeschwindigkeit des Körpers und $v$ die Geschwindigkeit von $P$ bezeichnet, zu beweisen, dass $\omega^2=n^2+(v/l)^2$ ist.

Beisp. 2. Man zeige, dass der Cosinus der Neigung der Momentanaxe gegen die Verticale $\{E+(A-C)n\cos\theta\}/A\omega$ ist.

§ 203. **Das Steigen und Fallen des Kreisels.** Bei dem Rotiren der Axe des Körpers um die Verticale ändert sich ihre Neigung gegen die Verticale beständig. Diese Aenderungen ergeben sich, wenn man $\frac{d\psi}{dt}$ aus den Gleichungen (6) eliminirt. Man findet

$$\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2g(b-l\cos\theta)-\frac{C^2n^2}{h^2}\left(\frac{a-l\cos\theta}{l\sin\theta}\right)^2 \quad . \; . \; . \quad (7).$$

Wie man sieht, kann $\theta$ nur dann verschwinden, wenn $a=l$ wird, denn in jedem andern Fall würde die rechte Seite der Gleichung unendlich gross werden. Man kann dies auch noch anders nachweisen. Da $a/l$ d. h. $E/Cn$ dem Verhältniss der Winkelbewegungsgrösse um die Verticale zu der um die Axe des Körpers gleich ist, so kann offenbar die Axe nur dann vertical werden, wenn das Verhältniss die Einheit ist.

Man nehme an, der Körper würde auf irgend eine Art in Bewegung gesetzt und seine Axe habe dabei die Neigung $i$ gegen die Verticale. Die Axe wird anfangen, sich der Verticalen zu nähern oder sich von ihr zu entfernen, je nachdem der Anfangswerth von $d\theta/dt$ oder $\omega_2$ negativ

oder positiv ist. Darauf wird sie zwischen zwei Grenzwinkeln hin und her schwingen, die durch die Gleichung

$$0 = 2gh^2l^2(b - l\cos\theta)(1 - \cos^2\theta) - C^2n^2(a - l\cos\theta)^2 \quad . \quad (8)$$

gegeben sind.

Die Gleichung zur Bestimmung von $\cos\theta$ ist dritten Grades. Es wird nöthig sein, ihre Wurzeln zu untersuchen. Ist $\cos\theta = -1$, so wird die rechte Seite *negativ;* ist $\cos\theta = \cos i$, so wird die rechte Seite, weil der Anfangswerth von $(d\theta/dt)^2$ seinem Wesen nach positiv ist, entweder Null oder *positiv;* daher liegt eine reelle Wurzel der Gleichung zwischen $\cos\theta = -1$ und $\cos\theta = \cos i$. Ferner ist die rechte Seite *negativ*, wenn $\cos\theta = +1$ und *positiv*, wenn $\cos\theta = \infty$ wird. Daher liegt eine zweite Wurzel zwischen $\cos\theta = \cos i$ und $\cos\theta = 1$ und eine dritte ist grösser als die Einheit. Die letztere ist unbrauchbar.

§ 204. Es empfiehlt sich, eine geometrische Darstellung dieser Grenzen zu suchen. Der Gleichung (7) kann man die Form geben

$$\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g \cdot PN - \frac{C^2n^2}{h^2} \cdot \left(\frac{PM}{UM}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Man beschreibe eine Parabel, deren Scheitel in $U$ liegt, deren Axe vertical abwärts geht und deren Parameter gleich $C^2n^2/2gh^2$ ist. Schneidet die Verticale $PMN$ die Parabel in $R$, so hat man

$$\frac{2g}{(l\,d\theta/dt)^2 - 2gMN} = \frac{1}{PM} + \frac{1}{PR} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Der Punkt $P$ schwingt zwischen den zwei Lagen hin und her, für welche das harmonische Mittel von $PM$ und $PR$ gleich $-2 \cdot MN$ ist. In der Figur liegt $V$ über $U$ und in diesem Fall fällt eine der Grenzen über $UM$ und die andre unter die Parabel. Nimmt man $U$ zum Coordinatenanfang und $UO$ zur $x$-Axe, so ist $PM = x$, $UM = y$. Es sei $2pl$ der Parameter der Parabel und $UV = c$; die Axe des Körpers schwingt dann zwischen zwei Lagen hin und her, in welchen $P$ auf der Curve dritten Grades liegt,

$$y^2(x + c) = 2plx^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Die in der Figur punktirte Linie gibt die Curve für den Fall an, dass $c$ positiv ist, d. h. $V$ über $U$ liegt. Die Tangenten in $U$ schneiden sich unter einem endlichen Winkel und die Tangente des Winkels, den jede von ihnen mit der Verticalen macht, ist $(2pl/c)^{\frac{1}{2}}$. Ist $c$ negativ, so hat die Curve zwei Zweige, die auf verschiedenen Seiten der Verticalen liegen und einen conjugirten Punkt im Coordinatenanfang haben. Aus dem Vorstehenden folgt, dass der obere Zweig sich über, der untere sich unterhalb der Anfangslage von $P$ befinden muss und dass $P$ stets zwischen beide Zweige fällt.

§ 205. Handelt es sich um einen Kreisel, so ist die Anfangsbewegung im Allgemeinen durch die Rotation $n$ um die Axe gegeben. Man hat für den Anfang $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$; nach (2) und (3) daher $E = Cn\cos i$ und $F - Cn^2 = 2gh\cos i$. Dies gibt $a = b = l\cos i$. Setzt man, wie zuvor, $C^2n^2/2gh^2 = 2pl$, so sind die Wurzeln der

Gleichung (8), $\cos\theta = \cos i$ und $\cos\theta = p - \sqrt{1 - 2p\cos i + p^2}$. Der Werth $\cos\theta = p + \sqrt{1 - 2p\cos i + p^2}$ ist aber immer grösser als die Einheit; denn er wird offenbar kleiner, wenn man statt $\cos i$ die Einheit setzt und in diesem Fall ist sein Werth nicht kleiner als die Einheit. Die Axe des Körpers schwingt daher zwischen den eben angegebenen Werthen von $\theta$ hin und her.

Da $a = b$ ist, so fallen die horizontalen Ebenen durch $U$ und $V$ zusammen und ist $c = 0$. Die Curve dritten Grades, welche die Grenzen der Schwingung bestimmt, wird zur Parabel $UR$ und graden Linie $UM$. Die Axe des Körpers oscillirt dann zwischen den beiden Lagen von $P$ auf der durch $U$ gehenden Horizontalen und der Parabel und beginnt mit der ersteren.

Im Allgemeinen ist die Winkelgeschwindigkeit $n$ um die Axe der Figur sehr gross. Alsdann ist $p$ sehr gross und $\cos\theta$ wird offenbar, wenn wir das Quadrat von $1/p$ vernachlässigen, zwischen den Grenzen $\cos i$ und $\cos i - \sin^2 i/2p$ variiren.

Ist der Anfangswerth von $i$ Null, so sind die beiden Grenzen für $\cos\theta$ dieselben. Die Axe des Körpers bleibt daher vertical.

**Beispiele.** Beisp. 1. Wenn die Grenzwinkel, zwischen denen $\theta$ variirt, einander gleich sind und $\theta$ daher während der Bewegung constant und gleich $\alpha$ bleibt, zu zeigen, dass $\operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \cos\alpha/4p = 0$ ist, worin $\varphi$ den Winkel $PUM$ bezeichnet.

Beisp. 2. Ein Kreisel wird auf einer glatten horizontalen Ebene mit einer resultirenden Anfangswinkelgeschwindigkeit um seine Figurenaxe in Bewegung gesetzt. Man zeige, dass die von seiner Spitze auf der horizontalen Ebene beschriebene Bahn zwischen zwei Kreisen liegt, von denen sie den einen berührt und den andern rechtwinklig trifft. [Finck, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Bd. 9, 1850.]

Beisp. 3. Man zeige, dass der verticale Druck eines Kreisels gegen den Boden sein Gewicht um $\frac{1}{2} h \frac{d}{d\cos\theta}\left(\sin\theta \frac{d\theta}{dt}\right)^2$ übertrifft. Daraus leite man mittelst Gleichung (7), § 203 ab, dass $R$ eine Function zweiten Grades von $\cos\theta$ mit constanten Coefficienten ist.

Beisp. 4. Ein symmetrischer Kreisel wird auf einer rauhen horizontalen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit $n$ um seine Figurenaxe in Bewegung gesetzt, wobei die Axe selbst den Winkel $\alpha$ mit der Verticalen macht. Man beweise, dass sein Schwerpunkt zwischen der grössten Annäherung an die Verticale und der grössten Abweichung von ihr einen Bogen $h\beta$ beschreibt, wobei $(p - \cos\alpha)\operatorname{tg}\beta = \sin\alpha$ und $p = C^2n^2/4ghAM$ ist. [Math. Tripos, 1880.]

§ 206. Vergleicht man die Gleichungen (6) in § 202 mit denen, welche die Bewegung der conjugirten Linie in § 175, Beisp. 4 angeben, so sieht man, dass sie analog sind. Daraus folgt, *dass die Bewegung der Axe eines Kreisels durch die Bewegung der conjugirten Linie eines Körpers dargestellt werden kann, an dem keine Kräfte angreifen und der sich unter den richtigen Anfangsbedingungen um einen festen Punkt bewegt.* Es lässt sich zeigen, dass die Vergleichung zu reellen Werthen der Constanten des Körpers führt, an dem keine Kräfte angreifen.

Man sehe eine Abhandlung des Verfassers in dem *Quaterly Journal*, 1888: *On a theorem of Jacobi in dynamics.*

**§ 207. Präcession und Nutation des Kreisels.** *Ein Körper, von dem zwei der Hauptmomente für den Schwerpunkt G gleich sind, dreht sich um einen festen Punkt O in der Axe des ungleichen Momentes unter der Wirkung der Schwere. Wenn die Axe OG gegen die Verticale unter dem Winkel α geneigt ist und mit gleichförmiger Geschwindigkeit um sie rotirt, zu finden, unter welcher Bedingung die Bewegung stationär ist und die Zeit einer kleinen Schwingung zu bestimmen.*

Die Gleichungen (2) und (3) in § 201 enthalten die Lösung des Problems. Benutzt man aber die Gleichung der lebendigen Kraft in der Form (3), so muss man die Quadrate kleiner Grössen in Rechnung ziehen. Es ist daher vorzuziehen, sie durch eine der Gleichungen zweiter Ordnung zu ersetzen, aus denen sie abgeleitet wurde. Am einfachsten kommt man zu der Gleichung, wenn man die Lagrange'sche Regel benutzt, die in Bd. 1, § 405 gegeben wurde. Man erhält so

$$A\theta'' - A\cos\theta\sin\theta\psi'^2 + Cn\sin\theta\psi' = gh\sin\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

worin die Accente Differentiationen nach der Zeit angeben.

Man würde diese Gleichung auch durch Differentiation von (2) sowohl als (3) und Elimination von $d^2\psi/dt^2$ gefunden haben.

*Die stationäre Bewegung zu finden.* Wenn die Bewegung stationär ist, so sind sowohl $\theta$ als $d\psi/dt$ constant. Es sei $\theta = \alpha$, $d\psi/dt = \mu$; die Gleichung (2) bestimmt dann nur die Constante $E$ und (12) wird

$$\sin\alpha(-A\cos\alpha\mu^2 + Cn\mu - gh) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Sie gibt zwei mögliche Zustände stationärer Bewegung an, den einen, für welchen $\alpha = 0$ oder $= \pi$ und einen andern, für welchen

$$\mu = \frac{Cn \pm \sqrt{C^2n^2 - 4gh\,A\cos\alpha}}{2A\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

ist; doch wird die letztere Beziehung für $\alpha = 0$ oder $= \pi$ überflüssig.

Bei der ersten der beiden Bewegungen schwingt die Axe des Körpers um die Verticale und $d\psi/dt$ ist weder klein noch nahezu constant. Es ist deshalb vorzuziehen, zur Untersuchung der Schwingungen um diesen Zustand stationärer Bewegung andere Coordinaten als $\theta$ und $\psi$ zu benutzen.

Bei der zweiten Bewegung ist $h\cos\alpha$ positiv, wenn der Schwerpunkt des Körpers über der durch den festen Punkt $O$ gehenden Horizontalebene liegt. In diesem Fall muss die Winkelgeschwindigkeit $n$ des Kreisels um seine Axe der Figur gross genug sein, um die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse positiv zu machen. Es darf daher $n^2$ nicht kleiner als $4gh\,A\cos\alpha/C^2$ sein.

Sind $\alpha$ und $n$ gegeben, so kann man den Körper sich mit einem dieser beiden Werthe von $\mu$ bewegen lassen, wenn man ihm die richtigen Anfangswinkelgeschwindigkeiten gibt. Aus den Gleichungen (1) ist ersichtlich, dass die Bedingungen für die stationäre Bewegung $\omega_1 = -\mu\sin\alpha$ und $\omega_2 = 0$ sind. Wenn der Kreisel durch Abrollen einer Schnur von der Axe in Bewegung gesetzt wird, so ist der Werth von $n$ sehr gross, während die Anfangswerthe von $\omega_1$ und $\omega_2$ Null sind. Daraus folgt, dass bei der stationären Bewegung, um welche der Kreisel kleine Schwingungen macht, $\omega_1$, $\omega_2$ und daher auch $\mu$ klein sind. Die Wurzelgrösse in (4) muss daher das negative Vorzeichen erhalten, und $\mu$ ist nahezu $gh/Cn$.

Dass $\mu$ klein sein muss, wenn $n$ gross ist, kann man auf elementarem Weg zeigen. Der Kreisel wird anfänglich um die Hauptaxe $OC$ in Bewegung gesetzt und würde, wenn die Schwere nicht existirte, um $OC$ als feste Axe zu rotiren

fortfahren. *Die Schwere ist es, welche die Axe veranlasst, um die Verticale zu rotiren* und ihre Wirkung wird durch Vermehrung der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ verringert.

§ 208. *Die kleinen Schwingungen zu finden.* Es sei $\theta = \alpha + x$ und $d\psi/dt = \mu + dy/dt$, worin $x$ und $dy/dt$ kleine Grössen sind, deren Quadrate man vernachlässigen darf. $\alpha$ und $\mu$ mögen so bestimmt sein, dass sie sämmtliche constante Bestandtheile von $\theta$ und $d\psi/dt$ enthalten, $x$ und $dy/dt$ also nur aus trigonometrischen Gliedern bestehen. Substituirt man nun diese Werthe in die Gleichungen (2) und (12), so müssen die constanten Bestandtheile von selbst verschwinden. Die so erhaltenen Gleichungen bestimmen $E$ und $\mu$ und zeigen, dass ihre Werthe dieselben sind, wie die bei stationärer Bewegung. Die variablen Theile der beiden Gleichungen werden, nachdem man für $Cn$ seinen aus (13) erhaltenen Werth eingesetzt hat,

$$A\mu \sin\alpha y' - (gh - A\mu^2 \cos\alpha)\, x = 0,$$
$$A\mu x'' + \sin\alpha\,(gh - A\mu^2\cos\alpha)\, y' + \mu^2 A \sin^2\alpha x = 0.$$

Um sie aufzulösen, setze man $x = F\sin(pt+f)$, $y = G\cos(pt+f)$. Man substituire und bekommt

$$\left.\begin{aligned} - A\mu \sin\alpha \cdot pG &= (gh - A\mu^2\cos\alpha)\, F, \\ (A\mu p^2 - \mu^2 A \sin^2\alpha)\, F &= -(gh - A\mu^2\cos\alpha)\sin\alpha \cdot Gp \end{aligned}\right\}.$$

Multiplicirt man die beiden Gleichungen miteinander, so wird

$$p^2 = \frac{A^2\mu^4 - 2ghA\cos\alpha\mu^2 + g^2h^2}{A^2\mu^2} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

und die gesuchte Zeit ist $2\pi/p$. Offenbar ist $p^2$ stets positiv und die beiden Werthe von $\mu$, die aus (14) folgen, entsprechen daher stabilen Bewegungen. Der Ausdruck (15) stimmt mit dem Resultat eines Problems überein, dass Ferrers in den *Math. Tripos,* 1859 gegeben hat.

Man beachte, dass in diesen Resultaten die Präcession der Axe bei der stationären Bewegung um so kleiner ist, je grösser die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels wird und nahezu durch $\mu = gh/Cn$ gegeben ist, wenn $n$ sehr gross wird. Unter derselben Annahme erhält man nahezu $p = gh/A\mu$ oder, was dasselbe ist, $p = Cn/A$. Daraus ergibt sich, dass die Nutation oder Schwingung der Axe um die stationäre Bewegung sehr rasch vor sich geht, da ihre Periode $2\pi/p$ sehr kurz ist.

Die Anfangsbedingungen für die Bewegung seien $\theta = i$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = n$. Die drei Integrationsconstanten $\alpha$, $F$ und $f$ ergeben sich aus den Bedingungen $d\theta/dt = 0$, $d\psi/dt = 0$, $\theta = i$. Nimmt man nun noch die oben angegebene Beziehung zwischen $F$ und $G$ hinzu, so erhält man $f = \frac{1}{2}\pi$, $Gp = \mu$, $ghF = -A\mu^2\sin\alpha$, $\alpha = i - F$.

Wir machen darauf aufmerksam, dass diese Untersuchung keine Anwendung findet, wenn $\alpha$ sehr klein ist, denn alsdann sind einige der vernachlässigten Glieder ihrer Grösse nach von derselben Ordnung, wie die beibehaltenen. Man muss daher auf andre Art vorgehen, wie in § 212 gezeigt werden wird.

*Die Wichtigkeit der stationären Bewegung.* Die stationäre Bewegung hat in den Problemen dieses Kapitels manchmal mehr dynamische Bedeutung, als die kleinen Schwingungen. Beide werden durch den Widerstand der Luft nach und nach zerstört, *aber nicht gleichzeitig.* Die Rotation des Kreisels um seine Axe $OC$, welche Anfangs sehr schnell ist, wird nur durch die geringe tangentiale Reibung der Luft vermindert, während den Schwingungen der Axe, die Anfangs klein sind, der normale Druck der Luft sich entgegenstellt. Die letzteren werden daher verschwindend klein, ehe die erstere merkbar abnimmt. Der stationären Bewegung leistet

zwar der normale Druck Widerstand, solange aber die Rotation merklich dieselbe bleibt, wird die Präcession durch die continuirliche Wirkung die Schwere aufrecht erhalten. Die kleinen Schwingungen sind die Folge davon, dass die Anfangsbedingungen nur annähernd einer stationären Bewegung angepasst sind und werden nicht erneuert, wenn diese Bedingung erfüllt ist. Man sagt dann wohl, der Kreisel schlafe. Von analytischem Gesichtspunkt wird dieser Gegenstand in Kap. 8, § 331 erörtert.

Einen wichtigen Gebrauch kann man von der Untersuchung der kleinen Schwingungen machen; es lässt sich durch sie bis zu einer ersten Annäherung bestimmen, ob die stationäre Bewegung stabil ist oder nicht. Einige Beispiele für Annäherungen zweiter Ordnung findet man in Kap. 7.

Beisp. 1. Wenn man den Kreisel so rotiren lässt, dass die Axe $OC$ eine horizontale Lage hat und $O$ festliegt, die entsprechenden Werthe von $\mu$ und $p$ zu finden.

Beisp. 2. Eine kleine horizontale Kraft $f$ möge an dem Schwerpunkt des Kreisels senkrecht zur Ebene $ZOC$ angreifen. Sie möge den Widerstand der Luft gegen die stationäre Bewegung darstellen. Wenn man annimmt, dass das Quadrat von $ft$ vernachlässigt werden kann, zu zeigen, dass die Wirkung dieser Kraft darin besteht, dass zu den Werthen von $\theta$ und $d\psi/dt$ die kleinen Glieder $Lt$ bezüglich $Mt$ hinzukommen, wobei $A^2p^2\mu L = fh(gh - A\mu^2 \cos\alpha)$, $Ap^2M = -fh\mu \sin\alpha$ ist und $p$ den durch Gleichung (15) gegebenen Werth hat. Die Kraft $f$ möge zu wirken beginnen, wenn sich der Kreisel in stationärer Bewegung befindet und $n$ sei gross; man beweise, dass die Axe anfängt sich von der Verticalen zu entfernen, ehe sich die übrigen Verhältnisse der Bewegung merklich ändern.

Beisp. 3. Das Gyroscop besteht in einer seiner Gestalten aus einer halbkugelförmigen Schale, durch deren Scheitel von aussen eine Axe geht, auf welcher sich ein Gewicht so auf und nieder bewegen lässt, dass dadurch der Schwerpunkt höher oder tiefer zu liegen kommt. Während das Gewicht sich in einer gewissen Lage befindet und das Gyroscop mit seinem Scheitel auf einen Stift gestützt ist, wird ihm durch Abdrehen eines um seine Axe gerollten Fadens eine rasche Rotation mitgetheilt und es zeigt sich, dass die Axe um die Verticale eine Präcessionsbewegung hat. Man untersuche, ob das Gewicht nach oben oder unten bewegt werden muss, um die Richtung der Bewegung umzukehren. Ist die Bewegung der Axe eines Kreisels eine vor- oder rückschreitende?

[Math. Tripos.]

Beisp. 4. Ein um seine Rotationsaxe symmetrischer Gyrostat wird mittelst eines Fadens von der Länge $a$ an einem festen Punkt aufgehängt. Zu beweisen, dass, wenn der Faden an einem Punkt der Rotationsaxe befestigt wird, und der Gyrostat sich stationär mit horizontaler Rotationsaxe bewegt, der Winkel $\alpha$, den der Faden mit der Verticalen macht, durch die Gleichung

$$C^2n^2 \operatorname{tg} \alpha = (h + a \sin \alpha)\, gh^2$$

gegeben ist, worin $n$ die Winkelgeschwindigkeit des Gyrostaten, $h$ den Abstand des Befestigungspunktes des Fadens von dem Schwerpunkt des Gyrostaten, $MC$ sein Trägheitsmoment um seine Rotationsaxe und $M$ seine Masse bezeichnet.

[Math. Tripos, 1888, Thl. 2.]

Beisp. 5. Ein symmetrischer Kreisel, der auf einem vollkommen rauhen Tisch in Rotation gesetzt wird und dessen Axe den Winkel $\alpha$ mit der Verticalen macht, bewegt sich stationär mit der Präcession $\mu$. Der Tisch wird nun in einer gegebenen horizontalen Richtung so in Schwingung versetzt, dass seine Verrückung aus der mittleren Lage $\xi = Q \sin qt$ ist, worin $Q$ sehr klein ist; zu beweisen, dass die Neigung $\theta$ der Axe des Kreisels gegen die Verticale bis zu einer ersten Annäherung durch

$$\theta = \alpha + F \sin(pt + f) + G \sin(q + \mu)t + H \sin(q - \mu)t,$$

$$A^2\mu^2p^2 = A^2\mu^4 - 2mghA \cos\alpha\mu^2 + m^2g^2h^2,$$

$$2A^2\mu(q+\mu)\{p^2 - (q+\mu)^2\}G = \{A\mu(q+2\mu)\cos\alpha - mgh\}Qq^2mh$$

gegeben ist, worin $m$ die Masse des Kreisels, $h$ den Abstand des Schwerpunktes von der Spitze, $A$ ein Hauptträgheitsmoment für die Spitze angibt und $H$ sich aus $G$ ergibt, wenn man das Vorzeichen von $\mu$ ändert.

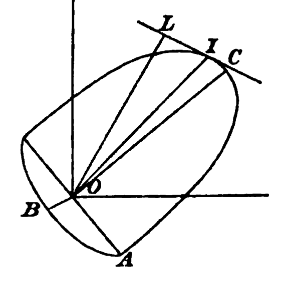
§ 209. **Allgemeine Betrachtungen über die Bewegung des Kreisels.** Aus dem Beispiel des Kreisels in § 203 ist ersichtlich, wie sehr die Wirkung der an einem Körper angreifenden Kräfte durch eine in ihm bestehende Rotation geändert wird. Wäre der Kreisel anfänglich in Ruhe und läge seine Spitze $O$ fest, so würde die Schwere zur Folge haben, dass er sich um $OB$ dreht und abwärts fällt. Wenn sich dagegen der Kreisel in rascher Rotation um seine Axe $OC$ befindet, so hat die Schwere die Wirkung, nicht die Neigung der Axe gegen die Verticale merklich zu ändern, sondern diese Axe einen graden Kegel um die Verticale beschreiben zu lassen. Um die Ursache dieses Unterschiedes besser einsehen zu können, empfiehlt es sich, die Bewegung von einem andern Gesichtspunkt zu betrachten. Wir wollen daher die Poinsot'sche Construction der Bewegung eines Körpers, an dem keine Kräfte angreifen, benutzen und versuchen darzuthun, wie sich diese Darstellung unter dem Einfluss der Schwere ändert.

Ein Körper rotire um eine Axe $OI$, welche nahezu mit der Axe der Figur zusammenfällt; die invariable Linie $OL$ fällt dann auch nahezu mit der Axe der Figur zusammen und würde, wenn der Kreisel sich selbst überlassen bliebe, eine kleine Polodie um sie beschreiben. Wir wissen aus § 148, Beisp. 1, dass die Polodie durch ein gegebenes Paar $Q$ nur wenig geändert wird, wenn entweder die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels sehr gross ist, oder die Projection der Axe des Paares auf die Ebene $LOI$ dicht bei $OL$ liegt. *Ist eine dieser beiden Bedingungen erfüllt, so bleiben die invariable Linie $OL$, die Momentanaxe $OI$ und die Axe der Figur $OC$ während ihrer Bewegung durch den Raum dicht bei einander.*

Zunächst wollen wir untersuchen, wie sich die invariable Linie unter der Wirkung des gegebenen Paares $Q$ im Raum bewegt. Die vorhandene Winkelbewegungsgrösse des Kreisels ist einem Paar $G$ äquivalent, dessen Axe die invariable Linie ist. Die in der Zeit $dt$ um die Axe des gegebenen Paares hervorgebrachte Winkelbewegungsgrösse ist $Qdt$. Setzt man diese Paare zusammen, so sieht man, *dass sich das positive Ende der invariablen Linie stets nach dem positiven Ende der Axe des gegebenen Paares hin bewegt.*

Beisp. 1. *Die stationäre Bewegung eines schnell rotirenden Kreisels zu bestimmen, dessen Spitze $O$ festliegt.*

Die Figur möge die obere Hälfte des Trägheitssphäroids für $O$ darstellen. Wenn die Bewegung stationär ist, liegen die Geraden $OL$, $OI$, $OC$ in einer verticalen Ebene, welche sich um $OZ$ mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $\mu$ dreht. Die Schwerkraft erzeugt continuirlich eine Winkelbewegungsgrösse um den horizontalen Durchmesser $OB$ der Art, dass sich $OL$, dicht von $OC$ gefolgt, nach $OB$ zu bewegt. Dies hat dann wieder zur Folge, dass sich $OB$ um die Verticale $OZ$ dreht. Sind diese beiden Bewegungen einander richtig angepasst, so rotirt die Axe des Kreisels stationär um die Verticale in derselben Richtung, in welcher der Kreisel um seine Axe der Figur rotirt.




Die Winkelverrückung von $OC$ in der Zeit $dt$ ist $\mu \sin\alpha\, dt$, worin $\alpha$ den Winkel $ZOC$ bezeichnet; sie ist aber auch, weil der Körper sich um $OI$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ dreht, $\omega \sin IOC$. Setzt man beide gleich, so wird, wie in § 181,

$$\omega \sin IOC = \mu \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

In der Zeit $dt$ erzeugt die Schwere die Winkelbewegungsgrösse $gh \sin\alpha\, dt$ um die Axe $OB$; nennt man die vorhandene Winkelbewegungsgrösse $G$, so wird die Verrückung der invariablen Linie $OL$ nach $OB$ hin $gh \sin\alpha\, dt/G$. Da sich aber $OL$ um $OZ$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\mu$ bewegt, so ist sie auch $\mu \sin ZOL\, dt$. Man erhält mithin

$$\mu G \sin ZOL = gh \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Nun ist $G \sin ZOL$ die Winkelbewegungsgrösse des Kreisels um eine in der Ebene $ZOC$ gelegene horizontale Linie. Bedeutet $n$ die Componente von $\omega$ um $OC$, so erhält man durch einfache Zerlegung, da die Winkelbewegungsgrössen um $OC$ und $OA$ bezüglich $Cn$ und $-A\omega \sin IOC$ sind,

$$G \sin ZOL = Cn \sin\alpha - A\omega \sin IOC \cdot \cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Substituirt man aus (1) und (3) in (2), so erhält man nach Division durch $\sin\alpha$

$$gh/\mu = Cn - A\mu \cos\alpha,$$

also denselben Ausdruck, wie in § 207.

Man beachte, dass in dieser allgemeinen Erläuterung nur gezeigt wurde, dass eine stationäre Bewegung möglich ist; dass sie auch *stabil* ist, geht aus den Betrachtungen in § 208 hervor.

Beisp. 2. Der auf den Kreisel wirkende Widerstand der Luft werde durch ein verzögerndes Paar dargestellt, dessen Axe die Momentanaxe ist. Man zeige, dass die Momentanaxe sich der Axe der Figur $OC$ nähert oder sich von ihr entfernt, je nachdem das Trägheitsmoment $C$ grösser oder kleiner als $A$ ist. Siehe § 183, Beisp. 3.

Beisp. 3. Eine homogene Kugel vom Radius $a$ trägt in einem Punkt ihrer Oberfläche einen materiellen Punkt, dessen Masse $1/p^{\text{tel}}$ ihrer eigenen Masse ist. Wenn sie sich stationär auf einer glatten horizontalen Ebene bewegt, um die Verticale mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $n$ rotirt, und der durch den Massenpunkt gehende Durchmesser dabei den constanten Winkel $\alpha$ mit der Verticalen macht, zu beweisen, dass $n^2 a p (p+1)$ nicht kleiner als $5(2p+7) g \cos\alpha$ sein darf und zu zeigen, dass sich der Massenpunkt um die Verticale in einer von zwei Perioden dreht, deren Summe $4\pi a p n/5g$ ist. [Math. Tripos.]

Beisp. 4. *Die Geschossabweichung in Folge der Rotation.* Ein längliches Geschoss, welches aus einem gezogenen Lauf abgeschossen wird, erhält eine rasche

Rotation um die Hauptaxe, die der Länge des Geschützes parallel ist. Diese Rotation hat in der Regel für einen Beobachter, der hinter dem Geschütz steht, die Richtung der Zeiger einer Uhr. Man hat gefunden, dass die Kugel, wenn sie rundköpfig ist, nach der rechten Seite der Schussebene abweicht. Man soll eine allgemeine Erklärung dieser Erscheinung geben.

Würde sich das Geschoss in einem luftleeren Raum bewegen, so bliebe die Rotationsaxe, d. h. $OC$, ihrer Anfangsrichtung stets parallel, während die Tangente an die Bahn von $O$ eine veränderliche Lage $OT$ annehmen würde. Der Widerstand der Luft führt 1) eine Widerstandskraft $F$ ein, die an $O$ in der Ebene $COT$ in einer Richtung $RO$ angreift und 2) ein Paar $M$, welches um die auf der Ebene $COT$ senkrecht stehende Hauptaxe $OB$ wirkt. Beide gleichen den durch die Schwere in die Bewegung des Kreisels eingeführten Kräften, wobei die Richtung von $F$ derjenigen der Schwere in Beisp. 1 entspricht. Die allgemeine Wirkung ist in beiden Fällen dieselbe; die Axe $OC$ beginnt einen Kegel um die Richtung von $F$ zu beschreiben mit einer Präcessionsbewegung, welche der $\mu$ genannten entspricht, wenn so viel Zeit verstrichen ist, dass der Winkel $COT$ hat endlich werden können. Die resultirende Bewegung ist etwas complicirter, wenn die Richtung der Tangente $OT$ an die Geschossbahn sich schnell ändert. Das Paar $M$ sucht im Allgemeinen den Körper um $OB$ von $A$ nach $C$ hin zu drehen und da die Rotation um $OC$ von $B$ nach $A$ hin geht, so wird die Momentanaxe, dicht gefolgt von der Axe der Figur $OC$, nach der positiven Richtung von $OB$ hin bewegt, d. h. die Axe des Geschosses weicht für einen hinter dem Geschütz stehenden Beobachter nach der rechten Seite der Schussebene ab; siehe Beisp. 1 oder § 202.

Die Ebene $COT$ ist nun nicht mehr vertical, die Kraft $F$ wirkt aber in dieser Ebene weiter fort. Sie hat daher eine Componente, die senkrecht auf der durch $OT$ gehenden Verticalebene steht und diese bringt eine seitliche Beschleunigung des Projectils nach der Rechten der Schussebene hervor.

Wenn der Druck der Luft auf das Geschoss eine einzelne Resultante hat, so kann deren Richtung die Axe der Figur $OC$ entweder vor oder hinter dem Schwerpunkt $Q$ treffen. In dem ersteren Fall sucht das Paar $M$ um $OB$ in der oben angegebenen Richtung zu drehen und die Abweichung geht nach rechts; in dem zweiten Fall hat das Paar die umgekehrte Richtung und die Abweichung findet nach der linken Seite der Schussebene statt. In Col. Sladen's *Principles of Gunnery*, 1879, wird gezeigt, dass der letztere Fall manchmal vorkommt, wenn das Geschoss vornen flach ist.

Die Componente von $F$ senkrecht zur Verticalebene $ZOT$ dreht diese Ebene um die Verticale $OZ$ nach rechts; daher sind, wenn $OC$ nach oben und rechts von $OT$ weist, bei den richtigen Neigungen die Bewegungen von $OC$ und $OT$ etwa senkrecht auf der Ebene $OCTR$ und die Bewegung nahezu stationär.

Der numerische Betrag der Abweichung hängt von der Form des Projectils und den andern Umständen der Bewegung ab. Um jedoch zu zeigen, von welcher Ordnung die fraglichen Grössen sind, wollen wir zwei Beispiele aus Major Mackinlag's *Text book on gunnery*, 1887, anführen Er gibt die Abweichung bei zwei verschiedenen Haubitzen und einer Schussweite in beiden Fällen von 1830 m zu 25 und 16,5 m an. Prof. Greenhill hat die für die Stabilität eines gestreckten Rotationsellipsoides nöthige Rotation im *Quaterly Journal*, 1879 berechnet und die Theorie der Geschossabweichung in den *Proceedings of the Royal Artillery Institution*, Bd. 11, 1880 behandelt. Ein ausführliches neueres Werk über den Gegenstand ist Cranz, Compendium der theoretischen äusseren Ballistik, Leipzig, Teubner, 1896.

§ 210. Beisp. **Der Bumerang.** Als ein weiteres Beispiel dafür, welche Veränderung in der Wirkung einer Kraft durch eine rasche Rotation des Körpers hervorgebracht werden kann, wollen wir den Flug eines Bumerang untersuchen.

Es ist dies ein flach geschnittener und in seiner Ebene gebogener Stock, der gewöhnlich nach der einen Seite bauchartig vorspringt, nach der andern flach ist und dessen convexer Rand eine scharfe Schneide besitzt. Das Projectil wird mit der Hand so fortgeschnellt, dass es eine rasche Rotation um eine zu seiner Ebene senkrechte Axe erhält. Da dies eine Hauptaxe ist, so bewegt sich der Körper nach dem Fortschleudern so, dass die Richtung der Axe im Raum merklich festliegt, § 156. Bezeichnet $OC$ diese Axe, $OA$ eine auf ihr senkrechte horizontale und $OB$ die auf beiden senkrechte Axe, so bewegt sich der Schwerpunkt $O$ nahezu in der Richtung $BO$.

Der an der Schneide wirkende Widerstand der Luft ist sehr gering, dagegen sucht der Druck auf die untere flache Seite des Instrumentes den Körper bei seinem Flug zu tragen. Um einen etwas gewagten Vergleich zu machen, könnte man sagen, der Körper bewege sich so, als ob er eine feste geneigte Ebene längs der Linie stärksten Falles hinaufgeschleudert würde, wobei der Druck der Ebene die tragende Kraft der Luft vorstellen würde. Der Körper bewegt sich aufwärts, bis die Translationsbewegung durch die Schwere zerstört wird. Tritt dies ein, bevor sich die Rotation durch die Wirkung der Luft stark geändert hat, so beginnt das Projectil dieselbe Ebene nach dem Punkt hin, von dem es weggeschleudert wurde, hinabzugleiten. Dazu gehört, um es erklären zu können, (1), dass die Rotation so schnell ist, dass die Richtung ihrer Axe im Raum und im Körper merklich festliegt und (2), dass der Widerstand der Luft jede grosse Bewegung senkrecht zur Ebene des gekrümmten Stockes verhindert.

Nach Versuchen, die Prof. S. P. Langley über die Bewegung einer schweren Scheibe angestellt hat, deren Ebene horizontal war, wird der Widerstand der Luft gegen ein verticales Herabfallen durch horizontale Bewegung der Scheibe sehr vermehrt und zwar derart, dass die Fallzeit durch eine gegebene Strecke mittelst seitlicher Bewegung unbegrenzt verlängert werden kann. Es ist dies vielleicht eine Folge der Trägheit der ungestörten Luft, über welche die Scheibe hingleitet. Während der schnellen Bewegung der Scheibe ist nämlich die momentan unter ihr befindliche Luft stets in Ruhe und die Scheibe kann erst fallen, wenn diese Luft Zeit gehabt hat, nach abwärts auszuweichen. Die Mittheilung Prof. Langley's an die Pariser Academie der Wissenschaften findet man auch in der *Nature* vom 23. Juli, 1891; man vergleiche auch eine Note von Lord Rayleigh in der Nummer vom 3. December 1891.

Manchmal ist auch der vordere Theil des Bumerang leicht ausgehöhlt oder hat die Curve eine geringe seitliche Drehung, mittelst welcher das Instrument sich in Folge seiner Rotation in der Luft in die Höhe heben oder schrauben soll.

Oberst Lane Fox stellt in seinen Vorlesungen über *Primitive Warfare* fest, dass sich die Rotationsebene, anstatt ihrer ursprünglichen Lage fortwährend parallel zu bleiben, um ein Geringes bei dem Vordringen des Projectils in die Höhe erhebt (*Journal of the United Service Institute,* Bd. 12, 1868.) Er gibt ein Diagramm dazu, welches Sir Richard Burton in seinem Buch *The sword* (1884) reproducirt, aus dem hervorgeht, dass man den Bumerang nach einem Punkt schleudern muss, der unterhalb des Gegenstandes liegt, der getroffen werden soll. Dies lässt sich durch die Annahme erklären, dass der Druck der Luft auf denjenigen Theil der unteren Seite am grössten ist, der sich in derselben Richtung, wie der Schwerpunkt bewegt. Die Ungleichheit des Druckes führt ein Paar ein, dessen Axe $OB$ ist; setzt man die so erzeugte Winkelbewegungsgrösse mit der um $OC$ oder $OL$, wie in § 209 erklärt wurde, zusammen, so dreht sich die Axe $OC$ um $OA$ nach $OB$ hin; d. h. der vordere Theil des Bumerang steigt in die Höhe.

In den oben erwähnten Vorlesungen bemerkt Oberst Lane Fox (jetzt Gen.-Maj. A. Pitt Rivers), dass man nicht behaupten kann, die Australier hätten den Bumerang *erfunden*. Er zeigt an einer Reihe von Diagrammen der Zwischenformen zwischen ihm und der Keule, dass der Wilde sich das Instrument „sehr wohl nur nach den Gesetzen gelegentlicher Variation und geleitet durch die

natürliche Faserbildung des Materials, das er bearbeitete", angeeignet haben kann. Howitt theilt in der *Nature*, 20. Juli, 1876 die Resultate seiner Nachforschungen unter den Eingeborenen mit, aus denen sich ergibt, dass das Instrument bei weitem nicht so wirksam ist, wie man gewöhnlich annimmt. Vergl. auch eine Abhandlung G. T. Walker's über den Bumerang in den *Philosophical Transactions*, Bd. 190, 1897.

§ 211. **Unsymmetrische Kreisel.** Wir gehen nun zu dem wichtigen und allgemeinen Problem über, die Schwingungen eines schweren nicht nothwendiger Weise einaxigen Körpers um einen festen Punkt zu finden. Wir beginnen mit den allgemeinen Bewegungsgleichungen und wenden sie dann auf zwei Fälle an: (1) wenn die durch den festen Punkt gehende Verticale eine Hauptaxe für diesen Punkt ist und der Körper eine Anfangsrotation um die Verticale erhalten hat; (2) wenn die Verticale nicht nothwendiger Weise eine Hauptaxe ist und der Körper keine Anfangsrotation hat. Schliesslich werden wir untersuchen, welche Fälle stationärer Bewegung möglich sind.

*Ein Körper, dessen Hauptträgheitsmomente nicht nothwendiger Weise gleich sind und von dem ein Punkt O im Raum festliegt, bewegt sich um O unter dem Einfluss der Schwere. Man soll die allgemeinen Bewegungsgleichungen bilden.*

$OA$, $OB$, $OC$ seien die Hauptaxen für den festen Punkt $O$ und sie mögen zu Bezugsaxen genommen werden. $h, k, l$ seien die Coordinaten des Schwerpunktes $G$ und die Masse des Körpers sei die Einheit. $OV$ möge vertical *nach oben* gezogen werden und $p, q, r$ die Richtungscosinusse von $OV$ in Bezug auf $OA$, $OB$, $OC$ sein. Nach den Euler'schen Gleichungen ist dann

$$\left.\begin{aligned} A\omega_1' - (B-C)\,\omega_2\omega_3 &= -g(kr - lq) \\ B\omega_2' - (C-A)\,\omega_3\omega_1 &= -g(lp - hr) \\ C\omega_3' - (A-B)\,\omega_1\omega_2 &= -g(hq - kp) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1),$$

worin die Accente die Differentiationen nach der Zeit angeben.

$p, q, r$ kann man auch als die Coordinaten eines Punktes in $OV$ ansehen, der von $O$ um die Einheit absteht. Dieser Punkt liegt im Raum fest und seine Geschwindigkeiten, wie sie aus § 17 folgen, sind daher Null. Man hat

$$p' = \omega_3 q - \omega_2 r,\; q' = \omega_1 r - \omega_3 p,\; r' = \omega_2 p - \omega_1 q \quad . \; (2).$$

Offenbar liefern die Principien der Flächen und der lebendigen Kraft zwei Integrale dieser Gleichungen:

$$A\omega_1 p + B\omega_2 q + C\omega_3 r = E,$$
$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = F - 2g(ph + qk + rl),$$

worin $E$ und $F$ zwei willkürliche Constante sind. Die erste erhält man auch, wenn man die Gleichungen (1) mit $p, q, r$ und (2) mit $A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3$ bezüglich multiplicirt und die sechs Resultate addirt, die zweite Gleichung dagegen durch Multiplication der Gleichungen (1)

mit $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ bez., Addition und Vereinfachung der rechten Seite mittelst (2).

Um das Problem lösen zu können, sind noch weitere Integrale ausser diesen beiden erforderlich. Der Fall, in welchem $A = B$ ist und der Schwerpunkt mit dem festen Punkt $O$ zusammenfällt, ist in Kap. 4 erörtert worden. Der zweite Fall, wenn $A = B$ ist und der Schwerpunkt in der Axe des ungleichen Momentes für $O$ liegt, wurde in diesem Kapitel besprochen. Einen dritten hat Sophie Kowalevski gelöst. Wenn $A = B = 2C$ und $l = 0$ ist, der Schwerpunkt also in der Hauptebene liegt, welche die gleichen Trägheitsmomente enthält, kann man die Lösung auf Integrale zurückführen, welche die Form $\int dx/f(x)$ haben, worin $f(x)$ eine ganze rationale Function vom fünften Grad ist. Die erforderlichen Umformungen sind zu ausgedehnt, als dass wir sie hier wiedergeben könnten; wir verweisen auf das Original, *Acta Mathematica*, 22. Januar, 1889 (Bd. 12).

Beisp. Wenn der Körper derart ist, dass $A = B = 2C$ und sowohl $k = 0$ als $l = 0$ ist, zu beweisen, dass

$$\{(\omega_1 + \omega_2 i)^2 - c(p + qi)\}\{(\omega_1 - \omega_2 i)^2 - c(p - qi)\} = G,$$

worin $i^2 = -1$, $c = gh/C$ und $G$ eine willkürliche Constante bezeichnet.

Um es zu beweisen, leite man zuerst aus den Gleichungen (1)

$$\frac{d}{dt}\log\{(\omega_1 + \omega_2 i)^2 - c(p + qi)\} = -i\omega_3$$

ab; durch Veränderung des Vorzeichens von $i$, Addition der beiden Gleichungen und Integration erhält man dann das gesuchte Resultat.

§ 212. *Ein Körper, dessen Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt G nicht nothwendiger Weise gleich sind und dessen in einer der Hauptaxen für G gelegener Punkt O im Raum festliegt, kann sich um O unter dem Einfluss der Schwere bewegen. Er wird um OG, welches vertical angenommen ist, in Rotation versetzt. Man finde die kleinen Schwingungen.*

In Bezug auf die allgemeinen Gleichungen in § 211 ist ersichtlich, dass in diesem Fall $h = 0$, $k = 0$ ist. Da $OC$ immer nahezu vertical bleibt, $\omega_1$ und $\omega_2$ daher kleine Grössen sind, kann man das Product $\omega_1\omega_2$ in der letzten der Gleichungen (1) weglassen. Daraus folgt $\omega_3 =$ Constante. Dieser constante Werth heisse $n$. Aus demselben Grund ist nahezu $r = 1$ und sind $p$ sowohl als $q$ kleine Grössen. Durch Substitution erhält man die folgenden linearen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\omega_1' - (B - C)n\omega_2 &= lgq \\ B\omega_2' - (C - A)n\omega_1 &= -lgp \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

$$\left.\begin{aligned} p' &= qn - \omega_2 \\ q' &= -pn + \omega_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Setzt man für $\omega_1$, $\omega_2$ ihre Werthe aus den Gl. (4) in die Gleichungen (3) ein, so würde man zwei lineare Gleichungen zur Ermittelung von $p$ und $q$ erhalten, die man unmittelbar aus den allgemeinen Gleichungen für kleine Schwingungen in § 15 hätte ableiten können. Man kann sie aber auch dadurch auflösen, dass man annimmt

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= F\sin(\lambda t + f) \\ \omega_2 &= G\cos(\lambda t + f) \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} p &= P\sin(\lambda t + f) \\ q &= Q\cos(\lambda t + f) \end{aligned}\right\}.$$

Setzt man ein, so wird

$$\left.\begin{aligned} A\lambda F-(B-C)nG=glQ \\ B\lambda G-(A-C)nF=glP \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (5),$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda P=Qn-G \\ \lambda Q=Pn-F \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

Durch Elimination der Verhältnisse $F:G:P:Q$ erhält man weiter

$$\lambda^2 n^2 (A+B-C)^2=\{gl+A\lambda^2+(B-C)n^2\}\{gl+B\lambda^2+(A-C)n^2\}.$$

Sind die so gefundenen Werthe von $\lambda$ reell, so macht der Körper kleine Schwingungen um die Lage, in welcher $OG$ vertical ist. Wenn $C$ das grösste Moment und $n^2$ gross genug ist, um sowohl $gl-(C-A)n^2$ als $gl-(C-B)n^2$ negativ zu machen, so fallen sämmtliche Werthe von $\lambda$ reell aus und bei der Drehung des Körpers bleibt $OG$ fortwährend vertical. Liegt $G$ unter $O$, so ist $l$ negativ und es reicht aus, wenn $OC$ die Axe des grössten Momentes ist.

Sollen die Werthe von $\lambda^2$ reell sein, so muss

$$\{gl(A+B)+n^2(AC+BC-2AB-C^2)\}^2>4\{(B-C)n^2+gl\}\{(A-C)n^2+gl\}AB$$

sein und sollen die beiden Werthe von $\lambda^2$ dasselbe Vorzeichen haben, so muss das letzte Glied der quadratischen Gleichung, also

$$\{(B-C)n^2+gl\}\{(A-C)n^2+gl\},$$

positiv sein. Sollen aber die Werthe von $\lambda^2$ beide positiv sein, so muss der Coefficient von $\lambda^2$ in der quadratischen Gleichung positiv, d. h.

$$gl(A+B)<n^2(B-C)(A-C)$$

sein.

In dem speciellen Fall, in dem $A=B$ ist, wird jede Seite der quadratischen Gleichung ein vollständiges Quadrat und man erhält

$$A\lambda^2\pm(2A-C)n\lambda+(A-C)n^2+gl=0,$$

daher

$$\lambda=\mp\frac{2A-C}{2A}n\pm\frac{\sqrt{C^2n^2-4Agl}}{2A}.$$

In diesem Fall reduciren sich die Stabilitätsbedingungen auf $n>2\sqrt{Agl}/C$. Mit Hülfe der Gleichungen (5) und (6) ergibt sich, dass, wenn $A=B$ ist, $F=G$ und $P=Q$ wird. Bezeichnet man mit $\lambda_1$, $\lambda_2$ die eben gefundenen Werthe von $\lambda$, so folgt

$$\left.\begin{aligned} p=P_1\sin(\lambda_1 t+f_1)+P_2\sin(\lambda_2 t+f_2) \\ q=P_1\cos(\lambda_1 t+f_1)+P_2\cos(\lambda_2 t+f_2) \end{aligned}\right\}.$$

Wir wollen die Bezeichnung, die bei den Euler'schen geometrischen Gleichungen Bd. 1, Kap. V benutzt wurde, beibehalten, und $\theta$ sei der Winkel, den $OC$ mit der zur $z$-Axe genommenen Verticalen macht. Alsdann ist $r^2=\cos^2\theta=1-\theta^2$ und daher

$$\theta^2=p^2+q^2=P_1^2+P_2^2+2P_1P_2\cos\{(\lambda_1-\lambda_2)t+f_1-f_2\}.$$

Ist $\varphi$ der Winkel, den die $OA$, $OC$ enthaltende Ebene mit der Ebene macht, welche $OC$ und die Verticale $OV$ enthält, so hat man $p=-\sin\theta\cos\varphi$, $q=\sin\theta\sin\varphi$ und daraus

$$-\operatorname{tg}\varphi=\frac{P_1\cos(\lambda_1 t+f_1)+P_2\cos(\lambda_2 t+f_2)}{P_1\sin(\lambda_1 t+f_1)+P_2\sin(\lambda_2 t+f_2)}.$$

Da $\theta$ sehr klein ist, so erhält man, immer bei derselben Bezeichnung wie vorher, $\psi=nt+\alpha-\varphi$, worin $\alpha$ irgend eine Constante bedeutet, die von der Lage der willkürlichen Ebene abhängt, von welcher aus $\psi$ gemessen wird.

Wenn die Axe des Kreisels die Neigung $\alpha$ gegen die Verticale hat, so ist die Schwingungsperiode um die stationäre Bewegung, wie in § 208 gefunden wurde, $2\pi/p$. Sie ist von den beiden Perioden in § 212 verschieden, welche für den Fall gelten, in welchem die Axe nahezu vertical ist. Eliminirt man $\mu$ aus dem Ausdruck für $p$, so wird, wie man leicht sieht, $p = \lambda_1 - \lambda_2$; die Schwingungsperiode von $\theta$ bei geneigter Axe ist also dieselbe, wie die von $\theta^2$ bei verticaler Axe.

Die hier gefundenen Schwingungsperioden scheinen mit denen nicht übereinzustimmen, die mittelst eines andern Verfahrens in Bd. 1, § 268 ermittelt wurden. Der Unterschied ist aber nur scheinbar. In Bd. 1 wurde die Axe $OC$ auf im Raum festliegende Axen bezogen; wir haben

$$\xi = \theta \cos\psi = P_1 \cos(\mu_1 t + f_1) + P_2 \cos(\mu_2 t + f_2),$$
$$\eta = \theta \sin\psi = P_1 \sin(\mu_1 t + f_1) + P_2 \sin(\mu_2 t + f_2),$$

worin $2A\mu = Cn \pm \sqrt{C^2 n^2 - 4gAl}$ ist.

Bei der Methode in diesem Band wird die Verticale auf im Körper festliegende Axen mittelst der Richtungscosinusse $p = -\theta\cos\varphi$, $q = \theta\sin\varphi$ und 1 bezogen. Nun ist nach der dritten Euler'schen geometrischen Gleichung

$$\omega_3 = \cos\theta\, d\psi/dt + d\varphi/dt,$$

daher $\varphi = nt - \psi +$ Gliedern, welche $P^2$ enthalten, siehe Bd. 1. Man hat also

$$-p = \theta\cos(nt-\psi) = \cos nt\,(P_1\cos\mu_1 t + P_2\cos\mu_2 t) +$$
$$+ \sin nt\,(P_1 \sin\mu_1 t + P_2 \sin\mu_2 t) = P_1\cos(n-\mu_1)t + P_2\cos(n-\mu_2)t,$$
$$q = \theta\sin(nt-\psi) = P_1\sin(n-\mu_1)t + P_2\sin(n-\mu_2)t.$$

Die hier gefundenen Ausdrücke für $p$ und $q$ ergeben sich, da $n - \mu = \pm\lambda$ ist, leicht aus denen für $\xi$, $\eta$ in Bd. 1.

§ 213. *Ein Körper, dessen Hauptmomente für den Schwerpunkt nicht nothwendiger Weise gleich sind, kann sich frei um einen festen Punkt O drehen und befindet sich unter der Wirkung der Schwere im Gleichgewicht. Wenn ihm eine kleine Störung gegeben wird, die Schwingungen zu finden.*

In Bezug auf die allgemeinen Gleichungen in § 211 sind in diesem Fall, wie man sieht, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ klein und in den Gleichungen (1) die Glieder mit den Producten $\omega_1\omega_2$, $\omega_2\omega_3$, $\omega_3\omega_1$ daher wegzulassen. Da ferner im Gleichgewichtszustand $OG$ vertical ist, so verhalten sich $p$, $q$, $r$ immer nahezu wie $h:k:l$; bezeichnet man also $OG$ mit $a$, so kann man statt $p$, $q$, $r$ auf der rechten Seite der Gleichungen (2) setzen $h/a$, $k/a$, $l/a$. Die sechs Gleichungen sind jetzt sämmtlich linear. Um sie aufzulösen, setze man

$$\omega_1 = H\sin(\lambda t + \mu) \text{ und } p = h/a + P\cos(\lambda t + \mu) \quad . \; . \; . \; . \quad (3),$$

und ähnliche Ausdrücke für $\omega_2$, $\omega_3$, $q$ und $r$, die sich ergeben, wenn man $K$ und $L$ für $H$ schreibt, ferner $Q$, $k$ und $R$, $l$ für $P$ und $h$. Substituirt man sie in die Gleichungen, so erhält man sechs lineare Gleichungen und nach Elimination von $P$, $Q$, $R$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{a}{g}A\lambda^2 + k^2 + l^2\right)H - hkK - lhL &= 0\\ -hkH + \left(\frac{a}{g}B\lambda^2 + l^2 + h^2\right)K - lkL &= 0\\ -lhH - lkK + \left(\frac{a}{g}C\lambda^2 + h^2 + k^2\right)L &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Eliminirt man dann noch die Verhältnisse von $H$, $K$, $L$, so kommt man zu einer Gleichung für $\lambda^2$. Die eine Wurzel ist $\lambda^2 = 0$, die andern ergeben sich aus der quadratischen Gleichung

$$\lambda^4 + \left(\frac{k^2+l^2}{A} + \frac{l^2+h^2}{B} + \frac{h^2+k^2}{C}\right)\frac{g}{a}\lambda^2 + g^2\frac{Ah^2+Bk^2+Cl^2}{ABC} = 0 \quad (5).$$

Um sich zu überzeugen, ob die Wurzeln reell sind, hat man das gewöhnliche Kriterium für eine quadratische Gleichung anzuwenden. Danach muss

$$\{A(B-C)h^2 + B(C-A)k^2 - C(A-B)l^2\}^2 + 4AB(B-C)(A-C)h^2k^2 \quad (6)$$

positiv sein. Da man $A$, $B$, $C$ so wählen kann, dass sie sich in abnehmender Reihenfolge befinden, so ist, wie man sieht, die Bedingung erfüllt. Siehe auch § 58.

Liegt $G$ über $O$, so ist $a$ positiv und beide Werthe von $\lambda^2$ sind negativ. Das Gleichgewicht ist daher unstabil. Liegt dagegen $G$ unterhalb $O$, so ist $a$ negativ und die zwei Werthe von $\lambda^2$ positiv. Sind die Wurzeln gleich, so muss jedes der beiden positiven Glieder in (6) für sich Null sein, also $k=0$ und $A(B-C)h^2 = C(A-B)l^2$, d. h. der Schwerpunkt muss in der Asymptote an die focale Hyperbel des Trägheitsellipsoids liegen. Alsdann ist $\lambda^2 = -ag/B$. Der Fall, in welchem $k=0$, $l=0$, $B=C$ ist, wurde in § 212 untersucht.

Bezeichnet man die Werthe von $\lambda^2$ mit 0, $\lambda_1^2$, $\lambda_2^2$, so hat man

$$\omega_1 = H_0 + H_0't + H_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) + H_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2)$$

und ähnliche Ausdrücke für $\omega_2$, $\omega_3$. Die Gleichungen (2) liefern dann $p$, $q$, $r$. Substituirt man aber in (1), so ergibt sich, dass alle nichtperiodischen Glieder, welche $t$ enthalten, verschwinden. Beachtet man, dass $p^2+q^2+r^2=1$ ist, so erhält man schliesslich

$$\omega_1 = \Omega h/a + H_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) + H_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2)$$

und ähnliche Gleichungen für $\omega_2$ und $\omega_3$, wenn man $k$, $K$ und $l$, $L$ für $h$, $H$ setzt. Die Werthe von $K_1$, $L_1$ und $K_2$, $L_2$ werden mittelst der Gleichungen (4) durch $H_1$ und $H_2$ bezüglich ausgedrückt. Man hat auch

$$p = \frac{h}{a} + \frac{lK_1 - kL_1}{a\lambda_1}\cos(\lambda_1 t + \mu_1) + \frac{lK_2 - kL_2}{a\lambda_2}\cos(\lambda_2 t + \mu_2)$$

und ähnlich für $q$ und $r$. Es bleiben fünf Constante, nämlich $\Omega$, $H_1$, $H_2$, $\mu_1$, $\mu_2$, durch die Anfangswerthe von $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $r$ und $q$ zu bestimmen.

Wenn die Wurzeln gleich sind, so trennen sich die von $p$, $r$, $\omega_2$ abhängigen Gleichungen von denen mit $q$, $\omega_1$, $\omega_3$ und bilden zwei Abtheilungen; es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \Omega\frac{h}{a} + H\sin(\lambda t + \mu_1) \\ \omega_3 &= \Omega\frac{l}{a} + H\frac{Aa\lambda^2 + gl^2}{ghl}\sin(\lambda t + \mu_1) \\ q &= \qquad H\frac{A\lambda}{gl}\cos(\lambda t + \mu_1) \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} \omega_2 &= K\sin(\lambda t + \mu_2) \\ p &= \frac{h}{a} + K\frac{l}{a\lambda}\cos(\lambda t + \mu_2) \\ r &= \frac{l}{a} - K\frac{h}{a\lambda}\cos(\lambda t + \mu_2) \end{aligned}\right\}.$$

Lagrange hat dieses Problem in seiner *Mécanique Analytique* auf vollständig verschiedene Art gelöst. Er kommt nicht ganz zu denselben Resultaten, wie wir hier.

Substituirt man die Werthe von $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $p$, $q$, $r$ in die Gleichung der Winkelbewegungsgrösse in § 211 und vernachlässigt die Quadrate kleiner Grössen, so erhält man offenbar

$$(Ah^2 + Bk^2 + Cl^2)\,\Omega = Ea^2, \quad AHh + BKk + CLl = 0.$$

Die erste Gleichung zeigt, dass $\Omega$ verschwindet, wenn die Anfangsbedingungen besagen, dass die Winkelbewegungsgrösse um die Verticale Null ist. In diesem Fall reducirt sich das Problem auf das in § 134 untersuchte.

§ 214. *Ein Körper, dessen Hauptträgheitsmomente nicht nothwendiger Weise gleich sind und von dem ein Punkt O im Raum festliegt, bewegt sich unter dem Einfluss der Schwere um O. Man soll ermitteln, welche Fälle stationärer Bewegung möglich sind, bei welcher eine Hauptaxe OC für O einen graden Kegel um die Verticale beschreibt, und die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um OC constant ist, und soll die kleinen Schwingungen finden.*

Betrachtet man die allgemeinen Gleichungen in § 211, so sieht man, dass $r$ und $\omega_3$ constant gegeben sind. Die beiden ersten Gleichungen unter (1) und (2) bilden mithin ein System *linearer* Gleichungen, aus denen die vier Grössen $p$, $q$, $\omega_1$, $\omega_2$ abzuleiten sind. Die Auflösung der Gleichungen ist also von der Form

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= F_0 + F_1 \sin(\lambda t + f)\\ \omega_2 &= G_0 + G_1 \cos(\lambda t + f)\end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned}p &= P_0 + P_1 \sin(\lambda t + f)\\ q &= Q_0 + Q_1 \cos(\lambda t + f)\end{aligned}\right\}.$$

Sie müssen aber auch der letzten der Gleichungen (1) genügen. Substituirt man, so ergibt sich, dass auf der linken Seite ein Glied von der Gestalt

$$-\frac{1}{2}(A-B)F_1 G_1 \sin 2(\lambda t + f)$$

erscheint, während auf der rechten ein solches Glied nicht auftritt. Es muss daher entweder $A = B$, $F_1 = 0$ oder $G_1 = 0$ sein. Die Bewegung für den Fall, dass $A = B$ ist, wurde bereits in § 207 untersucht. Substituirt man ferner in die letzte der Gleichungen (2) und setzt den Coefficienten von $\sin 2(\lambda t + f)$ gleich Null, so findet man

$$P_1 G_1 - F_1 Q_1 = 0.$$

Setzt man in die beiden ersten Gleichungen (1) ein und lässt die Coefficienten von $\cos(\lambda t + f)$ und $\sin(\lambda t + f)$ Null werden, so ergibt sich

$$A\lambda F_1 - (B-C)nG_1 = gl Q_1, \quad -B\lambda G_1 - (C-A)nF_1 = -gl P_1;$$

daraus folgt, dass $F_1$, $G_1$, $P_1$, $Q_1$ sämmtlich Null sind und $\omega_1$, $\omega_2$, $p$, $q$ daher ebensowohl constant sind, wie die gegebenen Constanten $\omega_3$ und $r$.

In diesem Fall erhält man aus den Gleichungen (2) $\omega_1/p = \omega_2/q = \omega_3/r$; die Umdrehungsaxe muss also vertical stehen. Ist $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit um sie, so wird $\omega_1 = p\omega$, $\omega_2 = q\omega$, $\omega_3 = r\omega$. Durch Substitution in die Gleichungen (1) findet man

$$\frac{h}{p} - \frac{A\omega^2}{g} = \frac{k}{q} - \frac{B\omega^2}{g} = \frac{l}{r} - \frac{C\omega^2}{g} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

*Schliesst man daher den Fall aus, in welchem zwei der Hauptmomente gleich sind, so ist die Bewegung nur dann stationär, wenn die Rotationsaxe senkrecht steht und der Schwerpunkt* ($h, k, l$) *in der verticalen Geraden liegt, deren Gleichungen unter* (3) *gegeben sind.*

Diese Gerade lässt sich geometrisch folgendermassen construiren. Man trage auf der Verticalen die Länge $OV = g/\omega^2$ ab und lege durch $V$ eine Ebene senkrecht zu $OV$, welche ein mit dem reciproken Ellipsoid confocales Ellipsoid berührt. Der Schwerpunkt muss dann auf der Normalen im Berührungspunkt liegen.

Um die kleinen Schwingungen um die stationäre Bewegung zu finden, d. h. um zu bestimmen, ob diese Bewegung stabil ist oder nicht, setze man

$$p = \cos\alpha + P_0 \sin\lambda t + P_1 \cos\lambda t$$

und ähnliche Ausdrücke für $q$, $r$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$. Durch Substitution erhält man zwölf lineare Gleichungen zur Bestimmung von elf Verhältnissen. Eliminirt man die letzteren, so kommt man zu einer Gleichung für $\lambda$. Es reicht für die Stabilität aus, wenn alle Wurzeln dieser Gleichung reell sind.

## Die Bewegung der Kugel.

§ 215. **Die allgemeinen Bewegungsgleichungen.** *Man bestimme die Bewegung einer Kugel auf einer vollkommen rauhen Fläche unter der Wirkung beliebiger Kräfte, deren Resultante durch den Kugelmittelpunkt geht.*

Es möge $G$ der Schwerpunkt des Körpers sein, und die beweglichen Axen $GC$, $GA$, $GB$ seien bezüglich eine Normale zur Fläche und zwei andere darauf und aufeinander rechtwinklige Linien, die wir später in geeigneter Weise wählen werden. Die Bewegung dieser Axen möge durch die Winkelgeschwindigkeiten $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ um ihre augenblickliche Lage auf die in § 3 erklärte Art bestimmt werden. $u$, $v$, $w$ seien die Componenten der Geschwindigkeit von $G$ parallel den Axen und $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um die Axen; es ist dann $w = 0$. $F$, $F'$ seien die Componenten der Reibung der vollkommen rauhen Fläche an der Kugel parallel den Axen $GA$, $GB$ und $R$ sei die normale Reaction. $X$, $Y$, $Z$ seien die Componenten der am Schwerpunkt angreifenden gegebenen Kräfte, $k$ der Trägheitsradius der Kugel für einen Durchmesser, $a$ ihr Radius und ihre Masse sei die Einheit. Wir wollen annehmen, dass im Normalfall die Kugel auf der convexen Seite der festen Fläche rolle und dass die positive Richtung der $z$-Axe nach der äusseren Seite der Fläche gehe. Die Bewegungsgleichungen der Kugel sind dann nach §§ 14 und 5

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} - \theta_3\omega_2 + \theta_2\omega_3 &= \frac{F'a}{k^2} \\ \frac{d\omega_2}{dt} - \theta_1\omega_3 + \theta_3\omega_1 &= -\frac{Fa}{k^2} \\ \frac{d\omega_3}{dt} - \theta_2\omega_1 + \theta_1\omega_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \theta_3 v &= X + F \\ \frac{dv}{dt} + \theta_3 u &= Y + F' \\ -\theta_2 u + \theta_1 v &= Z + R \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

und da der Berührungspunkt der Kugel und Fläche sich in Ruhe befindet,

$$u - a\omega_2 = 0, \quad v + a\omega_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Durch Elimination von $F$, $F'$, $\omega_1$, $\omega_2$ aus diesen Gleichungen erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \theta_3 v &= \frac{a^2}{a^2+k^2}X + \frac{k^2}{a^2+k^2}\theta_1 a\omega_3 \\ \frac{dv}{dt} + \theta_3 u &= \frac{a^2}{a^2+k^2}Y + \frac{k^2}{a^2+k^2}\theta_2 a\omega_3 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (4).$$

§ 216. Den Sinn dieser Gleichungen findet man folgendermassen. Sie sind die beiden Bewegungsgleichungen des Schwerpunktes der Kugel, die man erhält, wenn man annimmt, die gegebene Fläche sei glatt und an dem Schwerpunkt griffen die beschleunigenden Kräfte $\frac{k^2}{a^2+k^2}\,\theta_1 a\omega_3$ und $\frac{k^2}{a^2+k^2}\,\theta_2 a\omega_3$ in der Richtung der Axen $GA$, $GB$ an und dieselben gegebenen Kräfte, wie zuvor, aber in dem Verhältniss $\frac{a^2}{a^2+k^2}$ reducirt. Die Bewegung des Schwerpunktes ist daher in diesen beiden Fällen, wenn die Anfangsbedingungen die gleichen sind, die nämliche. Passendere Ausdrücke für die beiden Zusatzkräfte findet man so. Der Schwerpunkt bewegt sich auf einer Fläche, die durch die Verlängerung aller Normalen zu der gegebenen Fläche um eine constante, dem Radius der Kugel gleiche Länge gebildet wird. Nimmt man an, die Axen $GA$, $GB$ seien Tangenten an die Krümmungslinien dieser Fläche und sind $\varrho_1, \varrho_2$ die Krümmungsradien der durch diese Tangenten gelegten Normalschnitte, so ist

$$\theta_1 = -\frac{v}{\varrho_2}, \qquad \theta_2 = \frac{u}{\varrho_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Ist $G$ die Lage des Schwerpunktes zur Zeit $t$, so ist die Grösse $\theta_3 dt$ der Winkel zwischen den Projectionen zweier aufeinanderfolgenden Lagen von $GA$ auf die Berührungsebene in $G$. Es seien $\chi_1, \chi_2$ die Winkel, welche die Krümmungsradien der Krümmungslinien in $G$ mit der Normalen machen. Der Kugelmittelpunkt wird von $G$ in jede benachbarte Lage $G'$ gebracht, indem man ihn zuerst von $G$ nach $H$ auf der einen Krümmungslinie und dann von $H$ nach $G'$ auf der andern bewegt. Bei der Bewegung der Kugel von $G$ nach $H$ ist der Winkel, um den sich $GA$ dreht, das Product aus dem Bogen $GH$ und der Componenten der Krümmung von $GH$ in der Berührungsebene. Nach dem Meunier'schen Satz ist die Krümmung $\frac{1}{\varrho_1 \cos\chi_1}$; multiplicirt man sie mit $\sin\chi_1$, um ihre Componente in der Berührungsebene zu erhalten, so findet man als den Theil von $\theta_3$, der die Folge der Bewegung längs $GH$ ist, $\frac{u}{\varrho_1}\operatorname{tg}\chi_1$. Behandelt man den Bogen $HG'$ auf dieselbe Art, so hat man

$$\theta_3 = \frac{u}{\varrho_1}\operatorname{tg}\chi_1 + \frac{v}{\varrho_2}\operatorname{tg}\chi_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Zu diesem Resultat kommt man auch, wenn man die Auflösung von Beisp. 2 in § 21 benutzt.

Einen Ausdruck für $\omega_3$ liefern die Gleichungen (1). Substituirt man die Werthe von $\omega_1$, $\omega_2$ aus den geometrischen Gleichungen (3), so erhält man

$$a\frac{d\omega_3}{dt} = uv\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Viele Resultate in diesem Abschnitt werden aus den Gleichungen (4) und (7) abgeleitet; in allen diesen Fällen kann man eine directe Lösung erhalten, wenn man die Gleichungen (1), (2), (3), etc., aus welchen (4) und (7) gefolgert wurden, wieder umformt und solche Vereinfachungen anbringt, wie sie das grade in Frage stehende Problem an die Hand gibt. Ein Beispiel zu dem Verfahren findet man in § 221.

§ 217. Zur Auflösung der Gleichungen kann man, wie folgt, kommen. $(x, y, z)$ seien die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel. $u, v$ lassen sich dann mittelst der Gleichung der Fläche durch $dx/dt$, $dy/dt$, $dz/dt$ ausdrücken, wenn man parallel zu den Bezugsaxen zerlegt. Durch Elimination von $u, v, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ mittelst (4), (5) und (6) ergeben sich drei Gleichungen, die $x, y, z, \omega_3$ und ihre Differentialquotienten nach $t$ enthalten. Sie reichen in Verbindung mit der Gleichung der Fläche aus, um die Bewegung zu jeder Zeit zu bestimmen. Ein Integral liefert stets das Princip der lebendigen Kraft. Da sich die Kugel um den Berührungspunkt als momentan festliegenden Punkt dreht, so haben wir

$$(a^2 + k^2)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + k^2\omega_3^2 = 2\varphi,$$

worin $\varphi$ die Kräftefunction der gegebenen Kräfte bezeichnet. Dies ist dasselbe, wie

$$u^2 + v^2 + \frac{k^2a^2}{a^2+k^2}\omega_3^2 = 2\frac{a^2}{a^2+k^2}\varphi \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (8),$$

wobei die rechte Seite die doppelte Kräftefunction der reducirten gegebenen Kräfte ist.

§ 218. Manchmal ist es vortheilhafter, zur Axe $GA$ die Tangente an die Bahn zu nehmen. Es ist dann $v = 0$ und daher $\omega_1 = 0$. Bezeichnet $U$ die resultirende Geschwindigkeit des Centrums der Kugel, so hat man $u = U$. Bedeutet ferner $R$ den Torsionsradius der die Bahn in $G$ berührenden geodätischen Linie und $\varrho$ den Krümmungsradius des Normalschnittes in $G$ durch die Tangente an die Bahn, so ist $\theta_1 = U/R$ und $\theta_2 = U/\varrho$. In diesen Ausdrücken wird, wie auch sonst, $R$ positiv genommen, wenn die Drehung um $GA$ von der positiven Richtung von $GB$ nach der positiven Richtung von $GC$ hin stattfindet. Wenn $\chi$ den Winkel angibt, den der Krümmungsradius der Bahn mit der Normalen macht, so ist, wie zuvor, $\theta_3 = \operatorname{tg}\chi\, U/\varrho$. Die Gleichungen (4) werden

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{a^2}{a^2+k^2}X + \frac{k^2}{a^2+k^2}\frac{U}{R}a\omega_3 \\ \frac{U^2}{\varrho}\operatorname{tg}\chi &= \frac{a^2}{a^2+k^2}Y + \frac{k^2}{a^2+k^2}\frac{U}{\varrho}a\omega_3 \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (IV).$$

Der Ausdruck für $\omega_3$ in den Gleichungen (1) nimmt jetzt die Gestalt an

$$a\frac{d\omega_3}{dt} = -\frac{U^2}{R} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (VII).$$

Man kann durch geometrische Betrachtungen zeigen, dass diese Form mit der in (7) gegebenen identisch ist.

§ 219. *Um den Druck auf die Fläche zu finden,* benutze man die letzte Gleichung in (2). Man kann sie in einer der beiden Formen schreiben

$$\frac{U^2}{\varrho} = \frac{u^2}{\varrho_1} + \frac{v^2}{\varrho^2} = -Z - R \quad \dots \dots \dots \quad (9).$$

Die Kugel verlässt die Fläche, wenn $R$ das Vorzeichen wechselt. Dieser Fall tritt im Allgemeinen ein, wenn die Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel von der einen Hälfte der Projection des Krümmungsradius des Normalschnittes auf die Richtung der resultirenden Kraft herrührt.

§ 220. Beisp. 1. Man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit der Kugel um die Normale zur Fläche, d. h. also $\omega_3$, nur dann constant ist, wenn die Richtung der Bewegung des Schwerpunktes eine Tangente an eine Krümmungslinie ist.

Beisp. 2. Eine Kugel wird ohne Anfangswinkelgeschwindigkeit um den zur Fläche senkrechten Radius so fortgeschleudert, dass ihr Centrum sich längs einer Krümmungslinie zu bewegen beginnt. Man zeige, dass sie fortfährt, diese Krümmungslinie zu beschreiben, wenn die Kraft, deren Richtung auf der Krümmungslinie senkrecht steht und die Fläche berührt, sieben Fünftel der in der Berührungsebene an die Fläche liegenden Componenten der Centrifugalkraft der ganzen im Centrum vereinigten Masse gleichkommt.

Beisp. 3. Wenn an der Kugel überhaupt keine Kräfte angreifen, zu zeigen, dass

$$U^2\left(\operatorname{tg}^2\chi + \tfrac{2}{7}\right) = \text{Constante}, \quad a\omega_3 = \tfrac{7}{2}\,U\operatorname{tg}\chi, \quad \frac{d}{ds}\log\left(\operatorname{tg}^2\chi + \tfrac{2}{7}\right) = -\frac{2}{R}\operatorname{tg}\chi$$

ist. Man zeige auch, dass die Bahn nur, wenn sie eine ebene Curve ist, eine geodätische Linie darstellt.

§ 221. **Die Bewegung auf einer rauhen Ebene.** *Wenn die gegebene Fläche, auf der die Kugel rollt, eine Ebene ist,* so wird sowohl $\varrho_1$ als $\varrho_2$ unendlich gross und mithin $\theta_1$ und $\theta_2$ Null. *Wenn daher eine homogene Kugel auf einer vollkommen rauhen Ebene unter der Wirkung ganz beliebiger Kräfte, deren Resultante durch den Kugelmittelpunkt geht, rollt, so ist die Bewegung des Schwerpunktes bei denselben Anfangsbedingungen die nämliche, als sie sein würde, wenn die Ebene glatt wäre und alle Kräfte auf fünf Siebentel ihres früheren Werthes reducirt würden. Es ist ferner klar, dass die Ebene die einzige Fläche ist, welche diese Eigenschaft für alle Anfangsbedingungen besitzt.*

Der erste Theil des Satzes lässt sich leicht aus den Elementarsätzen ableiten. Nimmt man an, die Richtungen der $x$- und $y$-Axe lägen im Raum fest und seien der rauhen Ebene parallel, so hat man (§§ 14 und 236)

$$\left.\begin{aligned} k^2\omega_1' &= F'a \\ k^2\omega_2' &= -Fa \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} u' &= X + F \\ v' &= Y + F' \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} u - a\omega_2 &= 0 \\ v + a\omega_1 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Durch Elimination von $F$, $F'$, $\omega_1$, $\omega_2$ erhält man die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = \frac{a^2}{a^2 + k^2}X, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{a^2}{a^2 + k^2}Y,$$

welche das Theorem in analytischer Form ausdrückt. Die sechs Bewegungsgleichungen, aus welchen der Ausdruck hergeleitet wurde, sind offenbar nur vereinfachte Formen der Gleichungen (1), (2), (3) in § 215. Siehe Bd. 1, § 269.

§ 222. Beisp. 1. Wenn die Ebene unvollkommen rauh ist, zu beweisen, dass die Kugel nur dann rollen kann, wenn zwei Siebentel der resultirenden gegebenen Kraft parallel der Ebene kleiner ist, als der grösste Reibungswerth, der zur Wirkung gebracht werden kann. Man beweise auch, dass die Richtung der Reibung der resultirenden gegebenen Kraft parallel der Ebene entgegengesetzt ist.

Beisp. 2. Wenn die rauhe Ebene, auf welcher die Kugel rollt, um die durch irgend einen Punkt $O$ gehende Normale mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ rotirt, zu beweisen, dass die Bewegung des Schwerpunktes im Raum die nämliche ist, als sie sein würde, wenn die Ebene glatt wäre und an der Kugel die auf fünf Siebentel ihres früheren Werthes reducirten gegebenen Kräfte in Verbindung mit einer beschleunigenden Kraft angriffen, deren Richtung senkrecht zur Tangente an die Bahn ist und welche $\frac{2}{7}\Omega U$ gleichkommt, wobei $U$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes bedeutet. Wenn die positive Richtung der Rotation von $\Omega$ diejenige ist, in der sich die Zeiger einer Uhr drehen, so greift diese Zusatzkraft für eine Person, die im Schwerpunkt steht und nach der Bewegungsrichtung hinsieht, auf der rechten Seite der Tangente an.

§ 223. **Die Bewegung auf einer rauhen Kugelfläche.** *Wenn die gegebene Fläche, auf welcher die Kugel rollt, eine andere Kugel* vom Radius $b - a$ *ist,* so wird $\varrho_1 = \varrho_2 = b$. Daher ist $\omega_3$ constant. Dieser constante Werth heisse $n$ und $U$ sei die Geschwindigkeit des Schwerpunktes. Da jeder normale Schnitt ein Hauptschnitt ist, wollen wir annehmen, $GA$ sei eine Tangente an die Bahn. *Die Bewegung des Schwerpunktes ist mithin die nämliche, als wenn an der ganzen in diesem Punkt vereinigten Masse eine beschleunigende Kraft* $\frac{k^2}{a^2+k^2}\frac{anU}{b}$ *senkrecht zur Bahn angriffe und alle gegebenen Kräfte in dem Verhältniss* $a^2/(a^2+k^2)$ *reducirt würden.* Entspricht die relative Lage der Axen $GA$, $GB$, $GC$ dem gewöhnlichen Uebereinkommen und liegt die positive Richtung von $GA$ in der Richtung der Bewegung, so ist die Winkelgeschwindigkeit $n$ offenbar positiv zu nehmen, wenn der vordere Theil der Kugel sich rechts von $GA$ hin bewegt. Die Zusatzkraft hat ebenfalls, wenn sie positiv ist, die Richtung nach der rechten Seite der Tangente hin. Da diese Zusatzkraft senkrecht zur Bahn wirkt, so tritt sie in der Gleichung der lebendigen Kraft nicht auf. Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in jeder Lage ist daher die nämliche, als wenn er nur unter der Wirkung der reducirten Kräfte in sie gelangt wäre. Es sei $O$ das Centrum der festen Kugel, $\theta$ der Winkel, den $OG$ mit der Verticalen $OZ$ macht und $\psi$ der Winkel zwischen der Ebene $ZOG$ und irgend einer festen durch $OZ$ gehenden Ebene. Nach dem Princip der lebendigen Kraft ist dann

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = F - \frac{2g}{b}\frac{a^2}{a^2+k^2}\cos\theta \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{(I)},$$

worin $F$ eine aus den Anfangsbedingungen zu bestimmende Constante bedeutet. Dies ergibt sich auch aus Gleichung (8).

Nimmt man ferner die Momente um $OZ$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{b}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}\right)=\frac{k^2}{a^2+k^2}an\frac{d\theta}{dt} \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad \text{(II)},$$

welche, wie man sieht, nur eine Umformung der zweiten Gleichung in (4) ist. Integrirt man, so wird

$$\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}=E-\frac{k^2}{a^2+k^2}\frac{an}{b}\cos\theta \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad \text{(III)},$$

worin $E$ eine Constante ist. Diese beiden Gleichungen reichen zur Bestimmung von $d\theta/dt$ und $d\psi/dt$ bei beliebig gegebenen Anfangsbedingungen hin.

Der Druck auf jede Kugel ist durch

$$\frac{R}{m}=g\cos\theta\,\frac{3a^2+k}{a^2+k^2}-bF \cdot \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad \text{(IV)}$$

gegeben, worin $m$ die Masse der Kugel bezeichnet. Die Kugeln trennen sich, wenn $R$ verschwindet und das Zeichen wechselt.

Wenn die Kugel keine Anfangswinkelgeschwindigkeit um die Normale zur Fläche hat, so ist offenbar $n=0$ und die zusätzliche gegebene Kraft ist Null. *Wenn daher eine homogene Kugel auf einer vollkommen rauhen festen sphärischen Fläche rollt und wenn die Kugel entweder von der Ruhe ausgeht oder ihre Anfangswinkelgeschwindigkeit um die gemeinsame Normale Null ist, so hat das Centrum der Kugel die nämliche Bewegung, als wenn die feste sphärische Fläche glatt wäre und die an der rollenden Kugel angreifenden Kräfte auf fünf Siebentel ihres früheren Werthes reducirt würden.*

Man beachte, dass die Gleichungen (I) und (III), welche die Bewegung bestimmen, wenn die Schwere die wirkende Kraft ist, mit denen unter (6) in § 202 für die Bewegung des Kreisels identisch sind. Die Resultate in § 203 finden daher auch Anwendung auf die Bewegung der Kugel. Wenn die Kugel die Fläche nicht verlässt, so rollt sie um die feste Kugel herum und schwingt dabei zwischen einem oberen und unteren Horizontalkreis hin und her. Soll die Kugel die Fläche nicht verlassen, so darf der Werth von $\cos\theta$, der sich ergibt, wenn man den Druck $R$ gleich Null setzt, nicht zwischen den die Bewegung begrenzenden Kreisen liegen. Diese Sätze werden in den hier folgenden Beispielen weiter ausgeführt.

Beisp. 1. Eine homogene Kugel rollt unter der Wirkung der Schwere auf irgend eine Art auf einer vollkommen rauhen festen Kugel, deren Centrum $O$ ist. Man beweise, dass während der Bewegung (1) die Geschwindigkeit des Centrums $G$ der beweglichen Kugel derjenigen gleich ist, welche sie in Folge freien Fallens durch fünf Siebentel ihrer Tiefe unter einer festen horizontalen Ebene erlangt hätte; (2) die bewegliche Kugel die feste verlässt, wenn die Höhe ihres Centrums über $O$ zehn Siebenzehntel der Höhe der festen Ebene über demselben Punkt beträgt; (3) die seitliche Geschwindigkeit von $G$ der Tangente des Winkels proportional ist, den $GU$ mit dem Horizont macht, wenn man unter $U$ einen festen Punkt auf der durch $O$ gehenden Verticalen versteht.

Beisp. 2. Wie in dem entsprechenden Problem für den Kreisel, § 205, sei die Anfangsbewegung der Kugel nur die Rotation $n$ um die gemeinschaftliche

Normale. Wenn $i$ die Neigung dieser Normalen gegen die Verticale bezeichnet, zu beweisen, dass die sphärischen Radien der Kreise, zwischen denen der Berührungspunkt hin- und herschwingt, $i$ und der Werth von $\theta$ sind, welcher zwischen $i$ und $\pi$ liegt und durch die quadratische Gleichung

$$\cos^2\theta - 1 + 2p(\cos i - \cos\theta) = 0 \quad \text{und} \quad 4bg(a^2 + k^2)p = k^4 n^2$$

gegeben ist. Die Kugeln trennen sich, wenn $\cos\theta = \cos i\, 2a^2/(3a^2 + k^2)$ ist und es wird angenommen, dass die Anfangswinkelgeschwindigkeit $n$ so gross sei, dass dieser Werth von $\theta$ nicht zwischen den sphärischen Radien der Grenzkreise liegt.

§ 224. **Eine Kugel rollt auf einer beweglichen Kugel.** Wenn die leitende bisher feste Kugel entweder gezwungen wird, mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um einen festen Durchmesser zu rotiren, oder sich frei um ihr Centrum als festen Punkt bewegen kann, so ändern sich die obigen Sätze nur wenig. Die Hauptänderung besteht darin, dass die Grösse $n$ durch eine andere Constante ersetzt werden muss, die wir $n'$ nennen wollen.

Da die Beweise denen für eine feste leitende Kugel sehr ähnlich sind, so brauchen wir nicht näher auf sie einzugehen. Es reicht aus, wenn wir die Resultate in den folgenden Fällen angeben; ihre Ableitung überlassen wir dem Leser.

Wenn die leitende Kugel gezwungen wird, sich um die Axe $OZ$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ zu drehen, so behalten die Gleichungen (1) und (2) in § 215 ihre Geltung, nur die geometrischen Gleichungen (3) werden

$$u - a\omega_2 = 0, \quad v + a\omega_1 = c\Omega \sin\theta,$$

worin $c$ den Radius der Kugel, deren Durchmesser $OZ$ festliegt, und $\theta$ die Neigung der gemeinschaftlichen Normalen $OG$ der beiden Kugeln gegen $OZ$ angibt und die Axe $GA$ in der Ebene $ZOG$ liegt.

Wenn die leitende Kugel sich frei um ihr Centrum $O$ bewegen kann, so stimmen die Bewegungsgleichungen mit denen unter (1) überein mit der einzigen Ausnahme, dass man $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ statt $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $c$ statt $a$ und $MK^2$ statt $mk^2$ zu setzen hat. Die geometrischen Gleichungen (3) werden

$$u - a\omega_2 = c\Omega_2, \quad v + a\omega_1 = -c\Omega_1.$$

Beisp. 1. Eine Kugel vom Radius $a$ rollt auf einer leitenden Kugel vom Radius $c$, die gezwungen ist, sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ um einen festen Durchmesser zu drehen, der zur Bezugsaxe genommen wird. Wenn $\theta$, $\psi$ die Winkelcoordinaten der gemeinschaftlichen Normalen $OG$ sind, zu beweisen, (1), dass $a\omega_3 + c\Omega\cos\theta = an'$ ist, unter $n'$ eine Constante verstanden. Der Werth von $n'$ ergibt sich daher aus den Anfangsbedingungen.

Wenn $U$ die Geschwindigkeit des Centrums $G$ der rollenden Kugel im Raum ist, zu beweisen, (2), dass die Geschwindigkeit des Centrums $G$ dieselbe ist, als wenn an der ganzen in diesem Punkt vereinigten Masse die gegebenen Kräfte, in dem Verhältniss $a^2/(a^2 + k^2)$ reducirt, in Verbindung mit einer beschleunigenden Kraft $\frac{k^2}{a + k^2}\frac{an'U}{b}$ angriffen, welche in einer Richtung wirkt, die senkrecht zur Bahn ist und nach der rechten Seite der Tangente zu geht. Dabei ist $b = a + c$.

Man beweise (3), dass der Druck $R$ auf die rollende Kugel durch $-R = Z + U^2/b$ angegeben wird.

Aus diesen Resultaten folgt, dass die Gleichungen (II), (III) und (IV) in § 223 auch dann gelten, wenn die leitende Kugel gleichförmig um einen verticalen Durchmesser rotirt und die Schwere die allein wirkende Kraft ist.

Beisp. 2. Eine Kugel vom Radius $a$ und der Masse $m$ rollt auf einer leitenden Kugel vom Radius $c$ und der Masse $M$, welche sich frei um ihr Centrum $O$ als festen Punkt bewegen kann. Es seien $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten der leitenden Kugel um Axen, die sich im Punkt $O$ treffen und denen parallel laufen, für welche $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten der rollenden Kugel sind, § 215. Man beweise (1), dass $a\omega_3 + c\Omega_3 = an'$ ist, worin $n'$ eine Constante bedeutet. Der Werth von $n'$ ergibt sich daher auch hier aus den Anfangsbedingungen; er ist Null, wenn die beiden Kugeln von der Ruhe ausgehen.

Man beweise (2), dass die Bewegung von $G$ mit derjenigen identisch ist, welche stattfände, wenn an der in $G$ vereinigten Masse der Kugel die im Verhältniss $e/(1+e)$ reducirten gegebenen Kräfte und zugleich eine seitliche beschleunigende Kraft $\dfrac{1}{1+e}\dfrac{an'U}{b}$ in einer Richtung angriffe, die senkrecht zur Tangente ist und nach rechts hin geht. Hierbei ist $e = \dfrac{a^2}{k^2} + \dfrac{m}{M}\dfrac{c^2}{K^2}$, $U$ die Geschwindigkeit von $G$ und $b = a + c$.

Beisp. 3. Eine vollkommen rauhe Kugel vom Radius $c$ lässt man um einen verticalen festliegenden Durchmesser mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit $n$ rotiren. Eine gleichförmige Kugel vom Radius $a$ wird in einem Punkt auf sie gesetzt, der den Abstand $c\alpha$ von ihrem höchsten Punkt hat; man untersuche die Bewegung und bestimme die Winkelgeschwindigkeit der Kugel in jeder Lage. Man zeige, dass die Kugel die rotirende Kugel verlässt, wenn der Berührungspunkt von der Spitze um den Winkel $\theta$ absteht, wobei

$$\cos\theta = \frac{10}{17}\cos\alpha + \frac{4}{119}\frac{c^2 n^2 \sin^2\alpha}{(a+c)g}$$

ist, und beachte den anfänglichen Zusammenstoss. [Math. Tripos, 1889.]

§ 225. **Die Bewegung auf einem rauhen Cylinder.** *Wenn die Fläche, auf welcher die Kugel rollt, ein Cylinder ist*, so sind die Krümmungslinien die Erzeugenden und die Querschnitte. Die Axe $GA$ laufe den Erzeugenden parallel; alsdann ist $\varrho_1$ unendlich gross und $\varrho_2 - a$ der Krümmungsradius des Querschnittes. Wir haben $\theta_1 = -v/\varrho_2$, $\theta_2 = 0$ und, da $\chi_2 = 0$, $\theta_3 = 0$. Die Gleichungen (4) und (7) werden daher

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{a^2}{a^2+k^2}X - \frac{k^2}{a^2+k^2}\frac{v}{\varrho_2}a\omega_3 \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{a^2}{a^2+k^2}Y \\ \frac{d(a\omega_3)}{dt} &= \frac{uv}{\varrho_2} \end{aligned}\right\}.$$

Aus ihnen kann die Bewegung gefunden werden.

Die zweite Gleichung liefert die Bewegung senkrecht zu den Erzeugenden des Cylinders und lässt sich, wenn $Y$ für alle Lagen der Kugel auf derselben Erzeugenden sich gleich bleibt, unabhängig von den beiden andern auflösen. *Die seitliche Bewegung des Centrums der Kugel ist daher unter denselben Anfangsumständen die nämliche, wie die einer glatten Kugel, welche gezwungen ist, in einer zu den Erzeugenden senkrechten Ebene auf dem Querschnitt des Cylinders zu gleiten und an welcher die nämlichen, aber im Verhältniss $a^2/(a^2+k^2)$ reducirten, Kräfte angreifen.*

Hat man $v$ gefunden, dann verfahre man so: $\varphi$ sei der Winkel, den die Normalebene an den Cylinder, welche durch eine Erzeugende und den Mittelpunkt der Kugel geht, mit irgend einer festen durch eine Erzeugende gehenden Ebene macht; alsdann ist $v = \varrho_2\, d\varphi/dt$. Wenn $d\varphi/dt$ nicht Null ist, so wird die erste und dritte Gleichung

$$\frac{du}{d\varphi} + \frac{k^2}{a^2+k^2} a\omega_3 = \frac{a^2}{a^2+k^2} \frac{\varrho_2}{v} X, \quad u = \frac{d(a\omega_3)}{d\varphi}.$$

Bleibt sich $X$ für alle Lagen der Kugel auf derselben Erzeugenden gleich, so lassen sich diese Gleichungen ohne Schwierigkeit auflösen. Denn, da $v$ und $\varrho_2$ sich durch $\varphi$ ausdrücken lassen, so haben wir zwei lineare Gleichungen, aus denen $U$ und $a\omega_3$ zu finden sind. Ist $X$ Null und $k^2 = \frac{2}{5} a^2$, so erhält man

$$a\omega_3 = A \sin\left(\sqrt{\tfrac{2}{7}}\,\varphi + B\right), \quad u = A\sqrt{\tfrac{2}{7}} \cos\left(\sqrt{\tfrac{2}{7}}\,\varphi + B\right),$$

worin $A$ und $B$ zwei willkürliche, aus den Anfangswerthen von $u$ und $\omega_3$ sich ergebende Constanten sind.

Bleibt sich dagegen $X$ für alle Lagen der Kugel auf derselben Erzeugenden nicht gleich, so sei $\xi$ die Strecke, welche die Kugel auf einer Erzeugenden zurücklegt. Alsdann ist

$$u = \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\varphi} \cdot \frac{v}{\varrho_2}.$$

Setzt man diesen Werth von $u$ ein, so hat man zwei Gleichungen, mittelst welcher sich $\xi$ und $a\omega_3$ durch $\varphi$ ausdrücken lassen. Ein Integral derselben ist die Gleichung (8) in § 217, welche aus dem Princip der lebendigen Kraft erhalten wurde.

§ 226. Beisp. 1. Eine Kugel rollt unter der Wirkung der Schwere auf einer vollkommen rauhen cylindrischen Fläche, deren Axe den Winkel $\alpha$ mit dem Horizont macht. Der Querschnitt des Cylinders ist derart, dass der Mittelpunkt der Kugel, wenn die Kugel auf dem Querschnitt rollt, eine Cycloide beschreibt, deren Scheitel in einer horizontalen Linie liegen. Wenn die Kugel von der Ruhe ausgeht und dabei ihr Centrum in einem Scheitelpunkt liegt, die Bewegung zu finden.

Die Lage der Kugel werde durch die längs einer Erzeugenden durchlaufene Strecke $\xi$ und den vom Scheitel aus gemessenen Cycloidenbogen $s$ definirt. Wenn $4b$ der Krümmungsradius der Cycloide für den Scheitel ist, so erhält man $s = 4b \cos\sqrt{\frac{5g\cos\alpha}{28b}}\, t$.

Da $v = ds/dt$ und $\varrho_2{}^2 + s^2 = 16b^2$, so ergibt sich $v/\varrho_2$ constant. Daraus findet man leicht

$$\omega_3 = -\frac{\sin\alpha}{a}\sqrt{\frac{35bg}{\cos\alpha}}\left\{1 - \cos\frac{1}{7}\sqrt{\frac{5g\cos\alpha}{2b}}\, t\right\},$$

$$u = \sin\alpha\sqrt{\frac{10bg}{\cos\alpha}} \sin\frac{1}{7}\sqrt{\frac{5g\cos\alpha}{2b}}\, t.$$

Beisp. 2. Wenn man eine rauhe unelastische Kugel vom Radius $c$ auf die tiefste Erzeugende in dem Innern eines Kreiscylinders vom Radius $a$ fallen lässt und der Kreiscylinder sich frei mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ um seine unter dem Winkel $\alpha$ gegen den Horizont befestigte Axe dreht, zu beweisen, dass sich die Ebene durch

die Axe des Cylinders und den Mittelpunkt der Kugel wie ein einfaches Kreispendel von der Länge $l$ bewegt, wobei

$$l \cdot (2m + 5M) \cos\alpha = (a - c)(2m + 7M)$$

und $M$, $m$ die Massen des Cylinders bez. der Kugel sind. [May Exam., 1877.]

§ 227. Die Relation $v/\varrho_2 =$ Constante gilt immer dann, wenn (1) die an dem Centrum der Kugel angreifenden Kräfte und die Gestalt des Querschnittes des Cylinders eine solche Beziehung zueinander haben, dass die Tangentialcomponente in constantem Verhältniss zu $\varrho_2\, d\varrho_2/ds$ steht und wenn (2) die Kugel von der Ruhe ausgeht und sich dabei in einem Punkt befindet, für welchen $\varrho_2$ Null ist. Alsdann hat die auf dem Querschnitt durch das Centrum der Kugel normale Ebene eine constante Winkelgeschwindigkeit im Raum und die Componente der Bewegung der Kugel senkrecht zu den Erzeugenden ist unabhängig von der Bewegung in der Richtung der Erzeugenden.

Beisp. Eine Kugel rollt auf einem vollkommen rauhen graden Kreiscylinder, dessen Radius $c$ ist und es greifen keine Kräfte an ihr an; man zeige, dass die Bahn, welche der Berührungspunkt beschreibt, die Curve $x = A \sin \frac{y}{c}\sqrt{\frac{2}{7}}$ wird, wenn der Cylinder auf eine Ebene abgewickelt wird.

Daraus geht hervor, dass man die Kugel nur dann beständig in derselben Richtung der Länge des Cylinders nach sich vorwärts bewegen lassen kann, wenn man den Berührungspunkt eine Erzeugende beschreiben lässt.

§ 228. **Die Bewegung auf einem rauhen Kegel.** *Wenn die Fläche, auf der die Kugel rollt, ein Kegel ist*, so sind die Krümmungslinien die Erzeugenden und ihre orthogonalen Trajectorien. Läuft die Axe $GA$ der Erzeugenden parallel, so ist $\varrho_1$ unendlich gross und $\varrho_2 - a$ der Krümmungsradius eines auf den Erzeugenden senkrechten Normalschnittes. Ferner ist $\theta_1 = -v/\varrho_2$, $\theta_2 = 0$. Die Lage der Kugel werde durch den Abstand $r$ ihres Mittelpunktes von der Spitze $O$ des Kegels, auf welchem das Centrum stets liegt, und einen Winkel $\varphi$ definirt, welcher derart ist, dass $d\varphi$ den Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Lagen des Abstandes $r$ angibt und positiv zu nehmen ist, wenn sich das Centrum in der positiven Richtung von $GB$ bewegt. Würde der Kegel auf eine Ebene abgewickelt, so wären $r$ und $\varphi$ offenbar die gewöhnlichen Polarcoordinaten eines Punktes $G$. Man hat

$$\theta_3 = \frac{d\varphi}{dt}, \quad u = \frac{dr}{dt}, \quad v = r\frac{d\varphi}{dt}.$$

Die Gleichungen (4) und (7) werden daher

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+k^2}X - \frac{k^2}{a^2+k^2}\frac{r}{\varrho_2}\,a\omega_3\frac{d\varphi}{dt} \\ &\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{a^2}{a^2+k^2}Y \\ &\qquad\frac{d(a\omega_3)}{dt} = \frac{r}{\varrho_2}\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt} \end{aligned}\right\}.$$

Wenn die gegebenen Kräfte keine Componente senkrecht zu der durch eine Erzeugende gelegten Normalebene haben, so ist $Y = 0$ und $r^2 d\varphi/dt = h$, worin $h$ eine von den Anfangswerthen von $r$ und $v$ abhängende Constante ist.

Ist auch die Componente $X$ der Kräfte in der Richtung einer Erzeugenden eine Function von $r$ allein, so lässt sich ein weiteres Integral aus dem Princip der lebendigen Kraft ableiten, nämlich

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{k^2}{a^2+k^2}\,a^2\omega_3{}^2 = \frac{2a^2}{a^2+k^2}\int X\,dr + h',$$

unter $h'$ eine andere von den Anfangswerthen von $u$, $v$ und $r$ abhängige Constante verstanden.

Wenn ferner der Kegel grade ist, $\alpha$ den halben Winkel an der Spitze bezeichnet und $r_2 = r \operatorname{tg} \alpha$ gesetzt wird, so erhält man

$$a\omega_3 = -\frac{h \operatorname{cotg} \alpha}{r} + h'',$$

worin $h''$ eine dritte Constante bedeutet, die von den Anfangswerthen von $\omega_3$ und $r$ abhängt. Die Bewegungsgleichungen des Centrums der Kugel gleichen denen des Massenpunktes bei centralen Kräften. Daher findet man $r$ und $\varphi$ als Functionen der Zeit, wenn man sie als Coordinaten eines freien Massenpunktes betrachtet, der sich in einer Ebene unter der Wirkung einer centralen Kraft bewegt, die durch $\frac{a^2}{a^2+k^2}\left\{X - k^2\omega_3\,\frac{d\omega_3}{dr}\right\}$ dargestellt wird; dabei hat $\omega_3$ den eben gefundenen Werth.

§ 229. Beisp. Eine Kugel rollt auf einem vollkommen rauhen Kegel, der solcher Art ist, dass der Kegel, auf welchem das Centrum $G$ stets liegt, die Gleichung $r = \varrho_2 F(\varphi)$ hat. Greift an dem Centrum eine nach der Spitze gerichtete Kraft an, das Gesetz für die Kraft zu finden, wenn eine gegebene Bahn beschrieben werden soll. Wenn die Bahn die Gleichung $1/r = f(\varphi)$ hat, zu beweisen, dass die Kraft

$$X = k^2\omega_3\,\frac{\partial\omega_3}{\partial t} + \frac{a^2+k^2}{a^2}\,h^2 f^2\left(f + \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right)$$

ist, worin $\omega_3$ sich aus

$$\frac{\partial\omega_3}{\partial\varphi} = -\frac{h}{a}\,F\,\frac{\partial f}{\partial\varphi}$$

ergibt.

§ 230. **Die Bewegung auf einer Umdrehungsfläche.** *Die gegebene rauhe Fläche sei eine Umdrehungsfläche, ihre Figurenaxe vertical, ihr Scheitel aufwärts gerichtet und die Schwere die allein gegebene Kraft.* In diesem Fall sind die Meridiane und Parallelkreise die Krümmungslinien. Die Axe der Figur sei die $Z$-Axe, $\theta$ der Winkel, den die Axe $GC$ mit der $Z$-Axe macht, $\psi$ der Winkel zwischen der Ebene, welche $Z$ und $GC$ enthält, und irgend einer festen verticalen Ebene. Alsdann ist

$$\theta_1 = -\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt},\quad \theta_2 = \frac{d\theta}{dt},\quad \theta_3 = \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}.$$

Die Gleichungen (4) werden mithin

$$\frac{du}{dt} - \cos\theta\frac{d\psi}{dt}\,v = \frac{a^2}{a^2+k^2}\,g\sin\theta - \frac{k^2}{a^2+k^2}\,a\omega_3\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} \quad \ldots \quad \text{(I)},$$

$$\frac{dv}{dt} + \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}\,u = \frac{k^2}{a^2+k^2}\,a\omega_3\,\frac{d\theta}{dt} \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

und die Gleichung (8) wird

$$u^2 + v^2 + \frac{k^2}{a^2+k^2}\,a^2\omega_3{}^2 = E + 2g\,\frac{a^2}{a^2+k^2}\int\varrho\sin\theta\,d\theta \quad \ldots \quad \text{(III)},$$

worin $E$ eine Constante und $\varrho$ den Krümmungsradius des Meridians bezeichnet. Aus (7) erhält man ferner

$$\frac{d\omega_3}{dt} = -\frac{uv}{a}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\sin\theta}{r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV),$$

worin $r$ der Abstand des Centrums der Kugel von der $Z$-Axe ist. Die geometrischen Gleichungen (5) werden

$$u = \varrho\frac{d\theta}{dt}, \quad v = r\frac{d\psi}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (V).$$

Um sie aufzulösen, gebe man (II) die Gestalt

$$\frac{dv}{dt} + \cos\theta\frac{d\psi}{d\theta}u = \frac{k^2}{a^2+k^2}a\omega_3;$$

dadurch wird (V)

$$\frac{dv}{d\theta} + \frac{\varrho\cos\theta}{r}v = \frac{k^2}{a^2+k^2}a\omega_3.$$

Differenzirt man, so wird mit Hülfe von (IV)

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{\varrho\cos\theta}{r}\frac{dv}{d\theta} + Pv = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VI),$$

worin

$$P = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\varrho\cos\theta}{r}\right) + \frac{k^2}{k^2+a^2}\left(1 - \frac{\varrho\sin\theta}{r}\right).$$

$q$ und $r$ lassen sich nun aus der Gleichung des Meridians als Functionen von $\theta$ ableiten. $P$ ist daher eine bekannte Function von $\theta$. Durch Auflösung dieser linearen Gleichung findet man dann $v$ in Ausdrücken von $\theta$. Aus (IV) ergibt sich weiter

$$\frac{d\omega_3}{d\theta} = -\frac{v}{a}\left(1 - \frac{\varrho\sin\theta}{r}\right)$$

und hat man daraus $\omega_3$ gefunden, so erhält man $u$ mit Hülfe der Gleichung (III). Sind aber $u$ und $v$ bekannt, so folgt $\theta$ und $\psi$ aus den Gleichungen (V).

§ 231. **Schwingungen auf dem Gipfel einer rauhen festen Fläche.** *Eine schwere Kugel, die um eine verticale Axe rotirt, wird im Gleichgewichtszustand auf den höchsten Punkt einer Fläche von beliebiger Gestalt gesetzt und macht in Folge einer leichten Störung kleine Schwingungen; man finde die Bewegung.*

$O$ sei der höchste Punkt derjenigen Fläche, auf welcher der Schwerpunkt $G$ immer liegt. Die Tangenten an die Krümmungslinien in $O$ mögen zur $x$- und $y$-Axe genommen werden und $(x, y, z)$ seien die Coordinaten von $G$. Wir wollen annehmen, $O$ sei kein singulärer Punkt der Fläche. Um die allgemeinen Bewegungsgleichungen (4) in § 215 zu vereinfachen, werden wir als Axen $GA$ und $GB$ die Tangenten an die Krümmungslinien in $G$ nehmen. Da aber $G$ sehr nahe bei $O$ bleibt, so sind die Tangenten an die Krümmungslinien in $G$ nahezu denen für $O$ parallel. Bis auf kleine Grössen erster Ordnung hat man daher

$$\theta_1 = -\frac{1}{\varrho_2}\frac{dy}{dt}, \quad \theta_2 = \frac{1}{\varrho_1}\frac{dx}{dt}, \quad u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}$$

und $\theta_3$ ist eine kleine Grösse von wenigstens der ersten Ordnung. Da ferner vorausgesetzt wird, dass sich die Kugel nicht weit von dem höchsten Punkt der Fläche entfernt, so ist $\omega_3$ constant und möge $n$ heissen.

Die Gleichung der Fläche, auf welcher sich $G$ bewegt, in der Nähe des höchsten Punktes ist $z = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\varrho_1} + \frac{y^2}{\varrho_2}\right)$. Die Richtungscosinusse der Normalen in $x, y, z$ sind $x/\varrho_1$, $y/\varrho_2$, 1. Mithin sind $Rx/\varrho_1$, $Ry/\varrho_2$, $R$ die Componenten des Normaldruckes $R$ auf die Kugel parallel den Axen. Die Bewegungsgleichungen (4) werden daher

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{a^2}{a^2+k^2} R \frac{x}{\varrho_1} - \frac{k^2}{a^2+k^2} \frac{dy}{dt} \frac{an}{\varrho_2}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{a^2}{a^2+k^2} R \frac{y}{\varrho_2} + \frac{k^2}{a^2+k^2} \frac{dx}{dt} \frac{an}{\varrho_1}\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= R - g\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (IV).$$

Es ist aber $z$ eine kleine Grösse zweiter Ordnung, die letzte Gleichung gibt daher $R = g$. Um die Gleichungen aufzulösen, setze man $x = F\cos(\lambda t + f)$, $y = G\sin(\lambda t + f)$. Man erhält dann

$$\left.\begin{aligned}\left(\lambda^2 + \frac{a^2}{a^2+k^2}\frac{g}{\varrho_1}\right) F &= \frac{k^2}{a^2+k^2}\frac{a\lambda n}{\varrho_2} G\\ \left(\lambda^2 + \frac{a^2}{a^2+k^2}\frac{g}{\varrho_2}\right) G &= \frac{k^2}{a^2+k^2}\frac{a\lambda n}{\varrho_1} F\end{aligned}\right\}.$$

$\lambda$ ergibt sich daher aus der Gleichung

$$\left(\lambda^2 + \frac{a^2}{a^2+k^2}\frac{g}{\varrho_1}\right)\left(\lambda^2 + \frac{a^2}{a^2+k^2}\frac{g}{\varrho_2}\right) = \frac{k^4}{(a^2+k^2)^2}\frac{a^2\lambda^2 n^2}{\varrho_1\varrho_2}.$$

Sie ist in Bezug auf $\lambda^2$ vom zweiten Grade. Soll die Bewegung eine schwingende sein, so ist es nothwendig und ausreichend, wenn beide Wurzeln positiv sind. Ist $\varrho_1$ sowohl wie $\varrho_2$ negativ, liegt also die Kugel wie ein Ball in einer Schale, so sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung für alle Werthe von $n$ positiv. Haben $\varrho_1$, $\varrho_2$ entgegengesetzte Vorzeichen, so können *beide* Wurzeln zugleich nicht positiv sein. Ist sowohl $\varrho_1$ als $\varrho_2$ positiv, so reduciren sich die beiden Bedingungen für die Stabilität auf $n^2 > \frac{a^2+k^2}{k^4} g\,(\sqrt{\varrho_1} + \sqrt{\varrho_2})^2$.

Nimmt man ferner $\varrho_1$ unendlich gross an, so muss $\varrho_2$ negativ sein; die beiden Werthe von $\lambda^2$ sind alsdann $-\frac{a^2}{a^2+k^2}\frac{g}{\varrho_2}$ und Null, die beide von $n$ nicht abhängen. Wird $\varrho_1 = \varrho_2$, so hat man $F = G$. In diesem Fall ist $\theta$ die Neigung der Normalen gegen die Verticale und $\theta^2 = (x^2 + y^2)/\varrho^2$ und man findet, wie in § 212,

$$\theta^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\{(\lambda_1 - \lambda_2)t + f_1 - f_2\},$$

worin $\lambda_1$, $\lambda_2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 \pm \frac{k^2}{a^2+k^2}\frac{an}{\varrho}\lambda + \frac{a^2}{a^2+k^2}\frac{g}{\varrho} = 0$$

sind.

§ 232. Man kann dieses Problem auch mit Hülfe der Lagrange'schen Methode lösen, obgleich die geometrischen Gleichungen Differentialquotienten nach der Zeit enthalten. Zu diesem Zweck benutze man die Methode der unbestimmten Multiplicatoren, die in Bd. 1, Kap. 8 erklärt wurde. Die Bezugsaxen $Ox$, $Oy$, $Oz$ seien dieselben, wie zuvor. $GC$ sei der Durchmesser, welcher vertical steht, wenn sich die Kugel im Gleichgewicht auf der Spitze befindet. $GA$, $GB$ seien zwei andere Durchmesser, die mit $GC$ ein in der Kugel festliegendes System rechtwinkliger Axen bilden. Ihre Lage in Bezug auf die im Raum festliegenden Axen werde auf die Euler'sche Art durch die Winkelcoordinaten $\theta$, $\varphi$, $\psi$ definirt. Die doppelte lebendige Kraft der Kugel ist dann

$$2T = x'^2 + y'^2 + z'^2 + k^2(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2 + k^2(\theta'^2 + \sin^2\theta\,\psi'^2).$$

Setzt man $\sin\theta\cos\psi = \xi$, $\sin\theta\sin\psi = \eta$, $\varphi + \psi = \chi$ und verwirft alle kleinen Grössen von einer höheren als der zweiten Ordnung, so findet man als Lagrange'sche Function

$$L = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \tfrac{1}{2}k^2\{\chi'^2 - \chi'(\xi\eta' - \xi'\eta) + \xi'^2 + \eta'^2\} + \tfrac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{\varrho_1} + \frac{y^2}{\varrho_2}\right).$$

Man sieht leicht, wenn man die Figur zu den Euler'schen Gleichungen in Bd. 1, Kap. 5 betrachtet, dass $\xi$ und $\eta$ die Cosinusse der Winkel sind, die der Durchmesser $GC$ mit den Axen $Ox$, $Oy$ bildet. Siehe auch Bd. 2, § 15.

Bedeuten $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ die Winkelgeschwindigkeiten der Kugel um Parallele zu den im Raum festliegenden Axen, so sind die geometrischen Gleichungen

$$x' - a\left(\omega_y - \omega_z\frac{y}{\varrho_2}\right) = 0, \quad y' + a\left(\omega_x - \omega_z\frac{x}{\varrho_1}\right) = 0.$$

Man erhält sie, wenn man die Componenten der Geschwindigkeit des Berührungspunktes in der Richtung der $x$- und $y$-Axe gleich Null setzt. Vergleiche die Ausdrücke in Bd. 1, § 238 für die *Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes*. Die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ kann man mit Hülfe von Formeln, die den Euler'schen analog sind, durch $\theta$, $\varphi$, $\psi$ ausdrücken. Siehe Bd. 1, § 257. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= -\theta'\sin\psi + \varphi'\sin\theta\cos\psi \\ \omega_y &= \theta'\cos\psi + \varphi'\sin\theta\sin\psi \\ \omega_z &= \varphi'\cos\theta + \psi' \end{aligned}\right\}.$$

Substituirt man und drückt das Resultat durch die neuen Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\chi$ aus, so werden die geometrischen Gleichungen

$$L_1 = -\frac{x'}{a} + \chi'\eta + \xi' - \chi'\frac{y}{\varrho_2} = 0, \quad L_2 = \frac{y'}{a} + \chi'\xi - \eta' - \chi'\frac{x}{\varrho_1} = 0.$$

Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in der Gestalt, welche ihnen durch die unbestimmten Multiplicatoren $\lambda$ und $\mu$ gegeben wird, sind von dem Typus

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'} - \frac{\partial L}{\partial q} = \lambda\frac{\partial L_1}{\partial q'} + \mu\frac{\partial L_2}{\partial q'},$$

worin $q$ irgend eine der fünf Coordinaten $x$, $y$, $\xi$, $\eta$, $\chi$ vertritt. Die stationäre Bewegung ergibt sich, wenn man sowohl $x$ als $y$, $\xi$ und $\eta$ gleich Null und $\chi' = n$ setzt. Nimmt man $q = x$ und $q = y$ und gibt den verschiedenen Coordinaten ihre Werthe für die stationäre Bewegung, so findet man, dass $\lambda$ und $\mu$ bei der stationären Bewegung Null sind.

Um die Schwingungen zu ermitteln, schreibe man statt $q$ der Reihe nach $x$, $y$, $\chi$, $\xi$ und $\eta$ und behalte die ersten Potenzen der kleinen Grössen bei. Bedenkt man, dass $\lambda$ und $\mu$ kleine Grössen sind (§ 51), so erhält man

$$x'' - g\frac{x}{\varrho_1} + \frac{\lambda}{a} = 0, \quad y'' - g\frac{y}{\varrho_2} - \frac{\mu}{a} = 0, \quad k^2\chi'' = 0,$$
$$k^2(\xi'' + \chi'\eta') - \lambda = 0, \qquad k^2(\eta'' - \chi'\xi') + \mu = 0.$$

Diese Gleichungen sowohl wie die geometrischen für $L_1$ und $L_2$ sind linear und können auf die gewöhnliche Art aufgelöst werden. Setzt man $\chi' = n$ und eliminirt zuerst $\lambda$ und $\mu$ und dann $\xi$ und $\eta$, so kommt man zu zwei Gleichungen für $x$ und $y$, welche mit den unter (IV) in § 231 identisch sind.

§ 233. Beisp. Eine vollkommen rauhe Kugel wird auf eine vollkommen rauhe feste Kugel in die Nähe ihres höchsten Punktes gesetzt. Die obere Kugel hat die Winkelgeschwindigkeit $n$ um den durch den Berührungspunkt gehenden

Durchmesser; man beweise, dass ihr Gleichgewicht stabil ist, wenn $n^2 > 35\,g(a+b)/a^2$ ist, worin $b$ den Radius der festen Kugel und $a$ den der beweglichen bedeutet.

§ 234. **Schwingungen um die stationäre Bewegung.** *Die Axe einer vollkommen rauhen Umdrehungsfläche steht vertical. Man bestimme, unter welchen Umständen eine schwere Kugel so auf dieser Fläche rollt, dass ihr Centrum einen horizontalen Kreis beschreibt und finde die kleinen Schwingungen, wenn dieser Zustand stationärer Bewegung gestört wird.*

In diesem Fall müssen wir auf die Gleichungen in § 230 zurückgreifen. Wir behalten die dort eingeführte Bezeichnungsweise bei, doch wollen wir der Kürze wegen statt $k^2$ seinen Werth $\frac{2}{5}a^2$ setzen.

*Um die stationäre Bewegung zu finden,* müssen wir $u$, $v$, $\omega_3$, $\theta$, $d\psi/dt$ sämmtlich constant setzen. Es mögen $\alpha$, $\mu$ und $n$ die constanten Werthe von $\theta$, $d\psi/dt$ und $\omega_3$ sein. Alsdann ist $u = 0$, $v = b\mu$, worin $b$ den constanten Werth von $r$ angibt. Die Gleichung (1) wird

$$-b\cos\alpha\,\mu^2 = \frac{5}{7}g\sin\alpha - \frac{2}{7}an\sin\alpha\,\mu.$$

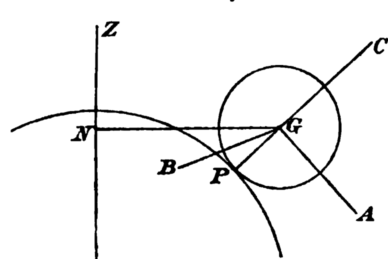
Die übrigen dynamischen Gleichungen sind erfüllt, ohne eine Beziehung zwischen den Constanten zu geben. Wenn die Bewegung stationär ist, so hat man daher

$$n = \frac{5}{2}\frac{g}{a\mu} + \frac{7}{2}\frac{b}{a}\mu\cot\!g\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

für denselben Werth von $n$ also zwei Werthe von $\mu$, die verschiedenen Anfangswerthen von $v$ entsprechen.

*Die Bestimmung der stationären Bewegung auf elementarem Weg.*

Da die stationäre Bewegung einer Kugel auf einem rauhen Umdrehungskörper oft zu bestimmen ist, so empfiehlt es sich, dieses Ergebniss auch noch auf andere Art abzuleiten: Der Schwerpunkt $G$ beschreibt mit gleichförmiger Geschwindigkeit $v$ einen horizontalen Kreis, dessen Radius $GN$ auf der Axe des Körpers senkrecht steht. Die Reibung senkrecht zur Meridianebene ist daher Null und man hat




$$-\mu^2 b = R\sin\alpha + F\cos\alpha,$$
$$g = R\cos\alpha - F\sin\alpha.$$

Ferner ist $v = \mu b$ und darin $GN = b$. Da der Berührungspunkt der Kugel und des Körpers sich in Ruhe befindet, so gelten die geometrischen Gleichungen $\omega_2 = 0$, $v + a\omega_1 = 0$.

Die Bezugsaxen für die Rotationen seien die Normale $GC$ auf den Körper und $GA$, $GB$ in der Meridianebene durch $G$ bez. senkrecht zu ihr. Diese Axen bewegen sich um $G$ mit den Winkelgeschwindigkeiten $\theta_1 = -\mu\sin\alpha$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \mu\cos\alpha$. Die Gleichung für die Momente um $GB$ ist offenbar

$$k^2(\omega_2' - \theta_1\omega_3 + \theta_3\omega_1) = -Fa.$$

Siehe § 215. Substituirt man für $\theta_1$, $\theta_3$, $\omega_1$ und $F$, so erhält man, da $\omega_3 = n$ ist, das gesuchte Resultat unmittelbar.

Es bestehen die geometrischen Beziehungen $a\omega_1 = -v$, $v = \mu b$; daher haben $\omega_1$ und $\mu$ entgegengesetzte Vorzeichen und also nach (1) auch $n$ und $\omega_1$, wenn $a$ und $b$ positiv sind und $\alpha$ kleiner als ein rechter Winkel ist. Die Rotationsaxe, welche nothwendigerweise durch den Berührungspunkt der Kugel und der rauhen Fläche gehen muss, macht daher einen Winkel mit der Verticalen, der kleiner ist, als der Winkel, den die Normale im Berührungspunkt mit ihr macht.

Rollt die Kugel so auf einer Umdrehungsfläche, dass sich die Axe $GC$ von der Symmetrieaxe wegdreht, so muss der Winkel $\alpha$ positiv sein. Wenn man den Ausdruck für $n$ berücksichtigt und $dn/d\mu = 0$ setzt, so findet man, dass der kleinste Werth der Winkelgeschwindigkeit $n$ der Kugel durch $n^2 = 35 \operatorname{cotg} \alpha \cdot bg/a^2$ gegeben ist. In diesem Fall ergibt sich die Präcessionsbewegung der Kugel aus $\mu^2 = \frac{5}{7} \operatorname{tg} \alpha \cdot g/b$. Wenn die Kugel auf der inneren und oberen Seite einer Fläche, wie der eines Ankerringes rollt, dessen Axe vertical steht, so ist der Winkel $\alpha$ negativ und der Werth von $n$ hat keine untere Grenze.

Beisp. 1. Eine Kugel wird auf einen gegebenen Punkt der Fläche gesetzt und hat eine gegebene Winkelgeschwindigkeit um die Normale. Man finde die übrigen Bedingungen, unter denen sie geschleudert werden muss, wenn ihr Mittelpunkt einen horizontalen Kreis beschreiben soll.

Da $\alpha$ und $n$ gegeben sind, so muss die quadratische Gleichung der stationären Bewegung, nämlich Gleichung (1), reelle Werthe von $\mu$ ergeben. Die anfänglichen linearen und Winkelgeschwindigkeiten sind dann $u = 0$, $v = \mu b$, $w = 0$, $v + a\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = n$. Es gibt zwei Systeme von Anfangsbedingungen oder keine.

Beisp. 2. Wenn die rauhe Fläche gezwungen wird, um ihre Axe mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ zu rotiren, zu beweisen, dass die quadratische Gleichung der stationären Bewegung, nämlich (1), die Form

$$\frac{5}{2}\frac{g}{a\mu} + \frac{7}{2}\frac{b}{a}\mu \operatorname{cotg} \alpha = n + \Omega \operatorname{cotg} \alpha \left(\frac{b}{a} - \sin \alpha\right)$$

annimmt.

*Die kleine Schwingung zu finden.*

Man setze $\theta = \alpha + x$, $d\psi/dt = \mu + dy/dt$ und nehme an, $\alpha$ und $\mu$ enthielten darin *alle* constanten Theile von $\theta$ und $d\psi/dt$, dagegen $x$ und $dy/dt$ nur die trigonometrischen Glieder. Es sei $c - a$ der Krümmungsradius der Umdrehungsfläche in dem Berührungspunkt der in stationärer Bewegung befindlichen Kugel und $\varrho$ differire daher von $c$ nur um kleine Grössen und möge in den kleinen Gliedern $c$ gleichgesetzt werden. Man hat ferner $r = b + c \cos \alpha \cdot x$.

Nach den Gleichungen (IV) und (V) in § 230 ist nun

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt}\frac{\varrho \sin \theta - r}{a} = \frac{dx}{dt}\mu\frac{c \sin \alpha - b}{a};$$

daher

$$\omega_3 = \mu\frac{c \sin \alpha - b}{a}x + n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wenn $n$ der ganze constante Theil von $\omega_3$ ist.

Aus Gleichung (II) folgt ferner

$$-\frac{1}{a}\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\psi}{dt}\right) - \frac{\varrho}{a}\frac{d\theta}{dt}\cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{k^2}{a^2 + k^2}\omega_3\frac{d\theta}{dt} = 0;$$

daher

$$-\frac{\mu}{a}c \cos \alpha \frac{dx}{dt} - \frac{b}{a}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{c \cos \alpha \mu}{a}\frac{dx}{dt} + \frac{2}{7}n\frac{dx}{dt} = 0$$

und durch Integration

$$\left(\frac{2}{7}n - \frac{2\mu c \cos \alpha}{a}\right)x = \frac{b}{a}\frac{dy}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

worin die Constante gleich Null gesetzt wurde, weil $x$ und $y$ nur trigonometrische Glieder enthalten.

*Drittens* erhält man aus Gleichung (I)

$$\frac{1}{a}\frac{d}{dt}\left(\varrho\frac{d\theta}{dt}\right) - \frac{r}{a}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \cos \theta + \frac{2}{7}\omega_3 \sin \theta \frac{d\psi}{dt} = \frac{5}{7}\frac{g}{a}\sin \theta;$$

daher

$$\frac{c}{a}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{b + c\cos\alpha\, x}{a}(\cos\alpha - \sin\alpha\, x)\left(\mu^2 + 2\mu\frac{dy}{dt}\right) +$$

$$+ \frac{2}{7}(\sin\alpha + \cos\alpha x)\left(\mu + \frac{dy}{dt}\right)\left(n + \mu\,\frac{c\sin\alpha - b}{a}\,x\right) = \frac{5}{7}\,\frac{g}{a}(\sin\alpha + \cos\alpha\, x).$$

Dieser Ausdruck ist zu entwickeln und ihm die Form zu geben

$$\frac{d^2x}{dt^2} + Ax = B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Dabei muss, weil $x$ nur trigonometrische Glieder enthält, $B = 0$ sein. Setzt man darin $x = 0$, so findet man denselben Werth von $n$, wie bei stationärer Bewegung. Für $A$ ergibt sich, wenn die vorstehende Gleichung entwickelt wird,

$$A = \mu^2\left(-\cos^2\alpha + \frac{2}{7}\sin^2\alpha\right) + \mu^2\,\frac{b}{c\sin\alpha}\left(2\cos^2\alpha + \frac{5}{7}\sin^2\alpha\right) +$$

$$+ \frac{25}{49}\,\frac{g^2\sin\alpha}{\mu^2 bc} - \frac{10}{7}\,\frac{g}{b}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{10}{7}\,\frac{g}{c}\cos\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Soll die stationäre Bewegung stabil sein, so ist dazu ausreichend und nothwendig, dass dieser Werth von $A$ positiv ist. Die Schwingungszeit ist dann $2\pi/\sqrt{A}$.

Man beachte, dass man dieses Verfahren nicht anwenden kann, wenn $\alpha$ und daher $b$ sehr klein wird, denn einige der Glieder, die vernachlässigt wurden, haben $b$ in ihrem Nenner und können daher von Bedeutung werden.

Beisp. 3. Eine schwere Kugel rollt auf der Innenseite eines rauhen horizontalen Drahtes, der die Gestalt eines Kreises hat, und die Normale zur Kugel in dem Berührungspunkt hat die constante Neigung $\alpha$ gegen die Verticale; man beweise, dass die Winkelgeschwindigkeit $\mu$ des Berührungspunktes der Kugel durch $\mu^2 = \frac{5}{7}\, g \operatorname{tg}\alpha/(h - a\sin\alpha)$ gegeben ist, worin $h$ den Radius des Ringes und $a$ den der Kugel bedeutet. [Math. Tripos, 1881.]

Bei diesem Problem ist die rauhe Fläche, auf welcher sich die Kugel bewegt, ein Ankerring, dessen Meridiankreis den Radius Null hat. Nimmt man an, die Kugel rolle, drehe sich aber nicht um die Normale im Berührungspunkt, so erhält man das Resultat, wenn man in Gleichung (1), $n = 1$ setzt.

§ 235. **Die Bewegung auf einer unvollkommen rauhen Fläche.** Die allgemeinen Gleichungen der Bewegung der Kugel auf einer unvollkommen rauhen Fläche lassen sich aus Sätzen ableiten, die denen in Bd. 1, Kap. VI zur Bestimmung der Bewegung bei dem Zusammenstoss rauher elastischer Körper ähnlich sind. Der Unterschied in der Theorie wird aus dem folgenden Beispiel erhellen, in welchem ein Verfahren erklärt wird, welches allgemein immer dann anwendbar ist, wenn die Integrationen ausführbar sind.

§ 236. *Eine homogene Kugel bewegt sich auf einer unvollkommen rauhen schiefen Ebene unter beliebigen Anfangsbedingungen; man finde die Richtung der Bewegung und die Geschwindigkeit ihres Mittelpunktes zu irgend einer Zeit.*

Es sei $G$ der Schwerpunkt der Kugel. Die Bezugsaxen $GA$, $GB$, $GC$ mögen der Richtung nach im Raum festliegen, die erste die

schiefe Ebene hinabgehen und die letzte auf der Ebene senkrecht stehen. $u, v, w$ seien die Componenten der Geschwindigkeit von $G$ parallel zu diesen Axen und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um die Axen. $F, F'$ seien die Componenten der Reibung der Ebene an der Kugel parallel den Axen $GA$, $GB$, in diesen Richtungen aber *negativ* genommen. $k$ sei der Trägheitsradius der Kugel für ihren Durchmesser, $a$ ihr Radius und ihre Masse die Einheit. Die Neigung der Ebene gegen den Horizont sei $\alpha$.

Ob die Kugel nun rollt oder gleitet, jedenfalls sind ihre Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} k^2\omega_1' = -F'a \\ k^2\omega_2' = Fa \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1), \qquad \left.\begin{array}{l} u' = -F + g\sin\alpha \\ v' = -F' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Eliminirt man daraus $F$ und $F'$ und integrirt, so wird

$$u + \frac{k^2}{a^2}a\omega_2 = U_0 + g\sin\alpha t, \quad v - \frac{k^2}{a^2}a\omega_1 = V_0 \quad . \quad . \quad (3),$$

worin $U_0$ und $V_0$ zwei Constante bedeuten, die durch die Anfangswerthe von $u, v, \omega_1, \omega_2$ bestimmt werden.

Den Sinn der Gleichungen kann man so finden. Es sei $P$ der Berührungspunkt der Kugel und Ebene, $Q$ ein Punkt innerhalb der Kugel, der auf der Normalen in $P$ so liegt, dass $PQ = (a^2 + k^2)/a$ ist. Alsdann ist $Q$ der Schwingungsmittelpunkt der Kugel, wenn sie an dem Punkt $P$ aufgehängt würde. Offenbar drücken die linken Seiten der Gleichungen (3) die Componenten der Geschwindigkeit von $Q$ parallel den Axen aus. Die Gleichungen geben an, dass die Reibungsstösse bei $P$ auf die Bewegung von $Q$ keinen Einfluss haben, was auch sofort aus Bd. 1, Kap. 3 folgt, weil $Q$ für einen Stoss bei $P$ in der Axe der spontanen Rotation liegt.

§ 237. Die Reibung im Berührungspunkt $P$ wirkt immer der Richtung des Gleitens entgegen und hat das Bestreben, diesen Punkt zur Ruhe zu bringen. Wenn das Gleiten aufhört, so hört auch die Reibung auf (siehe Bd. 1, Kap. 4), ihren Grenzwerth zu haben und wird nur so gross, dass sie gerade den Berührungspunkt in Ruhe halten kann.

Wenn kein Gleiten stattfindet, so ist

$$u - a\omega_2 = 0, \quad v + a\omega_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Die Gleichungen (3) und (4) reichen hin, um diese Endwerthe von $u, v, \omega_1$ und $\omega_2$ zu bestimmen. *Auf diese Weise hat man die Richtung der Bewegung und die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, nachdem das Gleiten aufgehört hat, in Ausdrücken der Zeit gefunden.* Beide sind offenbar von der Reibung unabhängig.

Wenn die Gleichungen (4) von Anfang an gelten, so beginnt die Kugel sich ohne Gleiten zu bewegen, vorausgesetzt, dass die aus den

Gleichungen (1), (2) und (4) ermittelte Reibung kleiner als ihr Grenzwerth ist. Um diesen Punkt aufzuklären, muss man die Grösse der Reibung suchen, die dazu nöthig ist, Gleiten zu verhüten. Wenn die Kugel nicht gleitet, so lassen sich die Gleichungen (4) differenziren; setzt man dann aus (1) und (2) ein, so findet man $F' = 0$, $F = g \sin\alpha \cdot k^2/(a^2 + k^2)$. Da aber der Druck auf die Ebene $g \cos\alpha$ ist, so erfordert dies, dass der Reibungscoefficient $\mu > \operatorname{tg}\alpha \frac{k^2}{a^2 + k^2}$ sei. Hat diese Ungleichung Gültigkeit, so ist die zur Wirkung kommende Reibung immer kleiner oder doch nicht grösser, als der Grenzwerth der Reibung und die Gleichungen (3) und (4) geben daher die ganze Bewegung an.

Diese Methode, die untere Grenze des Werthes von $\mu$ zu ermitteln, stimmt mit der überein, die in Bd. 1, Kap. IV bei dem entsprechenden Problem benutzt wurde, in welchem die Kugel die schiefe Ebene auf der Linie des grössten Falles hinabrollt.

§ 238. Gelten die Gleichungen (4) im Anfang nicht oder ist die eben erwähnte Ungleichung nicht erfüllt, so verfahre man so. $S$ sei die Geschwindigkeit des Gleitens und $\theta$ der Winkel, den die Richtung des Gleitens mit $GA$ macht. Um die Vorzeichen festzulegen, sei $S$ positiv, während $\theta$ einen beliebigen zwischen $-\pi$ und $\pi$ liegenden Werth haben mag. Alsdann ist

$$S\cos\theta = u - a\omega_2, \qquad S\sin\theta = v + a\omega_1 \quad . \; . \; . \quad (5).$$

Die Reibung ist $\mu g \cos\alpha$ und ihre Richtung dem Gleiten entgegengesetzt, daher

$$F = \mu g \cos\alpha\cos\theta, \qquad F' = \mu g \cos\alpha \sin\theta.$$

Die Gleichungen (1), (2) und (5) ergeben mithin

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(S\cos\theta)}{dt} &= -\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\mu g \cos\alpha\cos\theta + g\sin\alpha \\ \frac{d(S\sin\theta)}{dt} &= \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\mu g\cos\alpha\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (6).$$

Entwickelt man, so wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\mu g\cos\alpha + g\sin\alpha\cos\theta \\ S\frac{d\theta}{dt} &= -\, g\sin\alpha\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (7).$$

Ist $\theta$ nicht constant, so kann man $t$ eliminiren, nach $\theta$ integriren und erhält dann

$$S\sin\theta = 2A\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8),$$

worin $n = (1 + a^2/k^2)\mu \operatorname{cotg}\alpha$ und $A$ die Integrationsconstante ist.

Wenn $S_0$ und $\theta_0$ die Anfangswerthe von $S$ und $\theta$ sind, wie sie die Gleichungen (5) bestimmen, so hat man

$$2A = S_0 \sin\theta_0 \left(\operatorname{cotg}\frac{\theta_0}{2}\right)^n \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Durch Substitution des Werthes von $S$ aus (8) in die zweite Gleichung von (7) und Integration erhält man

$$\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{n-1}}{n-1} + \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\right)^{n-1}}{n-1} + \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{g\sin\alpha}{A}\,t \quad (10),$$

worin die Integrationsconstante aus der Bedingung bestimmt wurde, dass $\theta = \theta_0$ sein muss, wenn $t = 0$ ist. Die Gleichungen (8), (9) und (10) geben $S$ und $\theta$ in Ausdrücken von $t$. Mit Hülfe der Gleichungen (3) und (5) lassen sich dann auch $u$, $v$, $\omega_1$ und $\omega_2$ durch $t$ ausdrücken.

Die zweite Gleichung in (7) zeigt, dass $d\theta/dt$ das entgegengesetzte Vorzeichen von $\theta$ hat, dass mithin $\theta$ sich bei jedem Anfangswerth mit Ausnahme von $\pm\pi$ beständig der Null nähert. Daraus folgt, dass, wenn $\alpha$ nicht Null ist, $\theta$ nur dann einen constanten Werth hat, wenn $\theta_0 = 0$ oder $\pm\pi$ ist, d. h. *die Richtung des Gleitens auf der Ebene ist im Raum nicht constant, nähert sich aber beständig der Linie des stärksten Falles.* Auf einer horizontalen Ebene ist $\alpha = 0$ und die Richtung des Gleitens constant.

Wenn $n > 1$, d. h. $\mu > \operatorname{tg}\alpha \cdot k^2/(a^2 + k^2)$ ist, so sieht man aus (8), dass das Gleiten aufhört, wenn $\theta$ verschwindet. Dieser Fall tritt nach (10) ein, wenn

$$t = \frac{S_0}{g\sin\alpha}\left(\frac{\cos^2\frac{1}{2}\theta_0}{n-1} + \frac{\sin^2\frac{1}{2}\theta_0}{n-1}\right)$$

ist.

Die nun folgende Bewegung ist bereits gefunden worden.

Wenn dagegen $n < 1$ ist, so sieht man aus (8), dass $S$ zunimmt, wenn $\theta$ abnimmt, das Gleiten daher niemals aufhört. Aus (10) folgt ferner, dass $\theta$ erst am Ende einer unendlich langen Zeit verschwindet.

Ist $S_0 = 0$, so beginnt das Gleiten niemals, wenn $n > 1$ ist und beginnt sofort und hört nie auf, wenn $n < 1$ ist.

§ 239. **Billardbälle.** Die Theorie der Bewegung einer Kugel auf einer unvollkommen rauhen *horizontalen* Ebene ist so sehr viel einfacher, als wenn die Ebene schief ist oder die Kugel auf irgend einer andern Fläche rollt, dass es unnöthig scheinen könnte, diesen Fall ins Einzelne zu untersuchen. Zugleich liefert aber das Billardspiel viele Probleme, die man nicht wohl stillschweigend übergehen kann. Die folgenden Beispiele sind so angeordnet worden, dass sie sowohl das einzuschlagende Beweisverfahren zeigen, als auch Resultate bieten, die man einer Probe auf dem Billard unterwerfen kann.

Das Resultat in Beisp. 1 fand zuerst T. A. Euler, der Sohn des berühmten Euler, und veröffentlichte es in den *Mém. de l'Acad. de Berlin,* 1758. Die meisten, vielleicht alle andern Ergebnisse findet man in dem 1835 in Paris erschienenen *Théorie mathématique des effets du jeu de billard* von G. Coriolis.

Beisp. 1. Ein Billardball wird auf einer unvollkommen rauhen horizontalen Ebene in Bewegung gesetzt; man zeige, dass die Richtung und Grösse der Reibung während der Bewegung constant bleibt. Die Bahn seines Schwerpunktes ist daher ein Parabelbogen, so lange das Gleiten dauert und schliesslich eine grade Linie. Die Parabel wird mit der gegebenen Anfangsbewegung des Schwerpunktes und einer Beschleunigung $\mu g$ beschrieben, deren Richtung der Anfangsrichtung des Gleitens entgegengesetzt ist.

Beisp. 2. Wenn $S_0$ die Anfangsgeschwindigkeit des Gleitens ist, zu beweisen, dass die Zeit, während welcher die Parabelbahn beschrieben wird, $\frac{2}{7} S_0/\mu g$ ist. Aus Experimenten, die Coriolis angestellt hat, geht hervor, dass nahezu $\mu = \frac{1}{5}$ ist. Beträgt daher die Anfangsgeschwindigkeit $\frac{1}{3}$ Meter in der Secunde, so wird das Parabelstück während weniger als dem zwanzigsten Theil einer Secunde beschrieben.

Beisp. 3. Wenn $P$ der Berührungspunkt in irgend einer Lage ist und $Q$ der Schwingungsmittelpunkt in Bezug auf $P$, zu beweisen, dass die Geschwindigkeit von $Q$ immer dieselbe Richtung und Grösse hat. Daraus leite man ab, dass die schliessliche gradlinige Bahn des Schwerpunktes der Anfangsrichtung der Bewegung von $Q$ parallel läuft und dass die Endgeschwindigkeit des Schwerpunktes fünf Siebentel der Anfangsgeschwindigkeit von $Q$ beträgt. Wenn $PP'$ die Anfangsrichtung der Bewegung, $V$ die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes und $t$ die durch Beisp. 2 gegebene Zeit ist, zu beweisen, dass die schliessliche gradlinige Bahn des Schwerpunktes $PP'$ in einem Punkt $P'$ so schneidet, dass $PP' = \frac{1}{2} Vt$ ist.

Beisp. 4. Eine Billardkugel, welche sich auf einem unvollkommen rauhen horizontalen Tisch in Ruhe befindet, wird von einem Queue in horizontaler Richtung in einem Punkt getroffen, der sich in der Höhe $h$ über dem Tisch befindet, und das Queue wird zurückgezogen, sobald der Stoss erfolgt ist. Nimmt man an, das Queue sei hinreichend rauh um Gleiten zu verhüten, zu zeigen, dass sich der Mittelpunkt der Kugel in der Richtung des Stosses bewegt und dass seine Geschwindigkeit gleichförmig und gleich $\frac{5}{7}\frac{h}{a}B$ nach der Zeit $\frac{5h \sim 7a}{7a}\frac{B}{\mu g}$ wird, worin $B$ das Verhältniss des Stosses zur Masse der Kugel und $a$ ihren Radius bedeutet.

Damit kein Gleiten des Queues stattfinden kann, muss der Abstand des Queues von dem Mittelpunkt der Kugel kleiner als $a \sin \varepsilon$ sein, wenn $\operatorname{tg} \varepsilon$ der Reibungscoefficient zwischen Queue und Ball ist.

Beisp. 5. Ein Billardball, der Anfangs in Ruhe ist und den Tisch im Punkt $P$ berührt, wird von einem Queue getroffen, das den Winkel $\beta$ mit dem Horizont macht. Man zeige, dass die schliessliche gradlinige Bewegung des Schwerpunktes der Graden $PS$ parallel ist, die $P$ mit dem Punkt $S$ verbindet, in welchem die Richtung des Stosses den Tisch trifft, und dass die Endgeschwindigkeit des Schwerpunktes $\frac{5}{7} B \sin \beta \cdot PS/a$ ist und die Richtung der Projection des Stosses auf die Horizontale hat. Man beachte, dass diese Ergebnisse von der Reibung nicht abhängen.

Beisp. 6. Trägt man längs der Projection des Stosses auf den horizontalen Tisch $ST = \frac{7}{5} a \cot g \beta$ ab, so misst $TS$ die horizontale Componente des Stosses in Bezug auf die Masseneinheit in demselben Maassstab, in welchem $PS$ die Endgeschwindigkeit des Schwerpunktes misst. Man beweise, dass während des Zusammenstosses und der ganzen darauf folgenden Bewegung die Reibung die Richtung $PT$ hat und dass die ganze zur Wirkung kommende Reibung nach dem eben erwähnten Maasstab durch $PT$ gemessen wird. Daraus leite man ab, dass der parabolische Theil der Bahn nur dann existirt, wenn $\mu < \frac{5}{7} PT/a$ ist. Man zeige auch, dass $PT$ die Richtung ist, in welcher der tiefste Punkt des Balles anfangen würde sich zu bewegen, wenn die horizontale Ebene glatt wäre und auf den Ball derselbe Stoss, wie zuvor, wirkte.

## Die Bewegung der starren Körper auf der Ebene.

§ 240. **Historische Uebersicht.** Die Bewegung eines schweren Körpers von beliebiger Gestalt auf einer horizontalen Ebene scheint Poisson zuerst studirt zu haben. Er nimmt an, der Körper sei entweder durch eine continuirliche Fläche begrenzt, welche die Ebene in einem einzelnen Punkt berührt oder er endige in einer Spitze wie der Kreisel, und sieht dabei die Ebene als vollkommen glatt an. Poisson benutzt die Euler'schen Gleichungen zur Ermittelung der Rotationen um die Hauptaxen und bezieht diese Axen auf andre im Raum festliegende mittelst der Formeln, die man gewöhnlich die Euler'schen geometrischen Gleichungen nennt. Er findet ein Integral durch das Princip der lebendigen Kraft und ein zweites mittelst der Winkelbewegungsgrösse um die verticale durch den Schwerpunkt gehende Gerade. Diese Gleichungen werden dann benutzt, um zu ermitteln, wie die Bewegung eines verticalen Kreisels durch eine langsame Bewegung der glatten Ebene, auf welcher er ruht, gestört wird. Siehe seinen *Traité de Mécanique*.

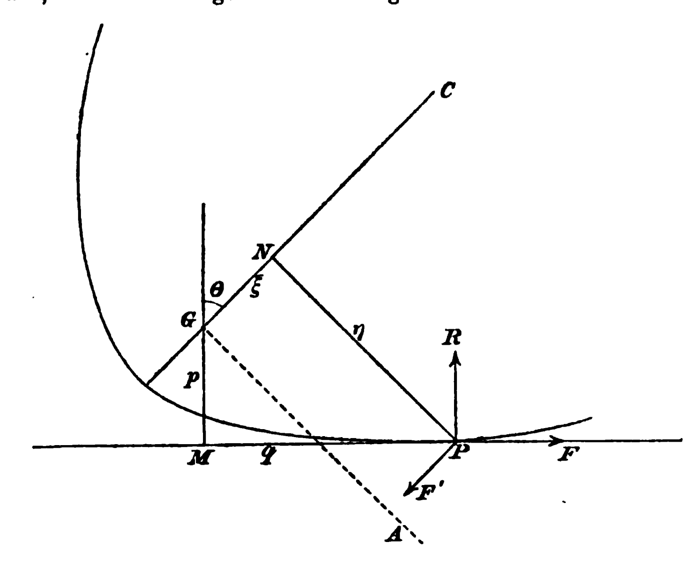
Die Poisson'schen Gleichungen findet man auch bei Cournot in drei Abhandlungen im fünften und achten Band von Crelle's *Journal* (1830 und 1832); er drückt die entsprechenden geometrischen Bedingungen dafür aus, wenn der Körper auf mehr als einem Punkt ruht oder auf einer Kante wie z. B. der Basis eines Cylinders rollt. Er untersucht auch die beiden Fälle, in welchen die Ebene (1) vollkommen rauh und (2) unvollkommen rauh ist. Er verfährt nach demselben allgemeinen Plan, wie Poisson, indem er zwei Systeme rechtwinkliger Axen benutzt, von denen das eine im Körper, das andre im Raum festliegt und die durch die Formeln verbunden werden, die man gewöhnlich zur Transformation der Coordinaten gebraucht. Wie man sich denken kann, sind die Gleichungen, die er erhält, äusserst complicirt. Er stellt auch die entsprechenden Gleichungen für Momentankräfte auf. Diejenigen jedoch, welche auch die Wirkung der Reibung enthalten, stimmen mit den unsrigen nicht überein.

In dem 13. und 17. Band von Liouville's *Journal* (1848 und 1852) befinden sich zwei Abhandlungen von Puiseux über denselben Gegenstand. In der ersten bringt auch er die Poisson'schen Gleichungen und wendet sie auf Umdrehungskörper auf glatter Ebene an. Er zeigt, dass die Neigung der Axe des Körpers gegen die Verticale nahezu constant bleibt, wenn dem Körper eine hinreichend grosse Anfangswinkelgeschwindigkeit um diese Axe gegeben wird. Eine untere Grenze für diese Winkelgeschwindigkeit findet er nur für den Fall, in welchem die Axe vertical ist. In der zweiten Abhandlung wendet er die Poisson'schen Gleichungen an, um die Stabilitätsbedingungen eines Körpers von beliebiger Gestalt zu bestimmen, welcher auf eine *glatte* Ebene so gesetzt wird, dass eine Hauptaxe für seinen Schwerpunkt vertical steht und welcher um diese Axe rotirt. Er ermittelt auch die kleinen Schwingungen eines auf einer glatten Ebene ruhenden Körpers um eine Gleichgewichtslage.

In dem vierten Band des *Quarterly Journal of Mathematics*, 1861 stellt G. M. Slesser die Gleichungen der Bewegung eines Körpers auf einer vollkommen rauhen horizontalen Ebene auf und wendet sie auf das zweite Problem in § 251 an. Er benutzt bewegliche Axen und seine Entwicklung stimmt fast genau mit der unsrigen überein, die wir jedoch unabhängig von ihm gefunden haben.

**§ 241. Schwingungen um die stationäre Bewegung.** *Ein Umdrehungskörper rollt auf einer vollkommen rauhen horizontalen Ebene unter dem Einfluss der Schwere. Die stationäre Bewegung und die kleinen Schwingungen zu finden.*

$G$ sei der Schwerpunkt des Körpers, $GC$ die Axe der Figur, $P$ der Berührungspunkt. $GA$ sei die Hauptaxe, welche in der Ebene $PGC$ liegt und $GB$ die auf $GA$, $GC$ rechtwinklige Axe. $GM$ möge ein Loth von $G$ auf die Horizontal-




ebene, $PN$ ein Loth von $P$ auf $GC$ sein. $R$ sei die Normalreaction bei $P$; $F$, $F'$ die Componenten der Reibung in der Ebene $PGC$ bez. senkrecht zu ihr. Die Masse des Körpers sei die Einheit.

Ferner sei $\theta$ der Winkel, den $GC$ mit der Verticalen, $\psi$ der Winkel, den $MP$ mit irgend einer in der horizontalen Ebene festliegenden Geraden macht. Es sind dann $\theta$ und $\psi$ zwei der Winkel, die in den Euler'schen Gleichungen dazu benutzt werden, *die beweglichen Axen* $GA$, $GB$, $GC$ auf eine im Raum festliegende Axe, nämlich die Verticale, zu beziehen (Bd. 1, Kap. 5). Der dritte Euler'sche Winkel $\varphi$ ist hier Null. Die beweglichen Axen $GA$, $GB$, $GC$ sind daher die nämlichen, wie die in § 13. Da $GC$ im Körper festliegt, so ist $\theta_1 = \omega_1$, $\theta_2 = \omega_2$. Aus $\varphi = 0$ ergibt sich nach der dritten Euler'schen geometrischen Gleichung $\theta_3 = \cos\theta \, d\psi/dt$. Erinnert man sich, dass die Winkelbewegungsgrössen um die Axen $h_1 = A\omega_1$, $h_2 = A\omega_2$, $h_3 = C\omega_3$, wie in § 12, sind, so werden die Gleichungen für die Momente in § 10

$$A\frac{d\omega_1}{dt} - A\omega_2\frac{d\psi}{dt}\cos\theta + C\omega_3\omega_2 = -F'\cdot GN \quad \cdots\cdots \quad (1),$$

$$A\frac{d\omega_2}{dt} - C\omega_3\omega_1 + A\omega_1\frac{d\psi}{dt}\cos\theta = -F\cdot GM - R\cdot MP \quad \cdot\cdot \quad (2),$$

$$C\frac{d\omega_3}{dt} = F'\cdot PN \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3).$$

Die beiden ersten Euler'schen geometrischen Gleichungen liefern die Beziehungen zwischen $\theta_1$, $\theta_2$ und den Winkeln $\theta$ und $\psi$. Da $\theta_1 = \omega_1$, $\theta_2 = \omega_2$ und $\varphi = 0$ ist, so werden sie

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_2 \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

$$\sin\theta \frac{d\psi}{dt} = -\omega_1 \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Die Euler'schen geometrischen Gleichungen, welche *den Körper* auf die im Raum festliegenden Axen beziehen, brauchen wir nicht. Man beachte auch, dass die Gleichungen (4) und (5) sich unmittelbar aus der Figur ergeben, eine Beziehung auf die Euler'schen Gleichungen also nicht nöthig ist.

$u$ und $v$ seien die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes längs und senkrecht zu $MP$ parallel der Horizontalebene. Die Beschleunigungen des Schwerpunktes in der Richtung dieser beweglichen Axen sind

$$\frac{du}{dt} - v\frac{d\psi}{dt} = F \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

$$\frac{dv}{dt} + u\frac{d\psi}{dt} = F' \quad \ldots \ldots \quad (7),$$

und wenn $z$ die Höhe von $G$ über der Horizontalebene angibt, d. h. $z = GM$ ist, so hat man

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + R \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

Ferner, weil sich der Punkt $P$ in Ruhe befindet,

$$u - GM\omega_2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (9),$$

$$v + PN\omega_3 - GN\omega_1 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (10),$$

$$z = -GN\cos\theta + PN\sin\theta \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Dies sind die allgemeinen Bewegungsgleichungen für einen Umdrehungskörper, der sich auf einer vollkommen rauhen horizontalen Ebene bewegt. Ist die Ebene nicht vollkommen rauh, so behalten die ersten acht Gleichungen ihre Gültigkeit, dagegen müssen die übrigen drei auf die in dem nächsten Paragraphen erklärte Art abgeändert werden.

Wenn die Gestalt des Umdrehungskörpers gegeben ist, so können diese Gleichungen bedeutend vereinfacht werden; sie lassen sich im Allgemeinen in jedem speciellen Fall ohne grosse Schwierigkeit aufstellen. Wenn z. B. der Körper ein ebener Reif oder eine Scheibe vom Radius $a$ ist, so hat man $GN = 0$, $GM = z = a\sin\theta$, $MP = a\cos\theta$ und den Krümmungsradius $\varrho = 0$.

§ 242. *Die stationäre Bewegung zu finden.*

Wenn die Bewegung stationär ist, so rollt die Umdrehungsfläche so auf der Ebene, dass ihre Axe mit der Verticalen einen constanten Winkel bildet. Für diesen Bewegungszustand sei $\theta = \alpha$, $d\psi/dt = \mu$, $\omega_3 = n$, $GM = p$, $MP = q$, $GN = \xi$, $NP = \eta$ und $\varrho$ der Krümmungsradius des rollenden Körpers bei $P$. Die Beziehungen zwischen diesen Grössen werden durch Substitution in die obigen Gleichungen gefunden.

Man solle z. B. ermitteln, unter welchen Bedingungen die Fläche mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit $n$ rollt und ihre Axe der Figur dabei den gegebenen Winkel $\alpha$ mit der Verticalen macht. Hier sind $n$ und $\alpha$ gegeben, $p$, $q$, $\xi$, $\eta$, $\varrho$ findet man aus den Gleichungen der Fläche. Wir haben $\mu$, $\omega_1$, $\omega_2$, $u$, $v$ und den Radius des von $G$ im Raum beschriebenen Kreises zu suchen. Durch Elimination von $F$ und $R$ erhält man $F' = 0$ und

$$\mu^2 \sin\alpha (A\cos\alpha - p\xi) - n\mu (C\sin\alpha + p\eta) - gq = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

$$\omega_1 = -\mu\sin\alpha, \qquad \omega_2 = 0,$$

$$u = 0, \qquad\qquad v = -n\eta - \xi\mu\sin\alpha.$$

Es sei $r$ der Radius des Kreises, welchen $G$ bei dem Rollen der Fläche auf der Ebene beschreibt. Da $G$ seinen Kreis mit der Winkelgeschwindigkeit $\mu$ durchläuft, so ist $r\mu = v$ und daher

$$r = -\frac{\eta n}{\mu} - \xi\sin\alpha.$$

Durch Elimination von $n$ lässt sich $r$ auch aus der Gleichung

$$\mu^2\{A\eta\sin\alpha\cos\alpha + C\xi\sin^2\alpha + r(C\sin\alpha + p\eta)\} = gq\eta$$

ermitteln.

Für jeden Werth von $n$ und $\alpha$ gibt es zwei Werthe von $\mu$, die jedoch verschiedenen Anfangsbedingungen entsprechen. Soll eine stationäre Bewegung möglich sein, so müssen die Wurzeln der quadratischen Gleichung (12) reell sein. Dies gibt

$$(C\sin\alpha + p\eta)^2 n^2 + 4gq\sin\alpha(A\cos\alpha - p\xi) = \text{einer positiven Grösse.}$$

Die Momentanaxe geht durch $P$ und schneidet die Axe der Figur in einem Punkt $E$, der in der Zeichnung nicht angegeben ist. $EH$ sei ein Loth auf die Horizontalebene; alsdann liegt die Verticale $EH$, während der Körper bei stationärer Bewegung rollt, fest und $G$ dreht sich um sie mit der Winkelgeschwindigkeit $\mu$. Um $E$ zu finden, beachte man, dass $N$ die Geschwindigkeit $\mu \cdot EN \cdot \sin\alpha$ hat, die aber auch, da $EP$ die Momentanaxe ist, $\omega \cdot EN \cdot \sin NEP$ ist. Setzt man beide gleich, so ergibt sich, dass $E$ durch die Gleichung $\mu\sin\alpha = n \operatorname{tg} NEP$ bestimmt wird.

*Die Bestimmung der stationären Bewegung auf elementarem Weg.*

Bei vielen Problemen, in welchen nur die stationäre Bewegung gesucht wird, vereinfacht sich das eben beschriebene Verfahren sehr. Da alle Grössen mit Ausnahme von $\psi$ constant sind, so fallen sämmtliche Differentialquotienten in den allgemeinen Bewegungsgleichungen des § 10 weg. Weil der Punkt $G$ seinen Kreis unter dem Einfluss aller an ihn verlegten Kräfte gleichmässig beschreibt, so ist $u = 0$ und $F' = 0$. Um daher die stationäre Bewegung zu finden, hat man nur in § 10 die Werthe $h_1 = A\omega_1$, $h_2 = 0$, $h_3 = Cn$, $\omega_2 = 0$, $\theta_1 = \omega_1$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \mu\cos\alpha$ zu substituiren. Man erhält so, wenn man $g$ statt $R$ und $\alpha$ statt $\theta$ schreibt,

$$-Cn\omega_1 + A\omega_1\mu\cos\alpha = -F \cdot GM - g \cdot MP \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$\mu\sin\alpha = -\omega_1 \quad . \quad . \quad . \quad (5), \qquad\qquad -v\mu = F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Verbindet man damit die geometrischen Gleichungen (10), so ergeben sich die obigen Resultate für die stationäre Bewegung unmittelbar.

*Warum gewisse Kreisel sich in die Höhe richten.*

Wenn der Körper dadurch in Bewegung gesetzt wird, dass man, wie beim Kreisel, eine Schnur von ihm abrollt, so sind die Anfangswerthe von $\omega_1$, $\omega_2$, $u$, $v$ gering. Sollen daher die Schwingungen des Körpers klein sein, so muss die stationäre Bewegung nach (5) derart sein, dass $\mu$ klein ist. Vergleicht man (12), so sieht man, dass diese Bedingung sich dadurch erfüllen lässt, dass man $n$ gross macht. Man erhält

$$n\mu(C\sin\alpha + p\eta) = -gq, \quad v = r\mu.$$

Da ein grosser Werth von $\omega_3$ oder $n$ die Gleichung (10) unmöglich machen würde, so folgt daraus, *dass eine stationäre Bewegung in dieser Art nur hergestellt werden kann, wenn $n \cdot PN$ klein oder $GN$ gross ist.*

Ist der Körper ein Kreisel mit abgerundeter Spitze, so ist zwar $PN$ klein, trotzdem aber kann die durch Abwinden der Schnur ihm gegebene Winkel-

geschwindigkeit $n$ noch so gross sein, dass sie die Gleichung (10) nicht befriedigen kann. Wenn die Ebene vollkommen rauh ist, so tritt bei $P$ eine Stossreibung in Wirksamkeit, die gross genug ist, um $P$ zur Ruhe zu bringen. Ist die Ebene unvollkommen rauh, so gleitet der Punkt $P$ auf der Ebene und es existirt daher eine Componente der Reibung senkrecht zur Ebene $GPM$, welche der mit $F'$ in der Figur bezeichneten Richtung entgegengesetzt ist. Dadurch kommt zu den bei der stationären Bewegung vorhandenen Paaren ein neues, welches in der Ebene $GPF'$ auf den Körper wirkt. Weil nun der Punkt $G$ bei einem Kreisel nicht auf der Seite von $N$, wie es die Figur S. 186 darstellt, sondern auf der andern liegt, so geht die positive Richtung der Axe des Paares nach der Linken von $GC$. Vergleicht man das Paar mit dem Paar $Q$ in § 209, so sieht man, dass es im Allgemeinen die Wirkung hat, dass sich die invariable Linie in $G$, begleitet von $GC$, der durch $G$ gezogenen Verticalen nähert. Wenn der Anfangswerth von $n$ nur wenig grösser als der für (10) erforderliche ist, so richtet sich der Kreisel nur soweit in die Höhe, dass die Bewegung der Gleichung entspricht. Ist aber $n$ viel zu gross, so steigt er so lange, bis seine Axe merklich vertical steht.

§ 243. *Die kleine Schwingung zu finden.* Wir setzen

$$\theta = \alpha + x, \quad d\psi/dt = \mu + dy/dt, \quad \omega_3 = n + z.$$

Nach der Figur ist dann

$$z = GM = p + qx, \qquad PM = q + (\varrho - p)x,$$

$$GN = \xi + \varrho x \sin\alpha, \qquad PN = \eta + \varrho x \cos\alpha$$

und durch Substitution in (5), (9), (10), (6), (7)

$$\omega_1 = -\mu\sin\alpha - \mu\cos\alpha x - \sin\alpha y', \qquad u = px',$$

$$v = -\mu\sin\alpha\xi - n\eta - (\mu\cos\alpha\xi + \mu\varrho\sin^2\alpha + n\varrho\cos\alpha)x - \sin\alpha\xi y' - \eta z,$$

$$F = px'' + \mu^2\sin\alpha\xi + n\mu\eta + 2\sin\alpha\mu\xi y' + \eta n y' + \\ + \mu(\mu\cos\alpha\xi + \mu\varrho\sin^2\alpha + n\varrho\cos\alpha)x + \eta\mu z,$$

$$F' = -(\mu\cos\alpha\xi - p\mu + \mu\varrho\sin^2\alpha + n\varrho\cos\alpha)x' - \sin\alpha\xi y'' - \eta z',$$

worin die Accente, mit Ausnahme des von $F'$, Differentiationen nach der Zeit bedeuten.

Setzt man diese Werthe in Gleichung (3) ein und integrirt, so wird

$$(C + \eta^2)z = (p\mu - \mu\xi\cos\alpha - \mu\varrho\sin^2\alpha - n\varrho\cos\alpha)\eta x - \eta\sin\alpha\xi y' \quad . \quad \text{(A)},$$

Dabei ist die Constante weggelassen worden, weil angenommen wird, dass $n$, $\alpha$ und $\mu$ alle constanten Theile von $\omega_3$, $\theta$ und $d\psi/dt$ enthalten.

Durch Substitution in (1) und Integration erhält man ferner

$$\{Cn - 2A\mu\cos\alpha + \xi(p\mu - \mu\cos\alpha\xi - \mu\sin^2\alpha\varrho - n\varrho\cos\alpha)\}x \\ -(A + \xi^2)\sin\alpha y' = \xi\eta z \qquad \text{(B)}$$

und durch Einsetzen in Gleichung (2)

$$\left.\begin{array}{l} (A + p^2 + q^2)x'' + x\{A\mu^2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + Cn\mu\cos\alpha + (\varrho - p)g + \\ + \mu^2\sin\alpha\xi q + n\mu\eta q + \mu^2\cos\alpha\xi p + n\mu\varrho p\cos\alpha + \mu^2\sin^2\alpha\varrho p\} + \\ + y'\{-2A\mu\sin\alpha\cos\alpha + Cn\sin\alpha + 2\xi p\mu\sin\alpha + np\eta\} + \\ + z\{C\mu\sin\alpha + \mu p\eta\} + \\ + \{-A\sin\alpha\cos\alpha\mu^2 + Cn\mu\sin\alpha + gq + \sin\alpha\mu^2 p\xi + n\mu p\eta\} \end{array}\right\} = 0 \quad \text{(C)}.$$

Das letzte Glied muss verschwinden, da $x$, $y$, $z$ nur periodische Glieder enthalten. Die so gebildete Gleichung bestimmt die stationäre Bewegung und liefert den Werth von $\mu$.

Um die Gleichungen aufzulösen, kann man setzen:

$$x = L \sin(\lambda t + f), \quad y = M \sin(\lambda t + f), \quad z = N(\lambda t + f).$$

Substituirt man diese Werthe in (A), (B), (C), so erhält man drei Gleichungen, aus denen sich die Verhältnisse $L:M:N$ eliminiren lassen. Ehe man substituirt, empfiehlt es sich, die Gleichungen dadurch zu vereinfachen, dass man erstens (A) mit $\xi$, (B) mit $\eta$ multiplicirt und das letzte Resultat vom ersten abzieht und zweitens (A) mit $\mu\varrho/\eta$ multiplicirt und (C) zu dem Resultat addirt. Auf diese Weise kommt man zu der folgenden Determinante

$$\begin{vmatrix} -(A+p^2+q^2)\lambda^2 + (\varrho - p)g + \mu^2(p^2 - A\cos 2\alpha - qr) + n\mu C\cos\alpha & A\mu\sin\alpha\cos\alpha + \frac{qg}{\mu} & C\mu(\eta\sin\alpha - p) \\ Cn - 2A\mu\cos\alpha & A\sin\alpha & C\xi \\ (p - \xi\cos\alpha - \varrho\sin^2\alpha)\mu - \varrho n\cos\alpha & \xi\sin\alpha & -(C+\eta^2) \end{vmatrix} = 0.$$

§ 244. **Beispiele.** Beisp. 1. Die kleinste Winkelgeschwindigkeit zu finden, in Folge deren ein Reif auf einer graden Linie rollt.

In diesem Fall ist $r$ unendlich gross und $\mu$ muss deshalb Nnll sein. Aus der Gleichung der stationären Bewegung folgt, dass entweder $q = 0$ sein oder der Reif aufrecht stehen muss. Man hat

$$p = a, \; q = 0, \; \xi = 0, \; \eta = a, \; \mu = 0 \text{ und } C = 2A.$$

Die Determinante wird

$$(A + a^2)\lambda^2 = 2n^2(2A + a^2) - ag;$$

die geringste Winkelgeschwindigkeit, welche $\lambda$ zu einer reellen Grösse macht, ist daher durch

$$2(C + a^2)n^2 = ag$$

gegeben. Ist der Reif eine Kreislinie, so ist $C = a^2$ und bezeichnet $V$ die kleinste Geschwindigkeit des Schwerpunktes, so erhält man aus der Gleichung $V^2 > \frac{1}{4}ag$. Ist er dagegen eine Kreisscheibe, so wird $C = \frac{1}{2}a^2$ und $V^2 > \frac{1}{3}ag$.

Obgleich diese Resultate aus der Determinantengleichung abgeleitet wurden, so wird doch dem Leser gerathen, auch das in den §§ 242, 243 ausführlich angegebene Verfahren hier mit den Vereinfachungen anzuwenden, die eintreten, wenn der rollende Körper ein Reif ist. Eine leichte unabhängige Auflösung findet man auch bei Benutzung des zweiten Systems der Gleichungen in § 15.

Beisp. 2. Eine Kreisscheibe wird mit ihrem Rand auf einen vollkommen rauhen horizontalen Tisch gestellt und mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ um den durch den Berührungspunkt gehenden Durchmesser in Rotation gesetzt. Man beweise, dass bei stationärer Bewegung der Mittelpunkt sich in Ruhe befindet, wenn er in der Höhe $k^2\Omega^2/g$ über der horizontalen Ebene liegt, wobei $k$ den Trägheitsradius für einen Durchmesser bedeutet, und dass der Berührungspunkt, wenn $\alpha$ die Neigung der Ebene gegen den Horizont bezeichnet, einen vollständigen Umgang in der Zeit $2\pi\sin\alpha/\Omega$ macht. Wenn die Scheibe in diesem Zustand stationärer

Bewegung leicht gestört wird, zu zeigen, dass die Zeit einer kleinen Schwingung

$$2\pi\left\{\frac{k^2}{ga}\;\frac{(k^2+a^2)\sin\alpha}{3k^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}\right\}^{\frac{1}{2}}\ \text{ist.}$$

Beisp. 3. Eine unendlich dünne Kreisscheibe bewegt sich auf einer vollkommen rauhen horizontalen Ebene auf solche Art, dass sie die constante Neigung $\alpha$ gegen den Horizont beibehält. Man finde, 1) unter welcher Bedingung die Bewegung stationär ist, und 2) die Zeit einer kleinen Schwingung.

$a$ sei der Radius der Scheibe, $k$ der Trägheitsradius für einen Durchmesser, $\omega_3$ die Winkelgeschwindigkeit um die Axe, $\mu$ die Winkelgeschwindigkeit des Schwerpunktes um das Centrum des von ihm beschriebenen Kreises, $r$ der Radius dieses Kreises. Alsdann ist bei stationärer Bewegung

$$(2k^2+a^2)\,\omega_3=k^2\mu\cos\alpha-\frac{ga}{\mu}\operatorname{cotg}\alpha,\quad (2k^2+a^2)\,r=-k^2a\cos\alpha+\frac{ga^2}{\mu^2}\operatorname{cotg}\alpha$$

und, wenn $T$ die Zeit einer kleinen Schwingung bedeutet,

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2(k^2+a^2)=\mu^2\{k^2(1+2\cos^2\alpha)+a^2\sin^2\alpha\}-n\mu\cos\alpha\,(6k^2+a^2)+$$
$$+2n^2(2k^2+a^2)-ga\sin\alpha.$$

Beispiel 4. Ein homogener grader Kreiscylinder, dessen Höhe doppelt so gross als der Radius seiner Basis ist, rollt auf einer rauhen horizontalen Ebene und seine Axe ist dabei um 45° gegen die Verticale geneigt. Wenn $n$ die Winkelgeschwindigkeit um seine Axe ist, zu beweisen, dass bei stationärer Bewegung die durch seine Axe gehende Verticalebene sich um eine feste verticale Linie mit der Winkelgeschwindigkeit $\mu=n\cdot 30\sqrt{2}/31$ dreht. Man zeige, dass die Momentanaxe die Axe des Kreisels im Verhältniss von 31 : 29 theilt. Man beweise ferner, dass die Periode $2\pi/\lambda$ der kleinen Schwingungen um die stationäre Bewegung durch $\lambda^2+\frac{12\sqrt{2}}{31}\frac{g}{h}=\frac{1800}{(31)^2}n^2$ gegeben ist, worin $h$ den Radius der Basis angibt.

Die Bewegung eines auf seiner Kante rollenden Cylinders lässt sich aus der eines Umdrehungskörpers dadurch ableiten, dass man den Krümmungsradius $\varrho=0$ setzt. Die allgemeinen Resultate für den Cylinder sind etwas complicirt, setzt man aber $\alpha=45^0$, $\xi=-h$, $\eta=h$, also $p=h\sqrt{2}$ und $q=0$; ferner $C=\frac{1}{2}h^2$, $A=\frac{7}{12}h^2$, so werden sie erheblich einfacher.

Beisp. 5. Ein schwerer Körper wird an die ebene Fläche einer Halbkugel so befestigt, dass das Ganze einen Umdrehungskörper bildet; der Radius der Halbkugel ist $a$ und der Abstand des Schwerpunktes des ganzen Körpers von dem Centrum der Halbkugel $h$. Der Körper wird mit seiner sphärischen Fläche auf eine horizontale Ebene gestellt und auf irgend eine Art in Bewegung gesetzt. Man zeige, dass ein Integral der Bewegungsgleichungen

$$A\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}+C\omega_3\left(\cos\theta+\frac{h}{a}\right)=\text{Constante}$$

ist, mag nun die Ebene glatt, unvollkommen rauh oder vollkommen rauh sein.

Offenbar sind die beiden ersten Glieder auf der linken Seite der Gleichung die Winkelbewegungsgrösse um die durch $G$ gehende Verticale. Sie heisse $I$. Da wir die Momente um eine beliebige durch $G$ gehende Axe so nehmen dürfen, als läge $G$ im Raum fest, so ist $dI/dt=F'\cdot PM$. Es ist aber $PM=-PN\cdot h/a$; durch Elimination von $F'$ mit Hülfe von (3) und Integration erhält man daraus das gesuchte Resultat.

Das Integral gibt Jellet in seiner *Theory of friction*[1]), Kap. 8, 1872; er findet es freilich auf ganz andere Art, wie wir. Er nimmt auch an, die Rotation um die Axe der Figur sei so schnell, dass die Reibung senkrecht zu der die Axe der Figur enthaltenden Verticalebene wirkt. Er zeigt ferner mit Hülfe des Integrals, dass die Axe eines auf einer unvollkommen rauhen horizontalen Ebene rotirenden Kreisels „bald vertical wird, wenn man annimmt, dass die andern Bewegungen im Vergleich zur Rotation um diese Axe langsam sind".

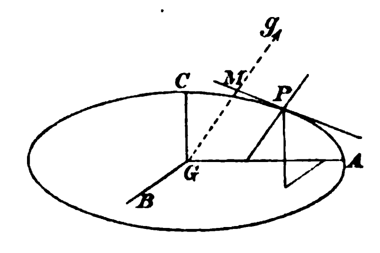
Beisp. 6. Eine Umdrehungsfläche rollt auf einer andern vollkommen rauhen Umdrehungsfläche und ihre Axe steht dabei vertical. Der Schwerpunkt der rollenden Fläche liegt in ihrer Axe. Man finde die Fälle stationärer Bewegung, in welchen für die Axen der beiden Flächen die Möglichkeit besteht, während der Bewegung in einer verticalen Ebene zu bleiben.

Es sei $\theta$ die Neigung der Axen der beiden Flächen gegeneinander, $P$ der Berührungspunkt, $GM$ ein Loth auf die Berührungsebene in $P$, $PN$ ein Loth auf die Axe $GC$ des rollenden Körpers, $F$ die Reibung, $R$ die Reaction bei $P$, $n$ die Winkelgeschwindigkeit des rollenden Körpers um seine Axe $GC$, $\mu$ die Winkelgeschwindigkeit, mit der $G$ seine Kreisbahn im Raum beschreibt, $r$ der Radius dieses Kreises. Bei stationärer Bewegung ist dann

$$M\mu \sin\theta\,(Cn - A\mu\cos\theta) = -F\cdot GM - R\cdot MP,$$
$$R = -Mr\mu^2 \sin\alpha + Mg\cos\alpha,$$
$$F = -Mr\mu^2\cos\alpha - Mg\sin\alpha,$$
$$n\cdot PN + \mu\sin\theta\cdot GN = -r\mu,$$

worin $M$ die Masse des Körpers bedeutet. Dieses Beispiel wurde vom Verfasser in einem *examination paper* an der Universität zu London 1860 gegeben.

§ 245. **Allgemeine Bewegungsgleichungen.** *Eine Fläche von beliebiger Gestalt rollt auf einer festen horizontalen Ebene unter der Wirkung der Schwere. Man bilde die Bewegungsgleichungen.*




Es seien $GA$, $GB$, $GC$ die Hauptaxen für den Schwerpunkt und zugleich auch die Bezugsaxen und die Masse sei die Einheit. $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ möge die Gleichung der Oberfläche des Körpers und $(\xi, \eta, \zeta)$ die Coordinaten des Berührungspunktes $P$ sein. Sind $(p, q, r)$ die Richtungscosinusse der *nach auswärts* gehenden Normalen zur Fläche im Punkt $\xi, \eta, \zeta$, so ist

$$p\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = q\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = r\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}.$$

*Zuerst sei die Ebene vollkommen rauh.* $X, Y, Z$ seien die in der Richtung der Axen genommenen Componenten der Resultante aus der normalen Reaction und den beiden Reibungen im Punkt $\xi, \eta, \zeta$ und die Masse des Körpers sei die Einheit. Nach den Euler'schen Gleichungen ist

$$\left.\begin{aligned} A\omega_1' - (B - C)\,\omega_2\omega_3 &= \eta Z - \zeta Y \\ B\omega_2' - (C - A)\,\omega_3\omega_1 &= \zeta X - \xi Z \\ C\omega_3' - (A - B)\,\omega_1\omega_2 &= \xi Y - \eta X \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (1),$$

worin die Accente Differentiationen nach der Zeit angeben.

1) Vergl. die deutsche Bearbeitung von Lüroth und Schepp: Die Theorie der Reibung, Leipzig, Teubner, 1890, S. 202.

Ferner sind die Gleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes nach § 5

$$\left.\begin{aligned} u' - v\omega_3 + w\omega_2 &= gp + X \\ v' - w\omega_1 + u\omega_3 &= gq + Y \\ w' - u\omega_2 + v\omega_1 &= gr + Z \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

und, weil die Linie $(p, q, r)$ immer vertical bleibt, nach § 18

$$\left.\begin{aligned} p' &= q\omega_3 - r\omega_2 \\ q' &= r\omega_1 - p\omega_3 \\ r' &= p\omega_2 - q\omega_1 \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Da der Punkt $(\xi, \eta, \zeta)$ für den Augenblick ebensowohl in Bezug auf die beweglichen Axen, als auch im Raum festliegt, so ist nach § 17

$$\left.\begin{aligned} U &= u - \eta\omega_3 + \zeta\omega_2 = 0 \\ V &= v - \zeta\omega_1 + \xi\omega_3 = 0 \\ W &= w - \xi\omega_2 + \eta\omega_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4),$$

worin $U$, $V$, $W$ die Componenten der Geschwindigkeit des Berührungspunktes $P$ in der positiven Richtung der Axen sind.

§ 246. *Zweitens sei die Ebene vollkommen glatt.* Die Gleichungen (1), (2), (3) bleiben auch für diesen Fall bestehen, während die Gleichungen (4) ihre Gültigkeit verlieren. Da die Resultante von $X$, $Y$, $Z$ eine normal zur festen Ebene gerichtete Reaction $R$ ist, so wird

$$X = -pR, \quad Y = -qR, \quad Z = -rR \quad (5).$$

$R$ hat das negative Vorzeichen erhalten, weil $(p, q, r)$ die Richtungscosinusse der nach auswärts gerichteten Normalen sind, die Componenten von $R$ daher, wenn die Cosinusse positiv genommen werden, offenbar sämmtlich negativ sind. Wenn $R$ in irgend einem Augenblick verschwindet und das Zeichen wechselt, so verlässt der Körper die Ebene.

Da die Geschwindigkeit von $G$ parallel der festen Ebene der Richtung und Grösse nach constant ist, so wird man es in der Regel vortheilhafter finden, die Gleichungen (2) durch die folgende einfache Gleichung zu ersetzen. $GM$ sei das Loth auf die feste Ebene und $MG = z$; man hat dann

$$z'' = -g + R \quad (6).$$

Die Geschwindigkeit des Berührungspunktes normal zur Ebene muss Null sein; diese Bedingung kann man in einer der beiden gleichwerthigen Formen ausdrücken

$$\left.\begin{aligned} Up + Vq + Wr &= 0 \\ z' + (\eta\omega_3 - \zeta\omega_2)p + (\zeta\omega_1 - \xi\omega_3)q + (\xi\omega_2 - \eta\omega_1)r &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7).$$

§ 247. *Drittens gleite der Körper auf einer unvollkommen rauhen Ebene.* Die Gleichungen (1), (2), (3) und (7) gelten wie zuvor. Wenn der Reibungscoefficient $\mu$ ist, so muss die Resultante der Kräfte $X$, $Y$, $Z$ mit der Normalen im Berührungspunkt einen Winkel bilden, dessen Tangente $\mu$ ist; daher

$$\frac{(Xp + Yq + Zr)^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{1}{1 + \mu^2} \quad (8).$$

Da ferner die Resultante von $(X, Y, Z)$, die Normale in $P$ und die Richtung des Gleitens in derselben Ebene liegen müssen, so besteht die Determinantengleichung

$$X(qW - rV) + Y(rU - pW) + Z(pV - qU) = 0 \quad (9).$$

Weil die Reibung der Richtung des Gleitens *entgegengesetzt* ist, so muss $XU + YV + ZW$ negativ sein. Verschwindet dieser Ausdruck oder wechselt er sein Vorzeichen, so hört der Berührungspunkt zu gleiten auf.

Geht der Körper von der Ruhe aus, so benutze man die in Bd. 1, Kap. IV erklärte Methode, um zu bestimmen, ob der Berührungspunkt zu gleiten beginnt oder nicht. Man kann das Verfahren kurz so angeben. Man nehme an, $X$, $Y$, $Z$ seien die Kräfte, die erforderlich dazu sind, das Gleiten zu verhindern. Da nun $u$, $v$, $w$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ Anfangs sämmtlich Null sind, so erhält man durch Differentiation von (4) und Elimination der Differentialquotienten von $u$, $v$, $w$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ drei lineare Gleichungen, aus welchen $X$, $Y$, $Z$ als Functionen der bekannten Anfangswerthe von $(p, q, r)$ und $(\xi, \eta, \zeta)$ zu ermitteln sind. Der Berührungspunkt wird gleiten oder nicht, je nachdem diese Werthe die linke Seite der Gleichung (8) kleiner oder grösser als die rechte Seite machen.

Auf diese Art *reichen die Gleichungen* (1), (2) *und* (4), wenn der Berührungspunkt für den Augenblick festliegt, *hin, um die Anfangswerthe von* $X$, $Y$, $Z$, *d. h. die Componenten der Reaction im Berührungspunkt zu finden.* Es ist dasselbe Verfahren, welches in Bd. 1, Kap. IV unter der Ueberschrift *Anfangsbewegungen* dazu benutzt wurde, den Anfangswerth einer Reaction zu finden, und darin bestand, die geometrischen Gleichungen zu differenziren und aus den dynamischen Gleichungen einzusetzen. Es scheint dies die einfachste Methode zu sein, doch kann man auch eine der beiden folgenden benutzen.

Die Gleichungen für $X$, $Y$, $Z$ kann man dadurch erhalten, dass man die Kräfte so behandelt, als ob sie unbegrenzt kleine Momentankräfte wären. Man kann sich denken, es wirkten in der Zeit $dt$ auf den Körper eine Momentankraft $g\,dt$ im Punkt $G$ und eine andere, deren Componenten $X\,dt$, $Y\,dt$, $Z\,dt$ sind, im Punkt $P$. In Bd. 1 in dem Kapitel über die Bewegungsgrösse ist gezeigt worden, dass man sie eine nach der andern betrachten kann. Die erste hat zur Folge, dass $P$ eine zur festen Ebene normale und nach aussen gerichtete Geschwindigkeit $g\,dt$ erhält. Wenn $P$ nicht gleitet, so muss die Stosskraft in $P$ die Wirkung haben, diese Geschwindigkeit zu zerstören.

In dem Kapitel über Bewegungsgrösse in Bd. 1 sind gewisse Formeln aus den gewöhnlichen Gleichungen der Stosskräfte abgeleitet worden, aus denen sich die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit des Angriffspunktes einer jeden Stosskraft finden lassen. Auch wurde eine geometrische Darstellung dieser Formeln mit Hülfe eines Ellipsoides $E =$ Constante gegeben, wobei unter $E$ die durch den Stoss erzeugte lebendige Kraft verstanden wurde. Wir wollen die ganze Untersuchung hier nicht wiederholen und diese Formeln zur Ermittelung von $X$, $Y$, $Z$ benutzen. Wir setzen dem entsprechend $u_1 = pg$, $v_1 = qg$, $w_1 = rg$ und $u_2$, $v_2$, $w_2$ auf der linken Seite gleich Null und vertauschen, um sie der Bezeichnung in diesem Paragraphen anzupassen, $p$, $q$, $r$ auf der rechten Seite mit $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Geometrisch gleitet der Berührungspunkt nicht, wenn der Durchmesser, welcher der festen Ebene in Bezug auf das $E$ genannte Ellipsoid conjugirt ist, einen kleineren Winkel als arctg $\mu$ mit der Normalen macht.

In jedem Fall kennt man, wenn $p$, $q$, $r$ gefunden sind, die Neigungen der Hauptaxen gegen die Verticale. Ihre Bewegung um die Verticale lässt sich dann mittelst des in § 19 angegebenen Verfahrens ableiten. Hat man $u$, $v$, $w$ und die Bewegungen der Axen ermittelt, so lässt sich die Componente der Geschwindigkeit des Schwerpunktes in der Richtung einer beliebigen im Raum festliegenden Geraden durch Zerlegung finden.

§ 248. Die Principien der Flächen und der lebendigen Kraft liefern einige Integrale dieser Gleichungen. Wenn die Ebene vollkommen glatt ist, so wird

$$A\omega_1 p + B\omega_2 q + C\omega_3 r = \alpha,$$
$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 + (dz/dt)^2 = \beta - 2gz,$$

worin $\alpha$ und $\beta$ zwei Constante sind. Ist die Ebene aber vollkommen rauh, so hat man

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 + u^2 + v^2 + w^2 = \beta - 2gz.$$

§ 249. **Beispiele.** Beisp. 1. Ein Körper ruht mit einer ebenen Fläche auf einer unvollkommen rauhen horizontalen Ebene, deren Reibungscoefficient $\mu$ ist. Der Schwerpunkt des Körpers liegt vertical über dem seiner Grundfläche und die Gestalt dieser Fläche ist derart, dass ihr Trägheitsradius für eine beliebige in ihrer Ebene liegende und durch ihren Schwerpunkt gehende Gerade $\gamma$ ist. Der Körper wird nun längs der Ebene so fortgeschleudert, dass die Anfangsgeschwindigkeit seines Schwerpunktes $v_0$ und die Anfangsrotation um eine verticale durch seinen Schwerpunkt gehende Axe $\omega_0$ ist. Wenn $\omega_0$ sehr klein ist, zu beweisen, dass sich der Schwerpunkt in einer Geraden bewegt und dass seine Geschwindigkeit am Ende irgend einer Zeit $t$ gleich $v_0 - \mu g t$ ist. Wenn $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit zu derselben Zeit ist, zu beweisen, dass $\frac{\gamma^2}{k^2}\log\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \frac{\mu g t}{v_0}$ ist, worin $k$ den Trägheitsradius des Körpers für eine durch seinen Schwerpunkt gehende Verticale bezeichnet. [Poisson, *Traité de Mécanique.*]

Beisp. 2. Ein Körper von beliebiger Gestalt ruht so mit einer ebenen Grundfläche auf einer glatten festen Ebene, dass das Loth vom Schwerpunkt $G$ des Körpers auf die Ebene in diese Grundfläche fällt. Wenn der Körper nun von einem Schlag getroffen wird, der durch $G$ geht oder wenn er sich von der Ruhe aus unter der Wirkung beliebiger endlicher Kräfte, deren Resultante durch $G$ geht, zu bewegen anfängt, zu beweisen, dass er nicht umfallen kann, sondern beginnen wird, auf der Ebene zu gleiten, auch dann, wenn die Richtung der Kraft die Ebene ausserhalb der Basis trifft. [Cournot.]

Beisp. 3. Ein schweres Ellipsoid wird auf eine schiefe Ebene gesetzt und berührt sie in einem Punkt $P$, dessen Coordinaten in Bezug auf die Hauptdurchmesser $(\xi, \eta, \zeta)$ sind. Man leite aus den §§ 246 und 247 die Anfangswerthe der Reaction in $P$ ab, wenn die Ebene (1) vollkommen rauh, (2) vollkommen glatt ist. Daraus ermittle man die Anfangsrichtung der Bewegung des Schwerpunktes.

§ 250. **Schwingungen auf einer rauhen horizontalen Ebene.** Welche Gestalt ein Körper auch haben mag, man kann immer annehmen, er werde um die Normale im Berührungspunkt mit der Winkelgeschwindigkeit $n$ in Rotation gesetzt. Fährt der Körper fort, um diese Normale als permanente Axe zu rotiren, so muss sie eine Hauptaxe für den Berührungspunkt sein und muss auch durch den Schwerpunkt gehen. Dies kann aber nur dann der Fall sein, wenn die Normale eine Hauptaxe für den Schwerpunkt ist. Hat man dagegen $n = 0$, so ist diese Bedingung nicht nöthig. Es sind daher zwei Fälle zu unterscheiden.

*1. Fall. Ein Körper von beliebiger Gestalt ruht im Gleichgewicht mit dem Punkt $C$ auf einer rauhen horizontalen Ebene, wobei eine Hauptaxe für den Schwerpunkt $G$ vertical steht; er wird dann mit der Winkelgeschwindigkeit $n$ um $GC$ in Rotation gesetzt. Eine kleine Störung wird dem Körper gegeben; man soll die Bewegung finden.*

*2. Fall. Ein Körper von beliebiger Gestalt wird im Gleichgewicht auf eine rauhe horizontale Ebene gesetzt, wobei sein Schwerpunkt über dem Berührungspunkt liegt. Eine kleine Störung wird dem Körper gegeben; man soll die Bewegung finden.*

§ 251. *1. Fall.* Nimmt man an, der Körper entferne sich nicht weit aus seiner Anfangslage, so sind alle Grössen $p, q, u, v, w, \omega_1, \omega_2$ klein und nahezu $r = 1$. Man sieht daher aus (2), dass $X, Y$ bei Vernachlässigung der Quadrate kleiner Grössen ebenfalls klein sind und dass nahezu $Z = -g$ ist. Aus (1) folgt,

dass $\omega_3$ constant und daher $= n$ ist. Ebenso sind $\xi$ und $\eta$ klein und nahezu $\zeta = h$; dabei bezeichnet $h$ die Höhe des Schwerpunktes über der horizontalen Ebene, ehe die Bewegung gestört wurde. Der Gleichung der Fläche kann man nach Taylor's Theorem die Form geben

$$\zeta = h - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{a} + \frac{2\xi\eta}{b} + \frac{\eta^2}{c}\right),$$

worin $a$, $b$, $c$ Constante sind, die von der Krümmung der Hauptschnitte des Körpers im Punkt $C$ abhängen.

Vernachlässigt man die Quadrate aller kleinen Grössen, so werden die Gleichungen des § 245

$$\left.\begin{array}{l} A\omega_1' - (B-C)\,n\omega_2 = -g\eta - hY \\ B\omega_2' - (C-A)\,n\omega_1 = hX + g\xi \end{array}\right\},$$

$$u' - nv = gp + X, \qquad v' + nu = gq + Y,$$

$$p' = nq - \omega_2, \qquad q' = \omega_1 - np,$$

$$u - n\eta + h\omega_2 = 0, \qquad v - h\omega_1 + n\xi = 0,$$

$$p = \frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b}, \qquad q = \frac{\xi}{b} + \frac{\eta}{c}.$$

Durch Elimination von $X$, $Y$, $u$, $v$, $\omega_1$, $\omega_2$ aus diesen Gleichungen erhält man, wie in § 15,

$$(A+h^2)\,q'' + (A+B+2h^2-C)\,np' - \{(B-C)\,n^2 + hg + h^2n^2\}\,q = $$
$$= -(g+hn^2)\,\eta + hn\xi'$$
$$-(B+h^2)\,p'' + (A+B+2h^2-C)\,nq' + \{(A-C)\,n^2 + hg + h^2n^2\}\,p =$$
$$= (g+hn^2)\,\xi + hn\eta'.$$

Es empfiehlt sich, $\xi$ und $\eta$ durch $p$ und $q$ auszudrücken. Die rechte Seite einer jeden Gleichung nimmt dann die Gestalt an

$$Lp + Mq + L_1p' + M_1q'.$$

Um sie aufzulösen, setze man $p = Pe^{\mu t}$, $q = Qe^{\mu t}$, worin $P$ und $Q$ zwei Constanten sind (§ 112). Substituirt man in die Gleichungen und eliminirt $P/Q$, so erhält man eine Gleichung vierten Grades für $\mu$. Die so gefundenen Werthe von $\mu$ müssen die Form $\pm\lambda\sqrt{\nu - 1}$ haben, wenn die Bewegung durchgehend schwingend sein soll. Ist dies der Fall, so hat der Körper zwei gleichzeitige schwingende Bewegungen, deren Perioden $2\pi/\lambda_1$ und $2\pi/\lambda_2$ sind (§ 115).

Wenn die Tangenten an die Krümmungslinien des beweglichen Körpers in $C$ den Hauptaxen für den Schwerpunkt parallel laufen, so lassen sich diese Gleichungen bedeutend vereinfachen. Der Gleichung der Fläche kann man in diesem Fall die Gestalt geben

$$\zeta = h - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{c}\right),$$

worin $a$ und $c$ die Krümmungsradien der Krümmungslinien sind. Die rechten Seiten der Gleichungen werden dann

$$-(g+hn^2)\,cq + hnap' \text{ bezügl. } (g+hn^2)\,ap + hncq'.$$

Um den Gleichungen zu genügen, reicht es hin

$$p = F\cos(\lambda t + f), \quad q = G\sin(\lambda t + f)$$

zu setzen.

Diese Vereinfachung ist möglich, weil man im voraus sieht, dass bei der Substitution dieser Werthe die erste Gleichung nur $\sin(\lambda t + f)$ und die zweite nur $\cos(\lambda t + f)$ enthält. Diese trigonometrischen Glieder lassen sich dann durch Division aus den Gleichungen entfernen, so dass zwei Beziehungen zwischen den

Constanten $F$, $G$ und $\lambda$ übrig bleiben. Eliminirt man das Verhältniss $F/G$, so erhält man die folgende quadratische Gleichung für $\lambda^2$

$$\begin{aligned}[(A + h^2)\lambda^2 + \{B - C + h(h - c)\}\, n^2 + g(h - c)]\,[(B + h^2)\lambda^2 + \\ + \{A - C + h(h - a)\}\, n^2 + g(h - a)] = \\ = \lambda^2 n^2 \{A + B + 2h^2 - C - ha\}\,\{A + B + 2h^2 - C - hc\}.\end{aligned}$$

Sind $\lambda_1$, $\lambda_2$ die Wurzeln dieser Gleichung, so wird die Bewegung durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p &= F_1 \cos(\lambda_1 t + f_1) + F_2 \cos(\lambda_2 t + f_2) \\ q &= G_1 \sin(\lambda_1 t + f_1) + G_2 \sin(\lambda_2 t + f_2) \end{aligned}\right\}$$

dargestellt, worin $G_1/F_1$, $G_2/F_2$ bekannte Functionen von $\lambda_1$ bez. $\lambda_2$ sind und $F_1$, $F_2$, $f_1$, $f_2$ Constanten bedeuten, die aus den Anfangswerthen von $p$, $q$, $dp/dt$, $dq/dt$ zu bestimmen sind.

Soll die Bewegung stabil sein, so müssen die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung reell und positiv sein. Die Bedingungen dafür lassen sich leicht ausdrücken.

§ 252. **Beispiele.** Beisp. 1. Ein Umdrehungskörper wird mit verticaler Axe auf eine vollkommen rauhe horizontale Ebene gestellt und mit der Winkelgeschwindigkeit $n$ um seine Axe in Rotation gesetzt. Wenn $c$ den Krümmungsradius an der Spitze, $h$ die Höhe des Schwerpunktes, $k$ den Trägheitsradius für die Axe, $k'$ den für eine Axe bezeichnet, die durch die Spitze senkrecht zur Figurenaxe geht, zu zeigen, dass die Lage des Körpers stabil ist, wenn $n > 2\,\dfrac{k'\sqrt{g(h-c)}}{k^2 + hc}$ ist.

Beisp. 2. Ein Ellipsoid berührt mit einem seiner Scheitel eine glatte, horizontale Ebene. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit muss es um die verticale Axe rotiren, wenn das Gleichgewicht stabil sein soll?

*Antwort.* Sind $a$, $b$, $c$ die Halbaxen, $c$ die verticale Axe, so muss die Winkelgeschwindigkeit grösser als

$$\sqrt{\frac{5g}{c}} \cdot \frac{\sqrt{c^4 - a^4} + \sqrt{c^4 - b^4}}{a^2 + b^2}$$

sein. [Puiseux.]

Beisp. 3. Ein Körper von beliebiger Form wird im Gleichgewicht mit dem Punkt $C$ auf eine glatte horizontale Ebene gesetzt, wobei eine Hauptaxe $GC$ für den Schwerpunkt vertical steht, und es wird ihm eine Winkelgeschwindigkeit $n$ um $GC$ mitgetheilt. Wenn ihm nun eine kleine Störung gegeben wird, zu zeigen, dass die harmonischen Perioden sich aus der quadratischen Gleichung

$$(A\lambda^2 + E)(B\lambda^2 + F) = (A + B - C)\, n^2 \lambda^2 + g^2 (\varrho' - \varrho)^2 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta$$

ableiten lassen, in der

$$\begin{aligned} E &= (B - C)\, n^2 + g\{(h - \varrho)\sin^2\vartheta + (h - \varrho')\cos^2\vartheta\}, \\ F &= (A - C)\, n^2 + g\{(h - \varrho)\cos^2\vartheta + (h - \varrho')\sin^2\vartheta\} \end{aligned}$$

ist.

Dabei ist $h$ die Höhe des Schwerpunktes, $\varrho$, $\varrho_1$ die Hauptkrümmungsradien für den Scheitel und $\vartheta$ der Winkel, den die Hauptaxe $GA$ mit der Ebene des Schnittes macht, dessen Krümmungsradius $\varrho$ ist. [Puiseux.]

Beisp. 4. Ein schwerer starrer Körper ruht mit einer ebenen Basis im Gleichgewicht auf dem höchsten Punkte einer rauhen festen Kugel, wobei die Hauptaxe $GC$ für den Schwerpunkt $G$ vertical steht. Er wird um die Axe $GC$ mit der Winkel-

geschwindigkeit $n$ in Rotation gesetzt; man soll die Schwingungsperioden um diese stationäre Bewegung bestimmen.

Im dem allgemeinen Fall ist das Resultat etwas complicirt; es wird einfacher, wenn $A = B$ ist. $p, q, -c$ seien die Coordinaten des Berührungspunktes in Bezug auf im Körper festliegende Axen $GA$, $GB$, $GC$. Es sei $a$ der Radius der Kugel und die Masse des Körpers die Einheit. Man hat dann $p = P \sin \varrho t$, $q = Q \cos \varrho t$, worin $\varrho$ durch

$$\{(A + c^2)\varrho^2 - (g + cn^2)\alpha\}(\varrho^2 - n^2) + gc\varrho^2 = \pm n\varrho\{(C - A - c^2 + ca)(\varrho^2 - n^2) + gc\}$$

bestimmt wird. Ein Factor ist offenbar $\varrho \mp n$.

Sind $\xi$, $\eta$ die Coordinaten des Berührungspunktes in Bezug auf im Raum festliegende Axen, so ist

$$\xi = P \sin(\varrho + n)t, \quad \eta = Q \cos(\varrho + n)t.$$

Beisp. 5. Ein massiver Würfel befindet sich in neutralem Gleichgewicht auf dem Gipfel einer rauhen festen Kugel vom Radius $c$. Er wird nun um eine verticale durch seinen Schwerpunkt gehende Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $n$ in Rotation gesetzt. Man beweise, dass dieser Zustand stationärer Bewegung nur dann stabil ist, wenn $n^2 > (55 + 7\sqrt{70})g/4c$ ist.

In diesem Falle reducirt sich die cubische Gleichung in dem letzten Beispiel auf

$$\varrho^3 + n\varrho^2 - \frac{3}{5}n^2\varrho - \frac{3}{5}(n^2 + g/c)n = 0.$$

Die Wurzeln sind reell, wenn die angegebene Bedingung erfüllt ist.

§ 253. *2. Fall.* Wir wenden uns jetzt zu dem allgemeinen Problem in § 250 zurück und gehen dazu über, *die Schwingungen um den Gleichgewichtszustand bei einem schweren Körper zu besprechen, der auf einer horizontalen rauhen Ebene ruht und dessen Schwerpunkt sich über dem Berührungspunkt befindet.*

Nimmt man an, die Störung sei gering, so sind alle Grössen $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $u$, $v$, $w$ klein. Daher werden bei Vernachlässigung der Quadrate kleiner Grössen die Gleichungen (1) und (2) in § 245 bez.

$$A\omega_1' = \eta Z - \zeta Y, \quad B\omega_2' = \zeta X - \xi Z, \quad C\omega_3' = \xi Y - \eta X \quad \text{. . (I)},$$
$$u' = gp + X, \quad v' = gq + Y, \quad w' = gr + Z \quad \text{. . . (II)}.$$

$\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ seien die Coordinaten des Berührungspunktes in der Gleichgewichtslage und es sei $\xi = \xi_0 + \xi_1$, $\eta = \eta_0 + \eta_1$, $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1$. In den kleinen Gliedern der Gleichung (4) kann man dann $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ statt $\xi$, $\eta$, $\zeta$ setzen. Man erhält mithin, wenn man differenzirt und $X$, $Y$, $Z$, $u$, $v$, $w$ mit Hülfe der Gleichungen (I) und (II) eliminirt,

$$(A + \eta_0^2 + \zeta_0^2)\omega_1' - \xi_0\eta_0\omega_2' - \xi_0\zeta_0\omega_3' = -g(\eta r - \zeta q) \quad \text{. . . (III)}$$

und zwei ähnliche Gleichungen.

$p_0$, $q_0$, $r_0$ seien die Werthe von $p$, $q$, $r$ in der Gleichgewichtslage. Dann ist $\xi_0/p_0 = \eta_0/q_0 = \zeta_0/r_0 = \varrho$, worin $\varrho$ den Radiusvector von $G$ nach dem Berührungspunkt bedeutet. In den kleinen Gliedern der Gleichungen (3) kann man nun $\varrho p_0$, $\varrho q_0$, $\varrho r_0$ statt $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ schreiben. Damit werden die Gleichungen (III) bei Substitution aus der zweiten und dritten Gleichung (3)

$$A\omega_1' = \eta_0\varrho r'' - \zeta_0\varrho q'' - g(\eta r - \zeta q) \quad \text{. . . . . . (IV)}$$

mit zwei ähnlichen Ausdrücken.

Zur Zeit $t$ sei $p = p_0 + x$, $q = q_0 + y$, $r = r_0 + z$. Da nun

$$(p_0 + x)^2 + (q_0 + y)^2 + (r_0 + z)^2 = 1$$

ist, so hat man $p_0 x + q_0 y + r_0 z = 0$. Weil ferner die Gestalt der Fläche be-

kannt ist, so lässt sich $x$, $y$, $z$ durch $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ ausdrücken und auf diese Art $\eta r - \zeta q$, $\zeta p - \xi r$, $\xi q - \eta p$ die Gestalt $-g(\eta r - \zeta q) = Lx + My$ etc. geben.

Die Gleichungen (IV) werden jetzt

$$A\omega_1' = \eta_0 \varrho z'' - \zeta_0 \varrho y'' + Lx + My \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (V)$$

mit zwei ähnlichen.

Differenzirt man die Gleichungen (3) und substituirt für $d\omega_1/dt$, $d\omega_2/dt$, $d\omega_3/dt$ ihren Werth aus (V) und für $z$ und $z''$ aus $p_0 x + q_0 y + r_0 z = 0$, so erhält man Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{array}{l} Fx'' + Gy'' = Hx + Ky \\ F_1 x'' + G_1 y'' = H_1 x + K_1 y \end{array}\right\}.$$

Um sie aufzulösen, setze man $x = P\cos(\lambda t + f)$, $y = Q\cos(\lambda t + f)$, substituire und eliminire die Verhältnisse $P/Q$. Man erhält die folgende quadratische Gleichung für $\lambda^2$

$$\begin{vmatrix} F\lambda^2 + H, & G\lambda^2 + K \\ F_1\lambda^2 + H_1, & G_1\lambda^2 + K_1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (VI).$$

Mit Hülfe der zwischen $x$, $y$, $z$ bestehenden Beziehung kann auf diese Art $x$ sowohl als $y$ und $z$ durch einen Ausdruck von der Form

$$P_1 \cos(\lambda_1 t + f_1) + P_2 \cos(\lambda_2 t + f_2)$$

dargestellt werden.

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (V), so sieht man, dass die Ausdrücke für $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ die Gestalt

$$\Omega_1 + E_1 \cos(\lambda_1 t + f_1) + E_2 \cos(\lambda_2 t + f_2)$$

haben, worin $E_1$, $E_2$ bekannte Functionen von $P_1$, $P_2$, und $\lambda_1$, $\lambda_2$ sind, $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ aber kleine willkürliche Grössen bedeuten. Durch Substitution in die Gleichungen (3) und Gleichsetzung der Coefficienten von $\cos(\lambda_1 t + f_1)$ und $\cos(\lambda_2 t + f_2)$ findet man die Werthe von $E_1$ und $E_2$ ohne Schwierigkeit. Man erkennt auch, dass $\Omega_1/p_0 = \Omega_2/q_0 = \Omega_3/r_0$ sein muss, und dass daher von den drei Grössen $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ in der That nur eine willkürlich ist. Man hat mithin nur fünf willkürliche Constante, nämlich $P_1$, $P_2$, $f_1$, $f_2$ und $\Omega_1$. Sie werden durch die Anfangswerthe von $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $x$ und $y$ bestimmt.

Um die Bewegung der Hauptaxen um die Verticale zu finden, sei $\varphi$ der Winkel, den die Ebene, welche $GC$ und die Verticale enthält, mit der Ebene von $AC$ macht. Zeichnet man sich nun eine Figur für den Normalfall auf, in welchem $p$, $q$, $r$ sämmtlich positiv sind, so sieht man, dass, wenn $\mu$ die Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher sich $GC$ um die Verticale dreht,

$$\mu\sqrt{1 - r^2} = \omega_1 \cos\varphi + \omega_2 \sin\varphi = (p_0\omega_1 + q_0\omega_2)/\sqrt{1 - r_0^2}$$

ist. Substituirt man für $\omega_1$, $\omega_2$, so nimmt $\mu$ die Form

$$\mu = n_3 + N_1 \cos(\lambda_1 t + f_1) + N_2 \cos(\lambda_2 t + f_2)$$

an, worin $n_3$, $N_1$, $N_2$ bekannte Constante sind.

Soll das Gleichgewicht stabil sein, so müssen beide Wurzeln der quadratischen Gleichung (VI) reell und positiv sein. Diese Bedingungen lassen sich leicht ausdrücken.

Sind sie erfüllt, so enthalten die Ausdrücke für $x$, $y$, $z$ nur periodische Glieder und die Neigung der Hauptaxen gegen die Verticale wird mithin nicht merklich geändert. Dagegen *kann* jeder der Ausdrücke für $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ ein nichtperiodisches Glied enthalten und ist dies der Fall, so enthält auch die Geschwindigkeit, mit der sich die Hauptaxen um die Verticale drehen, nichtperiodische Glieder. *Der Körper kann sich daher absatzweise mit langsamer Bewegung um die Normale im Berührungspunkt drehen.* Die Ausdrücke für $u$, $v$, $w$ enthalten nur periodische Glieder, der Körper hat also keine Translationsbewegung im Raum.

*Körper, welche nur in einer Richtung rotiren.* Mit Hülfe der vorstehenden Sätze lässt sich die Eigenschaft erklären, welche viele Celten- und antike Steinbeile besitzen, auf einem horizontalen Tisch stationär nur in einer Richtung zu rotiren. Auf dieses sonderbare Verhalten linsenähnlicher Körper hat zuerst G. T. Walker hingewiesen und eine dynamische Erklärung dafür in dem *Quarterly Journal,* 1896 gegeben. Sir John Evans führte in der Junisitzung der Royal Society 1896 einige solche Körper vor, die sich (die kleinste Axe war vertical) vollkommen gleichmässig drehten, wenn man sie in der einen Richtung rotiren liess, dagegen, in der andern Richtung in Rotation gesetzt, sofort unruhig wurden und zu rotiren aufhörten. Ehe sie jedoch schliesslich zur Ruhe kamen, fingen sie manchmal an, sich in der Richtung zu drehen, die ihrer Anfangsrichtung entgegengesetzt war.

Setzt man nämlich einen Körper auf einen horizontalen Tisch und gibt ihm auf die im 1. Fall, § 251 beschriebene Art eine Rotation, so enthält, wenn die Tangenten an die Krümmungslinien den Hauptaxen parallel sind, die quadratische Gleichung für $\lambda^2$, wie man sieht, nur *grade Potenzen von $n$*. Die Werthe von $\lambda^2$ werden durch eine Aenderung der Drehungsrichtung, d. h. indem man $-n$ statt $n$ schreibt, daher nicht beeinflusst. Der Körper rotirt stationär, wenn er überhaupt rotiren kann, in jeder der beiden Richtungen. Sind aber die Tangenten an die Krümmungslinien den Hauptaxen nicht parallel, so enthält die Gleichung, welche die Werthe von $\lambda^2$ oder $\mu^2$ liefert, auch *ungrade Potenzen von $n$*. Die Gleichung ändert sich also, wenn man das Vorzeichen von $n$ wechselt, und wenn auch bei dem einen Vorzeichen von $n$ alle Perioden reell sind, so kann dies bei dem andern nicht der Fall sein. Die Schwingungen können in der einen Rotationsrichtung permanent sein, während bei der andern reelle Exponentialgrössen auftreten können, deren Gegenwart die Rotation stört. Wird die drehende Bewegung verschwindend klein, so nimmt die Bewegung den Typus einer Schwingung um eine Gleichgewichtslage an. Aus dem 2. Fall in diesem Paragraphen ist ersichtlich, dass eine neue Rotation entstehen kann, die nicht nothwendiger Weise dieselbe Richtung, wie die ursprüngliche Winkelgeschwindigkeit $n$ zu haben braucht.

## Die Bewegung eines Stabes.

§ 254. Ist der Körper, dessen Bewegung bestimmt werden soll, ein Stab, so ist es oft empfehlenswerth, auf die ursprünglichen Bewegungsgleichungen, welche das D'Alembert'sche Princip liefert, zurückzugreifen. Auch die Lagrange'schen Gleichungen lassen sich mit Vortheil benutzen. Das folgende Problem soll diese Methoden erläutern.

Beisp. 1. *Ein gleichförmiger schwerer Stab, welcher mittelst eines Fadens an einem festen Punkt O aufgehängt ist, macht kleine Schwingungen um die Verticale; man bestimme die Bewegung.*

Man nehme $O$ zum Coordinatenanfang; die $z$-Axe werde vertical nach abwärts positiv gerechnet; $2a$ sei die Länge des Stabes, $b$ die Länge des Fadens. Es seien ferner $(l, m, n)$, $(p, q, r)$ die Richtungscosinusse des Fadens und des Stabes. $l, m, p, q$ sind alsdann kleine Grössen, deren Quadrate man vernachlässigen darf, und $n$ und $r$ kann man der Einheit gleichsetzen. $u$ sei der Abstand eines Elementes $du$ des Stabes von dem Ende $A$ des Stabes, an welchem der Faden befestigt ist. $x, y, z$ seien die Coordinaten des Elementes $du$; dann ist

$$x = bl + up, \quad y = bm + uq, \quad z = b + u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

$M$ sei die Masse des Stabes, $MT$ die Spannung des Fadens. Die Gleichungen der Bewegung des Schwerpunktes sind

$$bl'' + ap'' = -Tl, \quad bm'' + aq'' = -Tm, \quad 0 = g - T \quad . \quad . \quad (2),$$

worin die Accente die Differentialquotienten nach der Zeit angeben.

Nach dem D'Alembert'schen Princip ist die Gleichung für die Momente um $x$

$$\Sigma du\,(yz'' - zy'') = \Sigma du\,(yZ - zY) = \Sigma du\,(yg).$$

Nach (1) reducirt sie sich auf

$$\int_0^{2a} du\,\{-(b+u)(bm''+uq'')\} = 2ag\,(bm+aq).$$

Durch Integration erhält man die Gleichung

$$-6ab\,(bm''+aq'') - 6ba^2m'' - 8a^3q'' = 6ag\,(bm+aq),$$

welche sich mit Hülfe von (2) auf

$$3bm'' + 4aq'' = -3gq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zurückführen lässt.

Die vier Bewegungsgleichungen sind daher nach (2) und (3)

$$bl'' + ap'' = -gl, \quad 3bl'' + 4ap'' = -3gp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und zwei ähnliche Gleichungen für $m$, $q$. Die Gl. (4) enthalten weder $m$ noch $q$ und andrerseits kommt in denen für $m$ und $q$ weder $l$ noch $p$ vor. Daraus geht hervor, dass die Schwingungen in der $xz$-Ebene von den Schwingungen in der auf ihr senkrechten $yz$-Ebene nicht beeinflusst werden.

Um die Gleichungen aufzulösen, setze man

$$l = F\sin(\lambda t + \alpha), \quad p = G\sin(\lambda t + \alpha);$$

man erhält

$$b\lambda^2F + a\lambda^2G = gF, \quad b\lambda^2F + \tfrac{4}{3}a\lambda^2G = gG,$$

$$ab\lambda^4 - (4a+3b)\,g\lambda^2 + 3g^2 = 0,$$

woraus sich die Werthe von $\lambda$ ableiten lassen.

§ 255. Um die verschiedenen Methoden miteinander vergleichen zu können, wollen wir die Bewegung auch aus den Lagrange'schen Gleichungen ableiten. In diesem Fall muss die lebendige Kraft $T$ bis auf die *Quadrate* der kleinen Grössen $p$, $q$, $l$, $m$ genau bestimmt werden; man kann daher nicht $r = 1$, $n = 1$ setzen. Da

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1, \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

so ist

$$r = 1 - \tfrac{1}{2}(p^2+q^2), \quad n = 1 - \tfrac{1}{2}(l^2+m^2);$$

die dritte Gleichung in (1) ist daher durch

$$z = bn + ur = b + u - \tfrac{1}{2}b\,(l^2+m^2) - \tfrac{1}{2}u\,(p^2+q^2)$$

zu ersetzen. Man erhält

$$\Sigma m x'^2 = \Sigma m\,(b^2l'^2 + 2bl'p'u + p'^2u^2) = M\Big(b^2l'^2 + 2bl'p'a + \tfrac{4}{3}a^2p'^2\Big).$$

Den Werth von $\Sigma my'^2$ findet man auf ähnliche Art; der von $\Sigma mz'^2$ ist von der vierten Ordnung kleiner Grössen und zu vernachlässigen. Die doppelte lebendige Kraft ist daher

$$2T = b^2(l'^2+m'^2) + 2ab\,(l'p'+m'q') + \tfrac{4}{3}a^2(p'^2+q'^2)$$

und ebenso

$$U = -\tfrac{1}{2}gb\,(l^2+m^2) - \tfrac{1}{2}ga\,(p^2+q^2) + \text{Constante}.$$

Die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'} - \frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial l}$$

wird

$$bl'' + ap'' = -gl$$

und ähnlich

$$bl'' + \tfrac{4}{3}ap'' = -gp.$$

Die Gleichungen stimmen mit den aus dem D'Alembert'schen Princip abgeleiteten überein und ihre Auflösung erfolgt wie zuvor.

Beisp. 2. *Unmögliche Bewegungen.* An den Enden $A$, $B$ und dem Mittelpunkt $C$ eines endlichen Stabes ohne Masse sind drei materielle Punkte von gleicher Masse befestigt. Der Stab ist gezwungen, sich auf der Oberfläche eines glatten, festen und graden Kegels zu bewegen, und an dem System greifen keine äusseren Kräfte an. Wenn irgend welche Anfangsbedingungen gegeben sind, die darauf folgende Bewegung zu finden.

In diesem Problem ist der Stab gezwungen, auf einer Erzeugenden des Kegels zu liegen, es existirt aber kein geometrischer Grund dafür, dass er immer auf derselben Erzeugenden bleiben müsste. Wir werden jetzt beweisen, dass es aus dynamischen Gründen unmöglich ist, dass der Stab von der einen Erzeugenden zur anderen übergeht. Das Beispiel hat A. de Saint-Germain und L. Lecornu in Bd. 114 der *Comptes Rendus,* 1892, gegeben, um das allgemeine Princip zu erläutern, *dass eine geometrisch mögliche Bewegung dynamisch unmöglich sein kann.*

Die Axe des Kegels sei die $z$-Axe, $\alpha$ der halbe Winkel an der Spitze und $r$, $\alpha$, $\varphi$ die Polarcoordinaten von $C$. Ferner sei $2a$ die Länge des Stabes. Benutzt man das Princip der lebendigen Kraft und nimmt die Momente um $Oz$, so wird

$$\left.\begin{aligned} 3r'^2 + (3r^2 + 2a^2)\sin^2\alpha\varphi'^2 &= A \\ (3r^2 + 2a^2)\varphi' &= B \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

worin die Accente die Differentiationen nach der Zeit bedeuten. Da der Schwerpunkt sich so bewegt, als ob alle Kräfte an ihm angriffen, so ergibt sich, wenn $a$ gleich Null gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} 3r'^2 + 3r^2\sin^2\alpha\varphi'^2 &= C \\ 3r^2\varphi' &= D \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Aus den Componenten in der Richtung des Radiusvector erhält man

$$r'' - r\varphi'^2\sin^2\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Die Gleichungen (1), (2) und (3) erfordern, dass entweder $\varphi' = 0$ und $r'$ constant oder $r = 0$ und $\varphi'$ constant sein muss. Wenn sich daher der Mittelpunkt des Stabes nicht in der Spitze des Kegels befindet, so muss sich der Stab mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf derselben Erzeugenden bewegen.

Nimmt man an, der Stab werde so in Bewegung gesetzt, dass $\varphi'$ irgend einen Anfangswerth hat, so kann man darnach fragen, auf welche Weise die Reactionen verhüten, dass er die Erzeugende, auf welche man ihn gelegt hat, verlässt. Die Effectivkräfte der Massenpunkte bei $A$ und $B$ senkrecht zur Ebene $ZOC$ sind

$$\frac{1}{r \pm a}\frac{d}{dt}\{(r \pm a)^2\sin\alpha\varphi'\} = \{2r'\varphi' + (r \pm a)\varphi''\}\sin\alpha.$$

Die Summe ihrer Momente um eine Normale zum Kegel im Punkt $C$ ist $2a^2\varphi''\sin\alpha$. Die Reactionen bei $A$ und $B$ haben, weil sie normal zum Kegel sind, keine Componente senkrecht zur Ebene $ZOC$; dieses Effectivpaar bleibt daher ohne Gegenwirkung. Der Stab *beginnt* also sich *quer* über die Erzeugende $OC$ zu stellen. Die Reactionen machen dann unendlich kleine Winkel mit der Ebene $ZOC$ und werden unendlich gross, so dass ihre Componenten senkrecht zur Ebene ein Paar bilden können, welches dem der Effectivkräfte äquivalent ist.

Mit andern Worten, *es findet eine Stosswirkung zwischen dem Stab und dem Kegel statt* und, wenn sie beendigt ist, bewegt sich der Stab längs einer Erzeugenden.

Man könnte annehmen, der Stab liesse sich dadurch zwingen, auf dem Kegel zu bleiben, dass man den Punkt $C$ sich auf dem Kegel bewegen lässt, während der Stab oder seine Verlängerung durch einen kleinen Ring an der Spitze $O$ geht. In diesem Fall ist jedoch die Reaction an dem Ring, wenn auch senkrecht zum Stab, doch nicht nothwendigerweise normal zur Oberfläche des Kegels. Bei diesem Verfahren behalten die Gleichungen (1) ihre Geltung, während die zweite Gleichung in (2) ungültig wird. Der Widerspruch bleibt jedoch bestehen.

## Beispiele

(den an der Universität und den Colleges gegebenen Examination Papers entnommen).

1. Ein um sein eines Ende beweglicher gleichförmiger Stab bewegt sich so, dass er immer nahezu denselben Winkel $\alpha$ mit der Verticalen macht; man zeige, dass die Zeit einer kleinen Schwingung $2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+3\cos^2\alpha}}$ ist, wenn $a$ die Länge des Stabes bedeutet.

2. Wenn man eine rauhe Ebene, die unter dem Winkel $\alpha$ gegen den Horizont geneigt ist, sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit $n$ um eine Normale $Oz$ drehen lässt und eine Kugel im Zustand der Ruhe auf sie setzt, zu zeigen, dass die Bahn des Centrums der Kugel im Raum eine verlängerte, gemeine oder verkürzte Cycloide ist, je nachdem der Punkt, auf welchen die Kugel Anfangs gesetzt wird, ausserhalb, auf oder innerhalb des Kreises liegt, dessen Gleichung $x^2+y^2=(35g\sin\alpha/2n^2)x$ ist, wobei die Axe $Oy$ horizontal liegt.

Man beachte, dass der Kugel, wenn sie in Ruhe auf die sich bewegende Ebene gesetzt wird, durch die Stossreibungen plötzlich eine Geschwindigkeit mitgetheilt wird.

3. Eine kreisförmige Scheibe, die sich um eine verticale durch ihr Centrum senkrecht zu ihrer Ebene gehende Axe drehen kann, wird mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ in Bewegung gesetzt. Eine rauhe gleichförmige Kugel wird vorsichtig auf irgend einen Punkt der Scheibe gelegt, der aber nicht ihr Mittelpunkt ist; man beweise, dass die Kugel auf der Scheibe einen Kreis beschreibt, und dass die Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{7Mk^2}{7Mk^2+2mr^2}\Omega$ rotirt, worin $Mk^2$ das Trägheitsmoment der Scheibe für ihren Mittelpunkt, $m$ die Masse der Kugel und $r$ den Radius des von ihr beschriebenen Kreises bezeichnet.

4. Eine Kugel wird zwischen zwei vollkommen rauhe parallele Bretter gepresst, die man mit den gleichförmigen Winkelgeschwindigkeiten $\Omega$ und $\Omega'$ um feste auf ihren Ebenen senkrechte Axen rotiren lässt. Man beweise, dass das Centrum der Kugel einen Kreis um eine Axe beschreibt, die mit den Umdrehungsaxen der Bretter in derselben Ebene liegt und deren Abstände von diesen Axen den Winkelgeschwindigkeiten um sie umgekehrt proportional sind.

Man zeige, dass die Berührungspunkte der Bretter, wenn sie sich um dieselbe Axe drehen, auf der Kugel kleine Kreise beschreiben und dass die Tangenten der sphärischen Radien dieser Kreise durch $\frac{c}{a}\cdot\frac{\Omega\sim\Omega'}{\Omega+\Omega'}$ gegeben sind, worin $a$ den Radius der Kugel und $c$ den Radius des von seinem Centrum beschriebenen Kreises bezeichnet. [Math. Tripos, 1861].

5. Ein vollkommen rauher Kreiscylinder liegt fest und seine Axe ist horizontal. Eine Kugel wird in eine Lage unstabilen Gleichgewichtes auf ihn gesetzt

und so fortgeschleudert, dass sich ihr Centrum mit der Geschwindigkeit $V$ parallel zur Axe des Cylinders zu bewegen beginnt. Sie wird nun leicht in einer zur Axe senkrechten Richtung gestört. Wenn $\theta$ den Winkel bezeichnet, den der Radius durch den Berührungspunkt mit der Verticalen macht, zu beweisen, dass zu irgend einer Zeit $t$ die Geschwindigkeit des Centrums parallel zur Axe $V \cos \sqrt{\frac{2}{7}}\,\theta$ ist, und dass die Kugel den Cylinder verlässt, wenn $\cos \theta = \frac{10}{17}$ ist.

6. Eine gleichförmige Kugel steht in Berührung mit der äusseren Oberfläche eines vollkommen rauhen Kegels. An ihrem Centrum greift eine Kraft an, deren Richtung die Axe des Kegels immer rechtwinklig trifft und deren Intensität der dritten Potenz des Abstandes von dieser Axe umgekehrt proportional ist. Man beweise, dass, wenn die Kugel auf die richtige Art in Bewegung gesetzt wird, die von ihrem Centrum beschriebene Bahn jede Erzeugende des Kegels, auf welchem das Centrum liegt, unter demselben Winkel schneidet. Siehe die *Solutions of Cambridge Problems* für 1860, S. 92.

7. Jeder Massenpunkt einer Kugel vom Radius $a$, welche auf einer vollkommen rauhen Kugel vom Radius $c$ liegt, wird von einem Kräftecentrum auf der Oberfläche der festen Kugel mit einer Kraft angezogen, die dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional ist. Wird sie auf das Ende des durch das Kräftecentrum gehenden Durchmessers gelegt, um diesen Durchmesser in Rotation gesetzt und dann leicht verrückt, ihre Bewegung zu bestimmen und zu zeigen, dass der Abstand ihres Mittelpunktes von dem Kräftecentrum, wenn sie die feste Kugel verlässt, eine Wurzel der Gleichung

$$20x^3 - 13(2c + a)x^2 + 7a(2c + a)^2 = 0$$

ist. [Math. Tripos, 1867.]

8. Eine vollkommen rauhe Ebene dreht sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit $n$ um eine in ihr selbst gelegene verticale Axe; eine mit der Ebene in Berührung gebrachte Kugel rollt auf ihr unter der Wirkung der Schwere; man finde die Bewegung.

Die Rotationsaxe werde zur $z$-Axe genommen, die $x$-Axe liege in der Ebene fest. $a$ sei der Radius, $m$ die Masse der Kugel, $F$, $F'$ die Componenten der Reibung parallel der $x$- und $z$-Axe und $R$ die Normalreaction. Die Bewegungen der Axen sind nach § 5 durch $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = n$ gegeben. Die Bewegungsgleichungen (§§ 5, 10) sind

$$u = dx/dt - an, \quad v = xn, \quad w = dz/dt,$$

$$du/dt - vn = F/m, \quad dv/dt + un = R/m, \quad dw/dt = -g + F'/m,$$

$$d\omega_x/dt - n\omega_y = -F'a/k^2, \quad d\omega_y/dt + n\omega_x = 0,$$

$$d\omega_z/dt = Fa/k^2.$$

Da der Berührungspunkt dieselbe Bewegung wie die Ebene hat, so sind die geometrischen Gleichungen

$$u + a\omega_z = 0, \quad w - a\omega_x = 0.$$

Löst man diese Gleichungen auf, so findet man, dass die Kugel nicht herabfällt. Wenn die Kugel von *relativer* Ruhe in einem Punkt der $x$-Axe ausgeht, so ist

$$n^2 z = -g \operatorname{tg}^2 i \{1 - \cos(nt \cos i)\},$$

worin $\sin i = \sqrt{\frac{5}{7}}$. Die Kugel senkt sich daher niemals mehr als um $5g/n^2$ unter ihre ursprüngliche Lage.

9. Eine vollkommen rauhe verticale Ebene rotirt mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit $\mu$ um eine auf ihr senkrechte Axe und auch mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ um eine verticale in ihr liegende Axe, welche die erstere schneidet. Eine schwere gleichförmige Kugel vom Radius $c$ wird in Berührung mit der Ebene gebracht; man beweise, dass die Lage ihres Mittelpunktes zu einer beliebigen Zeit $t$ durch die Gleichungen

$$7\xi'' - 5\Omega^2\xi - 2\mu z' = 0, \quad 7z''' + 2\Omega^2 z' + 2\mu(\xi'' + \Omega^2\xi) = 0$$

bestimmt wird, worin $z$ den Abstand des Centrums von der horizontalen durch die horizontale Rotationsaxe gelegten Ebene und $\xi$ den Abstand von der Ebene angibt, welche die beiden Axen enthält.

Man beweise auch, dass $7u = 7c\Omega + 2\mu b$ und $7v + 2\mu a = 0$ ist, unter $a$ und $b$ die Anfangswerthe von $\xi$ und $z$ und unter $u$ und $v$ die von $d\xi/dt$ und $dz/dt$ verstanden.

10. Ein Reif $AGBF$ dreht sich um seinen Durchmesser $AB$ als feste verticale Axe. $GF$ ist ein horizontaler Durchmesser desselben Kreises, ist ohne Masse und mit dem Kreis fest verbunden. $DC$ ist ein kleinerer concentrischer Reif, der sich um $GF$ als Durchmesser frei drehen kann. Wenn $\Omega$, $\Omega'$, $\omega$, $\omega'$ die grössten und kleinsten Winkelgeschwindigkeiten um $AB$ bez. $GF$ sind, zu beweisen, dass $\Omega \cdot \Omega' = \omega^2 - \omega'^2$ ist.

11. $OA$, $OB$, $OC$ sind die Hauptaxen eines starren Körpers, der sich um einen festen Punkt $O$ in Bewegung befindet. Die Axe $OC$ hat die constante Neigung $\alpha$ gegen eine im Raum festliegende Linie $OZ$ und dreht sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ um sie und die Axe $OA$ liegt stets in der Ebene $ZOC$. Zu beweisen, dass die Axe des Zwangspaares mit $OB$ zusammenfällt und dass das Moment dieses Paares $-(A - C)\,\Omega^2 \sin\alpha \cos\alpha$ ist.

12. Ein Drahtring vom Radius $c$ ruht auf der Spitze einer glatten festen Kugel vom Radius $a$ und wird um den verticalen Durchmesser der Kugel mit der Winkelgeschwindigkeit $n$ in Rotation gesetzt. Wenn der Ring leicht verschoben wird, zu zeigen, dass die Bewegung unstabil ist, wenn $n^2c^4$ kleiner als

$$2g(2a^2 - c^2)\sqrt{(a^2 - c^2)}$$

ist. [Math. Tripos, 1885.]

Da der Ring mit dem Centrum der festen Kugel starr verbunden ist, so kann man ihn als einen Kreisel ansehen, dessen Spitze das Centrum ist. Die Stabilitätsbedingung für einen Kreisel war, wie in § 212 gezeigt wurde, $C^2n^2 > 4Agl$. Setzt man die Werthe von $A$ und $C$ für einen Ring ein, so ergibt sich die Antwort sofort.

13. Ein gleichförmiger grader Kreiskegel von der Masse $M'$ kann sich frei um seine Spitze drehen, welche über einem rauhen horizontalen Tisch befestigt ist, auf welchem eine Kugel von der Masse $M$ und dem Radius $a$ liegt. Der Kegel rollt auf der Kugel, deren Mittelpunkt mit der Geschwindigkeit $V$ einen Kreis vom Radius $b$ beschreibt, dessen Centrum vertical unter der Spitze des Kegels liegt; man beweise, dass bei der stationären Bewegung des Kegels und der Kugel die Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ des Kegels um seine Axe

$$[nab \sin\beta\cos\beta - V(a\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + b\cos\alpha\sin\gamma - b\sin^2\beta)]/[b(b + a\cos\beta)\sin\gamma]$$

ist, und dass eine solche stationäre Bewegung nur dann eintreten kann, wenn

$$V^2k_2^2\cos\alpha + \Omega V b k_1^2 < ghb^2$$

ist, worin $\gamma$ den halben Winkel an der Spitze des Kegels, $\alpha$ die Neigung seiner Axe gegen die Verticale angibt, $\beta = \alpha - \gamma$ ist und $k_1$, $k_2$ die Trägheitsradien des Kegels für seine Axe und eine auf seiner Axe senkrechte und durch seine Spitze

gehende Gerade, $h$ der Abstand des Schwerpunktes des Kegels von seiner Spitze und $n$ die Rotationsgeschwindigkeit der Kugel um die Verticale sind.

[Math. Tripos, 1889.]

14. Eine rauhe Kugel vom Radius $a$ und Trägheitsradius $K$, welche im Stand ist, sich um ihr Centrum zu bewegen, befindet sich Anfangs in Ruhe; eine zweite Kugel von $1/n$ der Masse, dem Radius $b$ und dem Trägheitsradius $k$ wird vorsichtig auf sie gesetzt und hat Anfangs die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um die gemeinschaftliche Normale, welche den spitzen Winkel $\alpha$ mit der nach oben gezogenen Verticalen macht. Man beweise, dass die zweite Kugel nicht abrollt, wenn

$$\omega^2 > \frac{2\mu(a+b)g}{(3\mu+1)b^2}\{(3\mu+1)^2 - 4\mu^2\cos^2\alpha\}\sec\alpha$$

ist, worin $\mu = a^2/nK^2 + b^2/k^2$.

[Math. Tripos, 1888.]

Kapitel VI.

# Die Beschaffenheit der durch lineare Gleichungen gegebenen Bewegung und die Stabilitätsbedingungen.

## Die linearen Differentialgleichungen.

§ 256. In Kap. 3 wurde gezeigt, dass das Problem, die kleinen Schwingungen eines Systems um einen Zustand stationärer Bewegung zu bestimmen, in der That darin besteht, ein entsprechendes System linearer Differentialgleichungen aufzulösen. Dabei war angenommen, die Kräfte hätten ein Potential, wodurch die Differentialgleichungen eine gewisse Symmetrie erhielten, die ihre Auflösung vereinfachte. Diese Einschränkung wollen wir jetzt fallen lassen. *Indem wir die Differentialgleichungen in ihrer allgemeinsten Form nehmen, die constanten Coefficienten jedoch beibehalten, wollen wir kurz alle Besonderheiten ihrer Auflösung besprechen, die Anwendung in der Dynamik finden können.*

Den Hauptgegenstand dieses Kapitels bildet die Bestimmung der Bedingungen, unter denen die ungestörte Bewegung stabil ist. Sie zerfällt in zwei Aufgaben: (1) unter welchen Umständen treten positive Potenzen der Zeit in den Ausdrücken für die Coordinaten auf und welches ist die höchste Potenz, die vorkommt? (2) wenn die Wurzeln der Fundamentalgleichung sich nicht ermitteln lassen, welche Bedingungen müssen die Coefficienten dieser Gleichung erfüllen, damit die Stabilität gesichert sei? Um unsere Bemerkungen über diese beiden Fragen verständlich zu machen, müssen wir vorher einige Sätze zusammenstellen, die freilich eher in die Lehre von den Differentialgleichungen, als in die Dynamik zu gehören scheinen. Die Discussion der ersten Frage beginnt somit erst in § 268, wenngleich sie auch schon früher gestreift wird. Mit der zweiten Frage beschäftigt sich dann der nächste Abschnitt.

§ 257. Unter Beibehaltung der Bezeichnung des § 111 seien $\theta$, $\varphi$, etc. die Coordinaten des Systems. Das System bewege sich auf irgend eine bekannte Art, die durch $\theta = f(t)$, $\varphi = F(t)$, etc. bestimmt wird. Wir nehmen nun an, das System werde in diesem Bewegungszustand ein wenig gestört. Um die darauf folgende Bewegung zu finden,

setzen wir $\theta = f(t) + x$, $\varphi = F(t) + y$, etc. Die Grössen $x$, $y$, etc. sind im ersten Augenblick sehr klein, weil die Störung klein ist. Sie heissen *klein*, wenn es möglich ist, eine Grösse, die numerisch grösser als sie alle ist, so zu wählen, dass ihr Quadrat vernachlässigt werden kann. Diese Grösse wollen wir *die normale Bezugsgrösse für kleine Grössen* nennen.

§ 258. Um zu bestimmen, ob $x$, $y$, etc. klein bleiben, setzen wir diese neuen Werthe von $\theta$, $\varphi$, etc. in die Bewegungsgleichungen ein. Indem wir für den Augenblick annehmen, $x$, $y$, etc. blieben klein, können wir ihre Quadrate vernachlässigen und die sich ergebenden Gleichungen sind daher linear. Die Coefficienten von $x$, $dx/dt$, $d^2x/dt^2$, $y$, $dy/dt$, etc. in diesen Gleichungen sind entweder constant oder Functionen der Zeit. Den Definitionen in § 111 entsprechend, heisst die ungestörte Bewegung in dem ersten Fall stationär.

§ 259. Wir wollen zuerst den Fall betrachten, in dem das System von zwei unabhängigen Coordinaten abhängt oder, wie man wohl auch sagt, zwei Freiheitsgrade hat. Dieser Fall kommt sehr häufig vor und da die Resultate vergleichsweise einfach sind, scheint er eine gesonderte Besprechung zu verdienen. Wir gehen dann zu dem allgemeinen Fall über, in welchem das System eine beliebige Anzahl von Coordinaten hat.

§ 260. **Zwei Freiheitsgrade.** Die Bewegungsgleichungen eines dynamischen Systems, das seine natürlichen Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden vollführt, kann man schreiben:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx + A'\frac{d^2y}{dt^2} + B'\frac{dy}{dt} + C'y = 0 \\ E\frac{d^2x}{dt^2} + F\frac{dx}{dt} + Gx + E'\frac{d^2y}{dt^2} + F'\frac{dy}{dt} + G'y = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Um sie aufzulösen, setzen wir

$$x = \left[A'\frac{d^2}{dt^2} + B'\frac{d}{dt} + C'\right]V, \quad y = -\left[A\frac{d^2}{dt^2} + B\frac{d}{dt} + C\right]V.$$

Diese Annahmen erfüllen offenbar die erste Gleichung für jedes $V$. Substituirt man in die zweite und benutzt der Kürze wegen das Symbol $\delta$ für $\frac{d}{dt}$, so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} A\delta^2 + B\delta + C & A'\delta^2 + B'\delta + C' \\ E\delta^2 + F\delta + G & E'\delta^2 + F'\delta + G' \end{vmatrix} \cdot V = 0.$$

Mittelst dieser Gleichung lässt sich $V$ als Function von $t$ bestimmen. Da $\delta$ in der Determinante in der vierten Potenz auftritt, so enthält der Werth von $V$, wenn er ermittelt ist, vier willkürliche Constante. Daraus findet man mit Hülfe der obigen Formeln sowohl

$x$ als $y$. Man beachte, *dass dazu keine weitere Operation als Differentiation erforderlich ist.* Daher mag $V$ so complicirt sein, als es will, die Werthe von $x$ und $y$ ergeben sich jedenfalls schnell.

§ 261. $\Delta(\delta)$ stelle die Determinante dar, welche der Operator an $V$ ist. Setzt man dann $\Delta(\delta) = 0$, so hat man eine biquadratische Gleichung zur Ermittlung von $\delta$. Sind ihre Wurzeln $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$, so ist, wie man aus den Sätzen über die Integration der Differentialgleichungen weiss,

$$V = L_1 e^{m_1 t} + L_2 e^{m_2 t} + L_3 e^{m_3 t} + L_4 e^{m_4 t},$$

worin $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$ vier willkürliche Constante sind.

Wenn sämmtliche Wurzeln der biquadratischen Gleichung reell und von einander verschieden sind, so ist dies die richtige Form für $V$ Dagegen nimmt $V$ verschiedene andre Formen an, wenn die biquadratische Gleichung complexe oder gleiche Wurzeln besitzt. Sie werden in der Lehre von den Differentialgleichungen untersucht und sind in § 264 zusammengestellt.

§ 262. **Viele Freiheitsgrade.** Die in der Dynamik vorkommenden Gleichungen sind im Allgemeinen von der zweiten Ordnung; da diese Einschränkung jedoch im Folgenden nicht nöthig ist, so wollen wir annehmen, sie enthielten Diffentialquotienten von beliebiger Ordnung.

Es gebe $n$ mit $x$, $y$, $z$, etc. bezeichnete abhängige Variable und eine unabhängige durch $t$ dargestellte. Wenn das Symbol $\delta$ die Differentiation nach $t$ angibt, so lassen sich die $n$ Gleichungen zur Ermittlung von $x$, $y$, etc. schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} f_{11}(\delta)x + f_{12}(\delta)y + f_{13}(\delta)z + \cdots = 0 \\ f_{21}(\delta)x + f_{22}(\delta)y + f_{23}(\delta)z + \cdots = 0 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad = 0 \end{array}\right\} \quad \cdots \quad (1).$$

Um sie aufzulösen, benutzen wir die Analogie, welche zwischen den Regeln für die Combination der Symbole der Differentiation und denen der gewöhnlichen Algebra besteht. Wir lassen für den Augenblick irgend eine Gleichung, sagen wir, die erste weg, lösen die übrigen $n - 1$ Gleichungen nach den Regeln der gewöhnlichen Algebra auf und finden so die Verhältnisse

$$\frac{1}{I_1(\delta)} x = \frac{1}{I_2(\delta)} y = \frac{1}{I_3(\delta)} z = \text{etc.} = V \quad \cdots \quad (2),$$

worin jeder der gleichen Werthe gleich $V$ gesetzt wurde. Dabei wurde der Buchstabe $I$ benutzt, um die Minoren der Determinante

$$\Delta(\delta) = \begin{vmatrix} f_{11}(\delta), & f_{12}(\delta), & f_{13}(\delta), \cdots \\ f_{21}(\delta), & f_{22}(\delta), & f_{23}(\delta), \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots \end{vmatrix} \quad \cdots \quad (3)$$

zu bezeichnen. Der Index an dem Buchstaben $I$ gibt die Nummer der Verticalreihe an, in welcher das Element der ausgelassenen Gleichung liegt, dessen Unterdeterminante verlangt wird.

Setzt man diese Werthe von $x, y, z$, etc. in die vorerst weggelassene Gleichung ein, so erhält man

$$\Delta(\delta) V = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Dies ist eine Gleichung zur Bestimmung einer einzelnen Grösse $V$ als Function von $t$. Man kann $V$ *den Typus der Auflösung* nennen. Nimmt man an, diese Gleichung wäre auf die gewöhnliche Art aufgelöst worden, so findet man die Werthe von $x, y, z$, etc. mittelst der Gleichungen (2). Man erhält so

$$x = I_1(\delta) V, \quad y = I_2(\delta) V, \quad \text{etc.} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Die Operatoren $I_1(\delta)$, $I_2(\delta)$, etc. sind sämmtlich *ganze und rationale Functionen von* $\delta$; *wenn daher* $V$ *einmal bekannt ist, so reduciren sich alle übrigen für die vollständige Auflösung der Gleichungen erforderlichen Operationen auf die eine Operation der fortgesetzten Differentiation.*

§ 263. Diese Art, die Differentialgleichungen (1) aufzulösen, hat den Vortheil, dass die Resultate durch ganze und rationale Functionen des Symbols $\delta$ ausgedrückt werden. Bei seiner Anwendung führt dieses Verfahren, wie man finden wird, zu einer grossen Vereinfachung der Auflösung. Der Typus $V$ kann stets unmittelbar nach den gewöhnlichen Regeln für die Auflösung der Gleichung (4) niedergeschrieben werden. Er ist manchmal sehr complicirt und es kommt dann sehr gelegen, dass man im Stande ist, die Formen von $x, y, z$, etc. abzuleiten, ohne umgekehrte Operationen ausführen zu müssen.

§ 264. **Verschiedene Typen der Auflösung.** Wenn $m_1$, $m_2$, etc. die Wurzeln der Determinantengleichung $\Delta(\delta) = 0$ sind, so ist der Typus $V$, wie bekannt,

$$V = L_1 e^{m_1 t} + L_2 e^{m_2 t} + \cdots \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

worin $L_1, L_2$, etc. willkürliche Constante sind. Kommt ein Paar complexer Wurzeln von der Form $r \pm p\sqrt{-1}$ vor, so ersetzen wir die beiden entsprechenden imaginären Exponentialgrössen durch

$$V = e^{rt}(L \cos pt + M \sin pt) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Treten gleiche Wurzeln auf, so hat der so gegebene Werth von $V$ nicht mehr die volle Anzahl der Constanten. Nehmen wir an, es wären $\alpha$ Wurzeln jede gleich $m$ vorhanden, so ist der Typus der Auflösung, der von diesen Wurzeln abhängt,

$$V = \left(L_0 + L_1 t + \cdots + L_{\alpha-1} t^{\alpha-1}\right) e^{mt} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8),$$

worin die $L$, $\alpha$ willkürliche Constante sind. Man kann $V$ die Form geben

$$V = \left(L_0 + L_1 \frac{\partial}{\partial m} + \cdots + L_{\alpha-1} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial m^{\alpha-1}}\right) e^{mt} \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Hat man $\alpha$ gleiche Paare complexer Wurzeln von der Form $r \pm p\sqrt{-1}$, so ersetzen wir die $\alpha$ Paare von Gliedern durch

$$e^{rt}(L_0 \cos pt + M_0 \sin pt) + \frac{\partial}{\partial r} e^{rt}(L_1 \cos pt + M_1 \sin pt) + \text{etc.} \qquad (10).$$

Darin kann man die Differentiation nach $r$ durch eine solche nach $p$ ersetzen.

Der Fall gleicher Wurzeln hat das Besondere, dass Terme auftreten, die Potenzen von $t$ als Factor enthalten. Das Vorkommen von $\alpha$ gleichen Wurzeln zeigt im Allgemeinen das Auftreten von Gliedern an, die alle ganzen Potenzen von $t$ bis $t^{\alpha-1}$ enthalten.

§ 265. Um die entsprechenden Werthe von $x$, $y$, etc. aus diesen Typen abzuleiten, hat man, wenn keine gleichen Wurzeln vorkommen, mit einer ganzen und rationalen Function von $\delta$, wie z. B. $I(\delta)$, an einer reellen oder imaginären Exponentialgrösse zu operiren.

I. Es besteht der Satz

$$I(\delta)\, e^{mt} = I(m)\, e^{mt};$$

wenn daher die Wurzeln der Gleichung $\varDelta(\delta) = 0$ sämmtlich reell und ungleich sind, so folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} x &= L_1 I_1(m_1) e^{m_1 t} + L_2 I_1(m_2) e^{m_2 t} + \text{etc.},\\ y &= L_1 I_2(m_1) e^{m_1 t} + L_2 I_2(m_2) e^{m_2 t} + \text{etc.},\\ z &= \text{etc.} \end{aligned}$$

II. Wenn $X$ irgend eine Function von $t$ ist, so besteht der Satz

$$I(\delta) e^{rt} X = e^{rt} I(\delta + r) X;$$

wenn daher ein Paar complexer Wurzeln vorkommt und wir an dem Product aus einer reellen Exponentialgrösse und einem Sinus oder Cosinus zu operiren haben, so können wir sofort die reelle Exponentialgrösse entfernen und den Operator auf fortgesetzte Differentiation des Sinus oder Cosinus reduciren.

III. Es besteht der Satz $f(\delta^2) \sin mt = f(-m^2) \sin mt$; hat man daher mit $F(\delta)$ zu operiren, so geben wir dem Operator die Form $\varphi(\delta^2) + \delta\psi(\delta^2)$. Wir erhalten dann $F(\delta) \sin mt = \varphi(-m^2) \sin mt + \psi(-m^2) m \cos mt$.

§ 266. Wenn die Determinantengleichung $\varDelta(\delta) = 0$ gleiche Wurzeln besitzt, so haben wir an Ausdrücken zu operiren, welche Potenzen von $t$ enthalten. Da aber die Operatoren $d/dt$ und $\partial/\partial m$ oder $\partial/\partial r$ unabhängig sind, so können wir den Satz benutzen

$$I(\delta) \frac{\partial^k}{\partial m^k} e^{mt} = \frac{\partial^k}{\partial m^k} \{I(m) e^{mt}\}.$$

Wenn z. B. die Gleichung $\varDelta(\delta) = 0$, $\alpha$ Wurzeln hat, von denen jede gleich $m$ ist, so kann man der durch die Gleichungen (5) und (9) in §§ 262, 264 gegebenen Auflösung die Form geben

$$x = L_0 [I_1(m) e^{mt}] + L_1 \frac{\partial}{\partial m} [I_1(m) e^{mt}] + \cdots + L_{\alpha-1} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial m^{\alpha-1}} [I_1(m) e^{mt}],$$

$$y = L_0 [I_2(m) e^{mt}] + L_1 \frac{\partial}{\partial m} [I_2(m) e^{mt}] + \cdots + L_{\alpha-1} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial m^{\alpha-1}} [I_2(m) e^{mt}],$$

$z = \text{etc.}$

§ 267. Beisp. 1. Wenn es zwei Wurzeln der Determinantengleichung $\Delta(\delta) = 0$ gibt, von denen jede gleich $m$ ist, durch eine wirklich ausgeführte Vergleichung der verschiedenen Terme zu zeigen, dass man dieselben Auflösungen für $x$, $y$, etc. erhält, ob man nun die Minoren der ersten oder die Minoren irgend einer andern Horizontalreihe der Determinanten $\Delta(\delta)$ als Operatoren benutzt.

Beisp. 2. Die Werthe von $x$, $y$, etc. erhält man dadurch aus $V$, dass man mit gewissen Functionen von $\delta$, nämlich $I_1(\delta)$, $I_2(\delta)$ etc. operirt. Wenn man statt dieser Operatoren $\mu I_1(\delta)$, $\mu I_2(\delta)$, etc. benutzt, worin $\mu$ eine Function von $\delta$, wie z. B. $\mu = f(\delta)$, ist, zu zeigen, dass in Folge dessen sich nur die willkürlichen Constanten $L_0$, $L_1$, etc. ändern. Daraus leite man ab, dass die Lösungen die nämlichen bleiben, ob gleiche Wurzeln vorhanden sind oder nicht, welches System erster Unterdeterminanten von $\Delta(\delta)$ man auch als Operatoren benutzen mag.

§ 268. **Ein unbestimmter Fall.** Wie wir gezeigt haben, sind die Werthe von $x$, $y$, etc., wenn die Wurzeln der Determinantengleichung $\Delta(\delta) = 0$ mit $m_1$, $m_2$, etc. bezeichnet werden, durch

$$x = \Sigma L I_1(m) e^{mt}, \quad y = \Sigma L I_2(m) e^{mt}, \quad \text{etc.}$$

gegeben.

*Man sieht aber sofort, dass ein Fall existirt, in welchem wir im Stich gelassen werden.* Wenn eine der Wurzeln der Gleichung $\Delta(\delta) = 0$ alle Minoren $I_1(m)$, $I_2(m)$, etc. zu Null macht, so wird die Auflösung unvollständig, weil eine der Constanten, die wir $L$ genannt haben, aus der Auflösung verschwindet. Wenn alle Minoren nur einer Horizontalreihe verschwinden, so lassen sich die Werthe von $x$, $y$, $z$, etc. dadurch ermitteln, dass man zu Operatoren die Unterdeterminanten einer andern Horizontalreihe wählt. Dies ist aber nicht möglich, *wenn alle Minoren aller Horizontalreihen Null sind.*

§ 269. Wir wollen nun beweisen, dass dieser unbestimmte Fall nur dann eintreten kann, wenn die Determinantengleichung $\Delta(\delta) = 0$ gleiche Wurzeln hat. Zu diesem Zweck differenziren wir Gleichung (3), § 262 und erhalten

$$\frac{\partial \Delta(\delta)}{\partial \delta} = I_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial \delta} + I_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial \delta} + \text{etc.} + I_{21} \frac{\partial f_{21}}{\partial \delta} + \text{etc.},$$

worin der Buchstabe $I$ den Minor desjenigen Elementes der Determinante $\Delta(\delta)$ bezeichnet, welches durch den Index angegeben wird. Wir sehen, dass die rechte Seite der Gleichung verschwindet, wenn alle ersten Minoren Null sind. Die Gleichung $\Delta(\delta) = 0$ muss daher mindestens zwei gleiche Wurzeln besitzen. Auf dieselbe Art lässt sich zeigen, dass, wenn die zweiten Minoren ebenfalls sämmtlich Null sind, jeder erste Minor zwei gleiche Wurzeln und die ursprüngliche Gleichung daher drei gleiche Wurzeln hat und so fort.

§ 270. Wir merken zwei an sich klare Ergebnisse. (1) Wenn alle ersten Minoren einer Determinante dieselbe Wurzel $\alpha$-mal haben, so hat die Determinante selbst die Wurzel wenigstens $\alpha + 1$-mal. (2) Wenn eine Determinante $r$ gleiche Wurzeln hat und ihre sämmtlichen ersten, zweiten, etc. Unterdeterminanten für diese Wurzeln verschwinden, so hat jeder der ersten Minoren die gleiche Wurzel $r - 1$-mal, jeder der zweiten $r - 2$-mal und so fort.

§ 271. Als Beispiel wollen wir die **Lagrange**'sche Determinante zur Ermittlung der Perioden kleiner Schwingungen eines Systems um eine Gleichgewichtslage betrachten, § 57. Nimmt man an, die Determinante habe zwei gleiche Wurzeln, so lässt sich nach § 266 erwarten, dass jede Coordinate des Systems ein Glied von der Form $(A + Bt)e^{mt}$ hat. Die Amplitude der Schwingung enthält daher Potenzen der Zeit.

Nach § 61 enthält auch jeder erste Minor der **Lagrange**'schen Determinante diese Wurzel, die Auflösung in § 266 lässt uns daher im Stich. Demgemäss werden wir in § 273 finden, dass die Lösung keine Potenzen der Zeit enthält, dass aber die unabhängigen Constanten sich in andrer Art ordnen, die man passend durch einen doppelten Typus der Lösung darstellen kann. Man sehe auch § 281.

§ 272. Wir wollen jetzt das folgende allgemeine Problem betrachten:

*Die Determinante $\Delta(\delta)$ habe $\alpha$ Wurzeln, von denen jede gleich $m$ ist. Es mögen $\beta$ dieser Wurzeln jeden ersten Minor von $\Delta(\delta)$ zu Null machen und $\gamma$ der letzteren jeden zweiten Minor u. s. f. Man soll die allgemeine Form der Lösung finden und erklären, wie sich die $\alpha$ Constanten in dieser Lösung ermitteln lassen.*

**Lösung mit einem einfachen Typus.** Zuerst wollen wir die $\alpha$ Wurzeln betrachten, die gleich $m$ sind. In § 266 wurde bewiesen, dass der Theil der Lösung, der von ihnen abhängt, sich in der Form schreiben lässt

$$x = L_0[I_1(m)e^{mt}] + L_1\frac{\partial}{\partial m}[I_1(m)e^{mt}] + \cdots + L_{\alpha-1}\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial m^{\alpha-1}}[I_1(m)e^{m}]$$

und ähnlich für $y$, $z$, etc.

Sind diese ersten Unterdeterminanten endlich, so enthalten diese Formeln Potenzen der Zeit von $t^0$ bis $t^{\alpha-1}$ und liefern so die $\alpha$ Constanten, welche zu den $\alpha$ gleichen Wurzeln gehören. Wenn die ersten Minoren $\beta$ Wurzeln haben, die gleich $m$ sind, so verschwinden $I_1(m)$, $I_2(m)$, etc. und ihre Differentialquotienten aufwärts bis zum $(\beta-1)$ten. In diesem Fall reichen die Potenzen von $t$ nur bis zur $t^{\alpha-\beta-1}$-ten und die obigen Formeln liefern daher nicht die vollständige Zahl von Constanten.

Wenn alle ersten Unterdeterminanten die Wurzel $\alpha$-mal und alle zweiten $\beta$-mal besitzen, so kann $\alpha - \beta - 1$, wie aus § 270 bekannt ist, nicht negativ sein.

§ 273. **Die Lösung mit einem doppelten Typus.** Um die richtige Form für $x$, $y$, $z$, etc. zu finden, wenn alle ersten Minoren Null sind, kehren wir zu der Analogie zwischen Operationen und Grössen zurück, von der in § 262 die Rede war. Wir lassen jetzt zwei beliebige

von den Gleichungen (1) unberücksichtigt, z. B. die beiden ersten, lösen die übrigen $n-2$ Gleichungen auf, drücken auf diese Art alle Coordinaten $z$, $u$, etc. durch $x$ und $y$ aus und erhalten so eine Reihe von Gleichungen, welche die Gestalt haben

$$z = \varphi(\delta)x + \psi(\delta)y,$$

worin die Functionssymbole thatsächlich zweite Minoren der Determinante $\varDelta(\delta)$ sind. Wir substituiren nun diese Ausdrücke für $z$, $u$, etc. in die beiden weggelassenen Gleichungen. Diesen beiden Gleichungen wird genügt, wenn $x$ und $y$ irgend welche Werthe haben, die $I(\delta)x = 0$ und $I(\delta)y = 0$ machen, worin $I(\delta)$ irgend ein erster Minor von $\varDelta(\delta)$ ist.

Wir bemerken ferner, dass diesen beiden Gleichungen durch die *gesonderten* Theile der Werthe von $z$, $u$, etc. genügt wird, die von $x$ und von $y$ herrühren. Man kann daher die Auflösung so anordnen, dass man diese beiden Theile getrennt aufsucht und die Resultate schliesslich addirt. Die folgende Methode empfiehlt sich für die Praxis.

Sind die ersten Unterdeterminanten sämmtlich Null, so lasse man eine der gegebenen Differentialgleichungen (1) bei Seite, z. B. die erste. Man hat nun $n-1$ Gleichungen zur Bestimmung der $n$ Coordinaten. Setzt man in diesen Gleichungen $y = 0$, so erhält man $x$, $z$, etc. durch einen einfachen Typus $\xi$ ausgedrückt, wobei $\xi$ der Gleichung $I_2(\delta)\xi = 0$ genügt. $I_2$ stellt hier den Minor des zweiten Elementes der ersten Zeile der Determinante $\varDelta(\delta)$ dar. Wir schreiben die so gefundene Auflösung in der Form

$$x = J_{21}(\delta)\xi, \quad y = 0, \quad z = J_{23}(\delta)\xi, \quad \text{etc.},$$

worin die Operatoren *die zweiten Unterdeterminanten* der Elemente in den ersten beiden Zeilen von $\varDelta(\delta)$ sind. Setzt man dann weiter $x = 0$ statt $y = 0$ in den Gleichungen, die auf die erste folgen, so erhält man eine zweite Auflösung, in welcher $x$, $z$, etc. durch einen zweiten einfachen Typus $\eta$ ausgedrückt sind. Darin genügt $\eta$ der Gleichung $I_1(\delta)\eta = 0$, wobei $I_1$ der Minor des ersten Elementes der ersten Zeile von $\varDelta(\delta)$ ist. Wir geben der so gefundenen Lösung die Form

$$x = 0, \quad y = J_{12}(\delta)\eta, \quad z = J_{13}(\delta)\eta, \quad \text{etc.}$$

Addirt man die beiden Auflösungen, so erhält man die folgenden Werthe von $x$, $y$, $z$, etc.

$$x = J_{21}(\delta)\xi, \quad \eta = J_{12}(\delta)\eta, \quad z = J_{23}(\delta)\xi + J_{13}(\delta)\eta, \quad \text{etc.}$$

Sie genügen offenbar allen Gleichungen mit Ausnahme der einen, die bei Seite gelassen wurde. Aber auch dieser Gleichung genügen sie, weil nach der Voraussetzung nur solche Theile dieser Auflösungen genommen werden, welche alle ersten Minoren zu Null machen.

Die Typen $\xi$, $\eta$ haben dieselben Exponentialgrössen, nur mit verschiedenen Constanten, die Operatoren aber sind andre. Man nehme z. B. an, die Determinante $\varDelta(\delta)$ habe nur zwei Wurzeln, die

gleich $m$ sind, und diese machten jeden ersten Minor von $\Delta(\delta)$ zu Null. Die Glieder von $x$, $y$, $z$, etc., welche von den übrigen, von $m$ verschiedenen, Wurzeln abhängen, findet man einzeln aus ihren eigenen Exponentialgrössen nach der in § 262 für einen einzelnen Typus angegebenen Methode. Die Glieder von $x$, $y$, $z$, etc. dagegen, welche von der Wurzel $m$ abhängig sind, werden dadurch ermittelt, dass man $\xi = L_1 e^{mt}$, $\eta = L_2 e^{mt}$ setzt, worin $L_1$ und $L_2$ zwei verschiedene willkürliche Constante sind. Die Theile der Lösung, welche von den letzteren herrühren, sind bezüglich

$$x = L_1 J_{21}(m) e^{mt}, \quad y = 0, \quad z = L_1 J_{23}(m) e^{mt}, \quad \text{etc.},$$

$$x = 0, \quad y = L_2 J_{12}(m) e^{mt}, \quad z = L_2 J_{13}(m) e^{mt}, \quad \text{etc.},$$

worin $J_{ab}$ eine zweite Unterdeterminante ist, welche sich aus $\Delta(\delta)$ dadurch ableiten lässt, dass man die $a^{\text{te}}$ und $b^{\text{te}}$ Verticalreihe und die beiden ersten Horizontalreihen weglässt und der so übrig bleibenden zweiten Unterdeterminante ihr richtiges Vorzeichen gibt. Der Index 2 kommt bei jedem $J$ in der ersten Zeile der obigen Gleichungen und der Index 1 bei jedem $J$ in der zweiten vor.

Die vollständige von der Wurzel $m$ herrührende Auflösung ist die Summe dieser beiden partiellen. Man beachte, dass die beiden willkürlichen Constanten $L_1$, $L_2$ in den Werthen von $x$, $y$, $z$, etc. so auftreten, dass die Exponentialgrösse $e^{mt}$ von zwei willkürlichen Constanten statt von einer begleitet ist und diese nicht durch das Vorkommen von Potenzen von $t$ getrennt werden.

§ 274. Wenn die Minoren, denen die Typen $\xi$ und $\eta$ genügen müssen, die Wurzel $\delta = m$, $\beta$-mal besitzen, so hat man demnach

$$\xi = \left(G_0 + G_1 t + \cdots + G_{\beta-1} t^{\beta-1}\right) e^{mt},$$

$$\eta = \left(H_0 + H_1 t + \cdots + H_{\beta-1} t^{\beta-1}\right) e^{mt}.$$

Die entsprechenden Werthe von $x$, $y$, etc. findet man durch Substitution; sie können in der Form geschrieben werden

$$x = G_0[J_{21}(m)e^{mt}] + G_1 \frac{\partial}{\partial m}[J_{21}(m)e^{mt}] + \cdots + G_{\beta-1} \frac{\partial^{\beta-1}}{\partial m^{\beta-1}}[J_{21}(m)e^{mt}],$$

und ähnlich für $y$, etc.

Das Besondere der Lösungen, die aus dem doppelten Typus $\xi$, $\eta$ abgeleitet werden, besteht darin, dass die entsprechenden Glieder in den Ausdrücken für $x$ und $y$ *unabhängige Constante* haben.

Wenn die zweiten Unterdeterminanten, welche die Operatoren bilden, sämmtlich endlich sind, so enthalten diese Formeln Potenzen von $t$ bis zu $t^{\beta-1}$ und liefern $2\beta$ Constante.

Haben die zweiten Unterdeterminanten aber $\gamma$ Wurzeln gleich $m$, so erstrecken sich die Potenzen von $t$ nur bis $t^{\beta-\gamma-1}$ und die volle Anzahl der Constanten ist dann nicht gefunden worden.

§ 275. **Lösung mit einem dreifachen Typus.** Wir haben drittens die Lösung zu finden, wenn die zweiten Unterdeterminanten ebenso wie die ersten Null sind. In diesem Fall wird die eben gefundene Lösung wieder unzureichend. Um die richtigen Formen von $x$, $y$, $z$, etc. zu finden, lassen wir jetzt drei beliebige von den Differentialgleichungen (1) des § 262 bei Seite und verfahren im Weiteren wie zuvor. Wir erhalten so $n-3$ Gleichungen für die $n$ Coordinaten. Man erkennt sofort, dass man alle Coordinaten durch drei beliebige ausdrücken kann, z. B. $x$, $y$, $z$. Man hat dann dreimal so viele willkürliche Constanten, als Wurzeln vorkommen, die gleich $m$ sind.

Auf dieselbe Art, wie vorher, lässt sich die Lösung durch einen dreifachen Typus $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ausdrücken. Setzt man $y$ und $z$ gleich Null, so findet man die übrigen Coordinaten $x$, $u$, etc. in Ausdrücken eines einfachen Typus $\xi$. Nimmt man dagegen $x$ und $z$ (statt $y$ und $z$) in diesen $n-3$ Gleichungen gleich Null, so erhält man eine zweite Lösung, die von einem andern einfachen Typus $\eta$ abhängt. Schliesslich ergibt sich eine dritte von $\zeta$ abhängige Lösung, wenn man $x$ und $y$ Null gleichsetzt. Addirt man diese drei Lösungen, so findet man, dass sich alle Coordinaten mittelst Operatoren ausdrücken lassen, die thatsächlich die dritten Minoren der Determinante $\Delta(\delta)$ sind. Die Gegenstände der Operation sind die drei unabhängigen Functionen $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Sie sind derart, dass man, wenn $I(\delta)$ einer der zweiten Minoren der Elemente der drei weggelassenen Gleichungen ist, $I(\delta)\xi=0$, $I(\delta)\eta=0$, $I(\delta)\zeta=0$ hat. Wenn die letzteren die Wurzel $\delta=m$, $\gamma$-mal enthalten, so wird jede der drei Functionen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ durch eine Reihe von der Form

$$(K_0+K_1t+\cdots+K_{\gamma-1}t^{\gamma-1})e^{mt},$$

aber mit unabhängigen Constanten, ausgedrückt.

§ 276. **Die Anzahl der Constanten.** Jede der Gruppen von Werthen der $x$, $y$, etc. in den §§ 272, 273, 275 ist selbstverständlich *eine Lösung*. Die vollständige Lösung ist in Wirklichkeit die Summe dieser partiellen Lösungen, vorausgesetzt, dass sie die richtige Anzahl von Constanten hat. Es scheint übrigens, als ob wir zu viel Constante hätten. Wir müssen sie daher untersuchen und entscheiden, welche Glieder absolut Null sind und welche sich in den verschiedenen partiellen Lösungen wiederholen.

Wir beginnen mit der Lösung, die aus dem Typus $V$, § 272, mittelst der ersten Minoren abgeleitet wurde. Da die ersten Unterdeterminanten $\beta$ Wurzeln haben, die gleich $m$ sind, so verschwinden, wie man leicht sieht, die ersten $\beta$ Glieder in jedem der Ausdrücke für $x$, $y$, etc. Man nehme die aus irgend einem Ausdruck $L_k$ abgeleitete Lösung, wobei $k$ zwischen $\beta-1$ und $2\beta$ liegt. In dem Fall der Variablen $x$ und $y$ haben die Ausdrücke die Form

$$(A_0+A_1t+\cdots A_{k-\beta}t^{k-\beta})e^{mt}.$$

Sie sind offenbar sämmtlich in den aus $\xi$, $\eta$ mit Hülfe der zweiten Minoren abgeleiteten Ausdrücken enthalten. Die entsprechenden Terme in $z$, $u$, etc. müssen auf die Glieder in $x$, $y$ mittelst der Formel in § 273 bezogen werden und sind daher ebenfalls in der aus $\xi$, $\eta$ abgeleiteten Reihe enthalten. Schliesslich nehme man die Auflösung, die sich aus den Gliedern von $L_{2\beta}$ an bis $L_{\alpha-1}$ ergibt. In ihnen treten Potenzen von $t^{\beta}$ bis $t^{\alpha-1-\beta}$ auf. Diese $\alpha-2\beta$ Terme befinden

sich nicht unter den von $\xi$ und $\eta$ abgeleiteten Termen und liefern $\alpha - 2\beta$ willkürliche Constante.

Zweitens betrachten wir die aus dem doppelten Typus $\xi, \eta$ mit Hülfe der zweiten Minoren abgeleitete Lösung (§§ 273 und 274). Jeder dieser zweiten Minoren hat $\gamma$ Wurzeln, von denen jede gleich $m$ ist. Daher ergibt sich, wenn man so schliesst, wie vorher, dass die ersten $\gamma$ Glieder der Reihen für $x$ und $y$ Null sind, und dass die höchste Potenz von $t$ statt die $(\beta - 1)^{te}$ die $(\beta - 1 - \gamma)^{te}$ ist. Folglich erstrecken die Terme der Reihe, welche aus dem einfachen Typus $V$ sich ergeben und nicht in den aus dem doppelten Typus $\xi, \eta$ abgeleiteten eingeschlossen sind, ihre Potenzen von $t$ jetzt von $t^{\beta - \gamma}$ bis $t^{\alpha - 1 - \beta}$. Es gibt daher $\alpha - 2\beta + \gamma$ solche Terme anstatt $\alpha - 2\beta$.

Dieselbe Schlussweise lässt sich auf alle andern partiellen Lösungen anwenden, die von dreifachen und höheren Typen abgeleitet sind. *Wir folgern daraus, dass die partielle Lösung, welche aus einem einfachen Typus durch Operiren mit den ersten Minoren der ersten Horizontalreihe der Fundamentaldeterminante abgeleitet ist, $\alpha - 2\beta + \gamma$ Terme liefert, die nicht in den folgenden Lösungen enthalten sind. Sie geben ebensoviele willkürliche Constante. Die partielle Lösung, welche aus einem doppelten Typus durch Operiren mit den zweiten Minoren der beiden ersten Horizontalreihen der Fundamentaldeterminante abgeleitet ist, liefert $\beta - 2\gamma + \delta$ Terme, die nicht in den folgenden Lösungen eingeschlossen sind. Sie geben doppelt so viele Constante. Die von einem dreifachen Typus durch Operiren mit den dritten Minoren der drei ersten Horizontalreihen abgeleitete partielle Lösung ergibt $\gamma - 2\delta + \varepsilon$ Terme und dreimal so viele Constante u. s. f. Man nehme z. B. an, die vierten Minoren seien nicht alle gleich Null, so wird die Anzahl der Constanten, welche jede der verschiedenen partiellen Lösungen liefert, durch die Glieder der Reihe*

$$(\alpha - 2\beta + \gamma) + 2(\beta - 2\gamma + \delta) + 3(\gamma - 2\delta) + 4\delta$$

*angegeben.*

Wenn keines der Glieder dieser Reihe negativ wird, so haben wir eine Reihe partieller Lösungen erhalten, welche die richtige Anzahl der Constanten enthält. Diesen Punkt wollen wir im Folgenden besprechen.

§ 277. Wenn eine Determinante die Wurzel grade $\alpha$-mal, wenn die ersten Minoren der beiden ersten Elemente der beiden ersten Horizontalreihen die Wurzel grade $\beta$-mal enthalten und der zweite Minor dieser vier Elemente grade $\gamma$-mal, so ist $\alpha - 2\beta + \gamma$ positiv.

Um dies zu beweisen, sei $\Delta$ die Determinante, $I_1, I_2, J_1, J_2$ die vier ersten Minoren, $\Delta_2$ der zweite Minor. Wie wir wissen, ist dann $\Delta \Delta_2 = I_1 J_2 - I_2 J_1$, die linke Seite enthält die Wurzel grade $\alpha + \gamma$-mal, die rechte Seite wenigstens $2\beta$-mal. Daher ist $\alpha + \gamma - 2\beta$ positiv.

Auf dieselbe Art und unter ähnlichen Annahmen lässt sich zeigen, dass $\beta - 2\gamma + \delta$ positiv ist u. s. f.

§ 278. Beispiel. Man integrire die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} (\delta - 1)^2(\delta + 1)x - (\delta - 1)(\delta - 2)y + (\delta - 1)z &= 0 \\ 3(\delta - 1)^2 x - (\delta - 1)(\delta - 3)y + 2(\delta - 1)z &= 0 \\ (\delta - 1)^2 x + (\delta - 1)y + (\delta - 1)z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Die Fundamentaldeterminante (§ 262) ist $\Delta(\delta) = -(\delta - 1)^6$. Sie hat (§ 271) sechs gleiche Wurzeln ($\alpha = 6$), jeder erste Minor besitzt die Wurzel dreimal ($\beta = 3$) und jeder zweite einmal ($\gamma = 1$). Der Theil der Auflösung, der von einem einzelnen Typus abhängt (§ 276) liefert $\alpha - 2\beta + \gamma$ (d. h. eine) Constante. Sie begleiten die höchsten Potenzen von $t$, die in dem Typus vorkommen, eine

Constante für jede Potenz (§ 272). Der Theil der Lösung, der von einem doppelten Typus abhängt, liefert $2(\beta - 2\gamma)$ d. h. zwei Constante. Sie begleiten die höchsten Potenzen von $t$, die in *diesem* Typus vorkommen, zwei Constante für jede Potenz. Der Theil der Lösung, der von einem dreifachen Typus abhängt, liefert $3\gamma$ (d. h. drei) Constante, die wieder die höchsten Potenzen von $t$ begleiten, drei Constante für jede Potenz. Um die volle Anzahl der Constanten zu erhalten, braucht man bei diesem Beispiel nur die eine höchste Potenz von $t$, die in jedem Typus vorkommt, beizubehalten.

Der einzelne Typus ist, nach § 264, $\xi = (\text{etc.} + At^5)e^t$. Nimmt man die Minoren der ersten Horizontalreihe von $\Delta(\delta)$, so erhält man, nach § 262,

$$x = -(\delta - 1)^3\xi, \quad y = -(\delta - 1)^3\xi, \quad z = \delta(\delta - 1)^2\xi.$$

Um den Theil der Lösung zu finden, der von einem doppelten Typus abhängt, lassen wir die erste Gleichung weg (§ 373). Setzt man $x = 0$, so findet man $y = (\delta - 1)\xi$, $z = -(\delta - 1)\xi$, worin $(\delta - 1)^3\xi = 0$. Setzt man $y = 0$, so ergibt sich $x = (\delta - 1)\eta$, $z = -(\delta - 1)^2\eta$, worin $(\delta - 1)^3\eta = 0$ ist. Der doppelte Typus ist daher $\xi = (\text{etc.} + Bt^2)e^t$, $\eta = (\text{etc.} + Ct^2)e^t$. Die Werthe der Coordinaten sind $x = (\delta - 1)\eta$, $y = (\delta - 1)\xi$, $z = -(\delta - 1)\xi - (\delta - 1)^2\eta$.

Um ferner den Theil der Lösung zu finden, der von einem dreifachen Typus abhängt, verwerfen wir die beiden ersten Gleichungen (§ 275). Die drei partiellen Lösungen sind dann *erstens* $x = 0$, $y = 0$, $z = De^t$, *zweitens* $x = 0$, $y = Ee^t$, $z = 0$, *drittens* $x = Fe^t$, $y = 0$, $z = 0$. Ihre Summe ist die aus dem dreifachen Typus abgeleitete Lösung.

Wenn man die Lösungen, welche aus allen verschiedenen Typen abgeleitet sind, addirt und die Constanten vereinfacht, so wird

$$x = (F + Ct + At^2)e^t, \quad y = (E + Bt + At^2)e^t, \quad z = \{D - Bt - A(t^2 + 2t)\}e^t.$$

§ 279. *Wir wollen umgekehrt annehmen, eine Lösung, wie die in § 276 beschriebene, sei gegeben und untersuchen, welche Minoren Null sein müssen.*

Es sei gegeben, dass in der Lösung Terme vorkommen, die von einem dreifachen Typus abhängen, der $\gamma - 1$ Potenzen von $t$ enthält, die von unabhängigen Constanten in irgend welchen drei Coordinaten begleitet sind. Setzt man zwei beliebige dieser Coordinaten gleich Null, so werden die Differentialgleichungen durch eine Lösung befriedigt, die von einem einfachen Typus abhängt. Wir haben daher $n$ Gleichungen, die $n - 2$ Coordinaten enthalten und sämmtlich durch Werthe der Coordinaten befriedigt werden, in denen Potenzen von $t$ aufwärts bis zur $(\gamma - 1)^{\text{ten}}$ vorkommen. Daraus folgt, dass alle zweiten Minoren, die sich aus diesen Gleichungen bilden lassen, Null sein müssen und dass jeder dieser Minoren die Wurzel $\gamma$-mal enthalten muss.

Daraus schliessen wir nach § 270, dass jede erste Unterdeterminante die Wurzel $\gamma + 1$-mal enthalten muss. Wir wollen aber annehmen, die gegebene Lösung enthalte auch Terme, die von einem doppelten Typus abgeleitet sind, welche Potenzen von $t$ aufwärts bis zur $(\beta - \gamma - 1)$ten mit unabhängigen Constanten in irgend zwei der Coordinaten haben. Auf dieselbe Art, wie zuvor, findet man, dass jeder erste Minor die Wurzel $(\beta - \gamma - 1)$-mal haben muss. Sie sind zu den bereits gefundenen $\gamma + 1$ Wurzeln hinzuzufügen, weil man die gegebenen Lösungen, welche aus den doppelten und dreifachen Typen abgeleitet sind, als solche ansehen kann, die von ungleichen Wurzeln abhängen und diese Wurzeln dann in der Grenze gleich machen kann. Daraus folgt, dass jeder erste Minor die Wurzel $\beta$-mal hat.

Aus § 270 schliessen wir, dass die Determinante (4) in § 261 die Wurzel $\beta + 1$-mal haben muss. Wenn aber die gegebene Lösung auch Terme enthält, die aus einem einzelnen Typus mit Potenzen von $t$ bis zur $(\alpha - \beta - 1)$ ten abgeleitet

sind, so ergibt sich schliesslich auf die obige Art, dass die Determinante (4) die Wurzel $\alpha$-mal haben muss.

§ 280. Als Zusatz zu dieser Theorie bemerken wir, dass die Lösung keine Terme enthalten kann, in denen die hohen Potenzen von $t$ von einem vielfacheren Typus abhängen, als die niedrigen Potenzen von $t$. Wenn z. B. der Term $t^n e^{mt}$ von $k$ unabhängigen Constanten begleitet vorkommt, so muss er der Theil einer Lösung sein, die von einem $k$-fachen Typus abgeleitet ist. Daraus folgt, dass alle geringeren Potenzen von $t$, die mit derselben Exponentialgrösse multiplicirt werden, Theile desselben Typus sind und von wenigstens $k$ unabhängigen Constanten begleitet sein müssen.

§ 281. **Unter welcher Bedingung fehlen alle Potenzen von $t$?** *In einigen dynamischen Problemen gibt es bekanntlich, obwohl die Fundamentaldeterminante $\alpha$ gleiche Wurzeln hat, in der Auflösung doch keine Terme mit Potenzen von $t$. Wir können jetzt bestimmen, unter welchen Bedingungen dieser Fall eintritt.*

Aus § 272 ist ersichtlich, dass sich aus den ersten Minoren, wenn jeder von ihnen die Wurzel nicht wenigstens $\alpha - 1$-mal hat, eine Lösung ableiten lässt, welche Potenzen von $t$ in dem Coefficienten hat, die grösser als Null sind. Ebenso geben die zweiten Minoren, wenn jeder die Wurzel nicht wenigstens $\alpha - 2$-mal hat, eine Lösung mit Potenzen von $t$ in dem Coefficienten. *Daraus schliessen wir, dass, wenn $\alpha$ gleiche Wurzeln in der Determinante vorkommen und die Terme in der Lösung mit $t$ als Factor fehlen sollen, es dazu nöthig sowohl als ausreichend ist, dass alle ersten, zweiten, etc. Minoren aufwärts bis zum $(\alpha - 1)$ten Null sind.*

§ 282. **Dynamischer Sinn der Typen.** Wir wollen nun untersuchen, auf welche Art die drei verschiedenen Typen der Auflösung in § 264 verschiedene Arten der Bewegung anzeigen. Beginnen wir mit einer reellen Wurzel. In diesem Fall hat jede Coordinate einen Term von der Form $Me^{mt}$. *Wenn $m$ positiv ist,* so wird dieser Term mit der Zeit immer grösser und das System entfernt sich daher weit von seinem ungestörten Zustand und unsere Gleichungen stellen daher nur die Art dar, auf welche das System seinen Weg beginnt. *Ist $m$ negativ,* so verschwindet dieser Term nach und nach und die Bewegung hängt schliesslich von den übrigen Termen in der Lösung ab.

Aehnliche Bemerkungen gelten immer dann, wenn eine reelle Exponentialgrösse vorkommt, mag sie nun mit einer trigonometrischen Function multiplicirt sein oder nicht. Wir können daher das allgemeine Princip aufstellen, welches nur im Fall gleicher Wurzeln, den wir sofort besprechen werden, gewissen Einschränkungen unterworfen ist, dass nämlich *die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen für die Stabilität darin bestehen, dass die reellen Wurzeln und die reellen Theile der complexen Wurzeln sämmtlich negativ oder Null sein müssen.* Ein einfaches Verfahren, um zu bestimmen, ob dies der Fall ist oder nicht, wird in dem zweiten Abschnitt dieses Kapitels angegeben werden.

§ 283. **Die Wirkung gleicher Wurzeln auf die Stabilität.** Wenn es gleiche Wurzeln in der Determinantengleichung gibt, so enthält die Lösung, wie wir gesehen haben, im Allgemeinen Terme mit Potenzen von $t$ als Factor. Es kommt nun darauf an, die Wirkung dieser Terme auf die Stabilität des Systems zu bestimmen. Wenn $m$ positiv ist, so macht das Auftreten eines Terms $Mt^q e^{mt}$ selbstverständlich das System unstabil. Ist dagegen $m$ negativ, so kann dieser Term numerisch nie grösser als $M\left(\frac{q}{em}\right)^q$ werden. Wenn $m$ sehr klein ist, so kann das anfängliche Wachsen des Terms die Werthe von $x$, $y$, etc. gross werden lassen und die Bewegung kann nicht als kleine Schwingung angesehen werden. Wird aber das System nicht so gestört, dass $M\left(\frac{q}{em}\right)^q$ gross ist, so verschwindet schliesslich der Term und die Bewegung kann als stabil angesehen werden. Ist $m$ durchaus imaginär und gleich $n\sqrt{-1}$, so nimmt dieser Term die Form $t^q \sin nt$ an und macht selbstverständlich das System unstabil.

*Gleiche Wurzeln stören daher die Stabilität nicht, wenn ihre reellen Theile negativ sind, machen das System aber unstabil, wenn ihre reellen Theile Null oder positiv sind.*

§ 284. Aus dem Vorstehenden geht hervor, dass der ganze Charakter der Bewegung von der Beschaffenheit der Wurzeln der Determinantengleichung $\Delta(\delta) = 0$ abhängt. Kann man diese Gleichung lösen und die Wurzeln auffinden, so kennen wir selbstverständlich sofort die Natur der Bewegung. Kann dies aber nicht geschehen, so muss man die Theorie der Gleichungen zu Hülfe nehmen, um zu bestimmen, ob die Wurzeln reell oder complex sind und ob gleiche Wurzeln existiren oder nicht. Bei Gleichungen höherer Ordnung sind die Theoreme von Fourier und Sturm zu empfehlen, bei vielen dynamischen Problemen jedoch hat man es mit nur zwei Coordinaten zu thun und daher die Wurzeln der biquadratischen Gleichung in § 260 zu untersuchen.

Regeln, nach welchen die Auflösung einer biquadratischen Gleichung von der Auflösung einer cubischen Gleichung abhängig gemacht wird, werden zwar in den meisten Lehrbüchern über die Theorie der Gleichungen gegeben; da diese Methode für die Anwendung jedoch unbequem ist, so wollen wir hier eine andre Lösung zum Gebrauch bei späteren Problemen kurz mittheilen. Die Kriterien der Beschaffenheit der Wurzeln der biquadratischen Gleichung sind sehr bequem in Art. 68 der *Theory of Equations* von Burnside und Panton, 1886, zusammengestellt.

§ 285. **Die Auflösung der biquadratischen Gleichungen.** Die Gleichung sei

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

und die Invarianten daher

$$I = ae - 4bd + 3c^2 \quad \text{und} \quad J = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Die letztere kann man auch als Determinante schreiben. Im Allgemeinen wird es vortheilhaft sein, die Gleichung von dem zweiten Glied zu befreien. Die so umgeformte Gleichung sei

$$a\xi^4 - 2aH\xi^2 + aG\xi - aF = 0,$$

worin $a^2H = 3(b^2 - ac)$ und $a^3G = 4(2b^3 - 3abc + a^2d)$ ist. Wenn man die Invarianten benutzt, oder die Transformation wirklich ausführt, findet man leicht

$$I = \frac{1}{3}a^2H - a^2F \quad \text{und} \quad J = \frac{4}{27}a^3H^3 - \frac{1}{16}a^3G^2 - \frac{1}{3}aIH.$$

Ist $\Delta$ die Discriminante, d. h. $\Delta = I^3 - 27J^2$, so hat die biquadratische Gleichung, wie in allen Lehrbüchern über die Theorie der Gleichungen bewiesen wird, wenn $\Delta$ negativ oder Null ist, zwei reelle und zwei complexe Wurzeln. Ist $\Delta$ positiv und nicht Null, so sind die Wurzeln entweder sämmtlich reell oder sämmtlich complex.

Welcher der beiden letzteren Fälle vorliegt, lässt sich in der Regel dadurch entscheiden, dass man feststellt, ob die Gleichung eine reelle Wurzel hat oder nicht. Haben z. B. $a$ und $e$ entgegengesetzte Vorzeichen, so ist eine Wurzel und mithin alle reell. Jedenfalls kann man das folgende Kriterium benutzen. Man befreit die gegebene biquadratische Gleichung von ihrem zweiten Glied und schreibt das Resultat in der Form $(\xi^2 - H)^2 + G\xi = K$.

Wenn $S_n$ das arithmetische Mittel der $n^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln ist, so folgt aus dem Newton'schen Theorem über die Summen von Potenzen, $S_1 = 0$, $S_2 = H$, $4S_3 = -3G$ und $K = S_4 - S_2^2$. Wenn alle Wurzeln reell sind, so ist $S_2$ positiv und nach einem bekannten Satz aus der Theorie der Ungleichheiten $S_4$ grösser als $S_2^2$. Daher sind $H$ und $K$ positiv. Wenn alle Wurzeln complex und gleich $r \pm p\sqrt{-1}$, $-r \pm q\sqrt{-1}$ sind, so ist

$$H = S_2 = r^2 - \frac{1}{2}(p^2 + q^2),$$

$$K = S_4 - S_2^2 = \frac{1}{4}(p^2 - q^2)^2 - 2r^2(p^2 + q^2).$$

Ist $H$ positiv oder Null, so wird, wie man sieht, $K$ negativ. Man kann daher das Kriterium so fassen: *Wenn $H$ sowohl als $K$ positiv ist, so sind die vier Wurzeln reell; wenn dagegen eins von beiden negativ oder Null ist, so sind die vier Wurzeln complex.*

*Ist die Determinante $\Delta$ Null, $I$ und $J$ aber nicht,* so hat bekanntlich die biquadratische Gleichung zwei gleiche Wurzeln. Sind zwei Wurzeln reell und gleich und die beiden andern complex, so muss, wie sich ergibt, indem man $q = 0$ setzt, $K$ negativ sein, wenn $H$ positiv oder Null ist. Das Kriterium besteht daher darin: *Wenn $H$ sowohl als $K$ positiv ist, so sind alle Wurzeln reell, wenn dagegen $H$ oder $K$ negativ oder Null ist, so sind zwei Wurzeln reell und zwei complex.* Ist $G$ Null, so existiren zwei Paare gleicher Wurzeln. In diesem Fall ist $K$ Null und die Wurzeln sind sämmtlich reell, wenn $H$ positiv, dagegen sämmtlich complex, wenn $H$ negativ ist.

*Schliesslich sei die Discriminante $\Delta$ Null und $I$ sowohl als $J$ ebenfalls.* Die biquadratische Gleichung hat dann drei gleiche Wurzeln und die sämmtlichen Wurzeln sind daher reell. Ist auch $H$ Null, so sind alle vier Wurzeln gleich und reell.

Beisp. Die Discriminante einer biquadratischen Gleichung ist positiv; man entferne das Glied, welches die dritte Potenz enthält, auf die gewöhnliche Art und alsdann das mit der ersten Potenz willkürlich. Wenn die beiden Wurzeln der so gebildeten quadratischen Gleichung reell sind und die Summe der Wurzeln positiv ist, so sind die sämmtlichen vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung reell. Wenn beide Bedingungen nicht zutreffen, so sind die vier Wurzeln complex.

## Die Stabilitätsbedingungen.

§ 286. Wie gezeigt wurde, lässt sich die Bestimmung der Schwingung eines Systems auf die Lösung einer gewissen Determinantengleichung zurückführen, die in § 262 durch $\Delta = f(\delta) = 0$ dargestellt wurde. In vielen Fällen ist ihre Lösung nicht auszuführen und kann mithin die Bewegung nicht genau gefunden werden. Wenn wir uns jedoch nur davon überzeugen wollen, ob die Gleichgewichtslage oder die stationäre Bewegung, um welche sich das System in Schwingung befindet, stabil ist oder unstabil, so kann dies auch ohne Auflösung der erwähnten Gleichung geschehen.

Wie aus § 282 erhellt, bestehen die Stabilitätsbedingungen darin, dass die reellen Wurzeln und die reellen Theile der complexen negativ sein müssen.

Wir wollen im Folgenden eine Methode besprechen, welche die Frage, ob die Wurzeln derart sind oder nicht, entscheidet.

§ 287. Nehmen wir vorerst an, es handle sich um eine biquadratische Gleichung, welche die Form habe

$$f(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$$

und worin $z$ für $\delta$ gesetzt wurde. Wir wollen die bekannte symmetrische Function der Wurzeln bilden, welche das Product der Summen der Wurzeln ist, wenn man je zwei zusammennimmt. Das Product möge $X/a^3$ heissen, man findet[1])

1) Man kann den Werth von $X$ auf verschiedene mehr oder weniger elementare Art ermitteln. Substituirt man $z = E \pm Z$ in die gegebene Gleichung vierten Grades und setzt die graden und ungraden Potenzen von $Z$ gleich Null, so wird

$$aZ^4 + (6aE^2 + 3bE + c)Z^2 + aE^4 + bE^3 + cE^2 + dE + e = 0,$$

$$(4aE + b)Z^3 + (4aE^3 + 3bE^2 + 2cE + d)Z = 0$$

und, wenn man die Wurzel $Z = 0$ verwirft und $Z$ eliminirt,

$$64a^3E^6 + \cdots + bcd - ad^2 - eb^2 = 0,$$

worin nur das erste und die letzten Glieder beibehalten wurden, weil wir die übrigen für den vorliegenden Zweck nicht nöthig haben. Da $z = E \pm Z$, so ist offenbar jeder Werth von $E$ das arithmetische Mittel zwischen zwei Werthen von $z$. Wir haben eine Gleichung sechsten Grades für $E$, weil es sechs verschiedene Arten giebt, auf die sich die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung zu je zweien combiniren lassen. Das Product der Wurzeln der Gleichung für $E$ kann man auf die gewöhnliche Art aus dem ersten Glied und dem letzten ableiten und daraus ergibt sich dann der Werth von $X$, wie er im Text angegeben wurde.

Hätte man $E$ eliminirt, so würde man eine Gleichung für $Z$ erhalten haben, deren Wurzeln die arithmetischen Mittel der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, wenn man je zwei zusammenstellt. Setzt man $4Z^2 = \zeta$, so erhält man durch ein einfaches Verfahren die Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(z) = 0$ sind.

$$X = bcd - ad^2 - eb^2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ b & 0 & d \\ c & d & 2e \end{vmatrix}.$$

Es empfiehlt sich, zuerst den Fall zu untersuchen, in welchem $X$ endlich ist. Nehmen wir an, wir wüssten, dass die Wurzeln complex sind, z. B. $\alpha \pm p\sqrt{-1}$ und $\beta \pm q\sqrt{-1}$, so ist

$$X/a^3 = 4\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2 + (p+q)^2\}\{(\alpha+\beta)^2 + (p-q)^2\}.$$

$\alpha\beta$ nimmt daher stets dasselbe Vorzeichen an, wie $X/a$ und $\alpha+\beta$ wie $-b/a$. Die Vorzeichen von $\alpha$ und $\beta$ können daher bestimmt werden und wenn $a, b, X$ gleiche Vorzeichen haben, so sind die reellen Theile der Wurzeln negativ.

Man nehme nun weiter an, zwei Wurzeln seien reell und zwei complex. Man setze $q'\sqrt{-1}$ für $q$, so dass also die Wurzeln $\alpha \pm p\sqrt{-1}$ und $\beta \pm q'$ sind und findet

$$X/a^3 = 4\alpha\beta\{[(\alpha+\beta)^2 + p^2 - q'^2]^2 + 4p^2q'^2\}.$$

Ebenso wie vorher hat $\alpha\beta$ das nämliche Vorzeichen wie $X/a$ und $\alpha+\beta$ wie $-b/a$. Ferner stimmt das Vorzeichen von $\beta^2 - q'^2$ mit dem des letzten Gliedes $e/a$ der Gleichung vierten Grades überein. Daraus ergibt sich, ob $\beta$ numerisch grösser oder kleiner als $q'$ ist. Wenn daher $a, b, e$ und $X$ dasselbe Vorzeichen haben, so sind die reellen Wurzeln und die reellen Theile der complexen sämmtlich negativ.

Schliesslich seien die Wurzeln sämmtlich reell. Wenn alle Coefficieuten positiv sind, so müssen, wie aus der Descartes'schen Regel bekannt ist, die Wurzeln sämmtlich negativ sein und alle Coefficienten können nicht positiv sein, wenn alle Wurzeln nicht negativ sind. In diesem Fall muss $X/a$, da $X$ das Product der Summen der zu je zweien zusammengenommenen Wurzeln ist, offenbar positiv sein.

Die Wurzeln mögen beschaffen sein, wie sie wollen, jedenfalls muss die biquadratische Gleichung, wenn die reellen Wurzeln und die reellen Theile der complexen negativ sind, das Product von Factoren zweiten Grades sein, deren sämmtliche Glieder positiv sind. Für die Stabilität ist es daher nothwendig, dass jeder Coefficient der biquadratischen Gleichung dasselbe Vorzeichen hat. Es ist auch klar, dass kein Coefficient der Gleichung Null werden darf, wenn nicht entweder eine reelle Wurzel verschwinden oder zwei imaginäre gleich und entgegengesetzt werden sollen.

Fasst man die eben bewiesenen Resultate zusammen, so ergibt sich, dass, *wenn $X$ und $e$ endlich sind, die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, unter denen die reellen Wurzeln und die reellen Theile der complexen negativ sind, darin bestehen, dass jeder Coefficient der biquadratischen Gleichung und auch $X$ dasselbe Vorzeichen haben muss.*

§ 288. Der Fall, in welchem $X = 0$ ist, bietet keine Schwierigkeit dar. Aus der Definition von $X$ folgt, dass, wenn $X$ verschwindet, zwei Wurzeln gleich sein und entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen, und dass umgekehrt $X$ verschwinden muss, wenn dieser Fall eintritt. Setzt man $-z$ an Stelle von $z$ in der biquadratischen Gleichung und subtrahirt das Resultat von der ursprünglichen Gleichung, so findet man $bz^3 + dz = 0$. Die gleichen und entgegengesetzten Wurzeln sind daher $z = \pm\sqrt{-d/b}$. Haben $b$ und $d$ entgegengesetzte Vorzeichen, so sind diese Wurzeln reell und die eine positiv, die andre negativ. Haben $b$ und $d$ dasselbe Vorzeichen, so sind sie ein Paar imaginärer Wurzeln.

Die Summe der beiden andern Wurzeln ist $-b/a$ und ihr Product $be/ad$. Daraus ergibt sich nun: *Wenn $X = 0$ ist, so sind die reellen Wurzeln und die reellen Theile der complexen negativ oder Null, falls jeder Coefficient der biquadratischen Gleichung endlich ist und dasselbe Vorzeichen hat.*

§ 289. Verschwindet entweder $a$ oder $e$, so reducirt sich die Gleichung vierten Grades auf eine solche dritten Grades (siehe die Anm. zu § 105). Setzt man $e = 0$, so wird

$$X/a^3 d = bc - ad.$$

Wenn alle Coefficienten dasselbe Vorzeichen haben, so muss, wenn Stabilität bestehen soll, wie man leicht sieht, $bc - ad$ positiv oder Null sein.

Sind $a$ und $e$ nicht Null und verschwindet einer der beiden Coefficienten $b$ oder $d$, so muss auch der andre verschwinden, denn sonst könnte $X$ nicht dasselbe Vorzeichen wie $a$ haben. In diesem Fall wird $X = 0$ und die biquadratische Gleichung reducirt sich auf die quadratische

$$az^4 + cz^2 + e = 0.$$

Da sie leicht aufzulösen ist, so bietet dieser Fall in der Praxis keine Schwierigkeit. Für die Stabilität ist es nöthig, dass die Wurzeln der quadratischen Gleichung reell und negativ seien. Die Bedingungen dafür bestehen darin, dass *erstens* alle Coefficienten $a$, $c$, $e$ dasselbe Vorzeichen haben müssen und *zweitens*, dass $c^2 > 4ae$ sein muss.

§ 290. **Die Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades.** Ist der Grad der Gleichung höher als der vierte, so werden die Stabilitätsbedingungen zahlreicher. Eine einfache Regel soll nun bewiesen werden, nach welcher man diese Bedingungen ebenso schnell berechnen als niederschreiben kann. Ausserdem haben wir vor, diese Regel zu verallgemeinern und dadurch *zu bestimmen, wie viele reelle Wurzeln oder complexe vorhanden sind, deren reelle Theile positiv sind.* Kommen solche Wurzeln nicht vor, so wird angenommen, dass die Stabilitätsbedingungen erfüllt sind. Auch die Anzahl der Wurzeln, deren reelle Theile Null sind, wird ermittelt werden.

§ 291. Um diese Regel aufzufinden, nehmen wir ein Theorem Cauchy's zu Hülfe. Es sei $z = x + y\sqrt{-1}$ irgend eine Wurzel und $x$ und $y$ mögen die auf rechtwinklige Axen bezogenen Coordinaten eines Punktes sein. Man substituire $x + y\sqrt{-1}$ für $z$, und es sei

$$f(z) = P + Q\sqrt{-1}.$$

Irgend ein Punkt, dessen Coordinaten solche Werthe haben, dass $P$ sowohl als $Q$, verschwinden, möge ein *Nullpunkt* heissen. Man beschreibe irgend eine geschlossene Curve, lasse einen Punkt in positiver Richtung diesen geschlossenen Weg durchwandern und beobachte, wie oft $P/Q$ durch den Werth Null geht und sein Zeichen wechselt. Nehmen wir an, es gehe $\alpha$-mal von $+$ zu $-$ und $\beta$-mal von $-$ zu $+$ über. Cauchy behauptet dann, die Anzahl der Nullpunkte innerhalb des geschlossenen Weges sei $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Nöthig ist jedoch, dass kein Nullpunkt auf dem geschlossenen Weg liege.

Wir wollen als geschlossenen Weg den unendlich grossen Halbkreis annehmen, der den Raum auf der positiven Seite der $y$-Axe begrenzt. Wir wollen zuerst von $y = -\infty$ bis $y = +\infty$ auf seinem Umfang fortschreiten. Wenn

$$f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

ist, so erhält man durch Uebergang zu Polarcoordinaten

$$f(z) = p_0 r^n (\cos n\theta + \sin n\theta\sqrt{-1}) + \cdots$$

und daher

$$\left.\begin{aligned} P &= p_0 r^n \cos n\theta + p_1 r^{n-1} \cos(n-1)\theta + \cdots \\ Q &= p_0 r^n \sin n\theta + p_1 r^{n-1} \sin(n-1)\theta + \cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2).$$

In der Grenze wird, da $r$ unendlich gross ist, $P/Q = \operatorname{cotg} n\theta$. $P/Q$ verschwindet, wenn

$$\theta = \pm\frac{1}{n}\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3}{n}\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{5}{n}\frac{\pi}{2} \quad \ldots \ldots \quad (A);$$

$P/Q$ ist unendlich gross, wenn

$$\theta = 0,\ \pm\frac{2}{n}\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{4}{n}\frac{\pi}{2} \quad \ldots \ldots \quad (B).$$

Die Werthe von $\theta$ in der Reihe (B) *trennen* die in der Reihe (A).

Ist $\theta$ klein und sehr wenig grösser als Null, so ist $P/Q$ positiv und geht daher von $+$ zu $-$ bei jedem der Werthe von $\theta$ in der Reihe (A) über. Ist also $n$ grade, so gibt es $n$ Zeichenwechsel.

Wenn $n$ ungrade ist, so hat man $n-1$ Wechsel mit Ausschluss von $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$; in diesem Fall ist $P/Q$ positiv, wenn $\theta$ etwas kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ und negativ, wenn $\theta$ etwas grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist; jedoch haben wir dies in der Folge nicht nöthig.

Wir wollen nun längs der $y$-Axe auf dem geschlossenen Weg weiter wandern, immer in der positiven Richtung von $y = +\infty$ bis $y = -\infty$. Substituirt man $z = x + y\sqrt{-1}$ in (1) und bedenkt, dass längs der $y$-Axe $x = 0$, so erhält man, *wenn n grade ist,*

$$\left.\begin{aligned} P &= p_n - p_{n-2}y^2 + p_{n-4}y^4 - \cdots + (-1)^{\frac{1}{2}n} p_0 y^n \\ Q &= p_{n-1}y - p_{n-3}y^3 + \cdots - (-1)^{\frac{1}{2}n} p_1 y^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

und daraus

$$-\frac{P}{Q} = \frac{p_0 y^n - p_2 y^{n-2} + \cdots}{p_1 y^{n-1} - p_3 y^{n-3} + \cdots} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Ist $e$ der Ueberschuss der Anzahl von Zeichenwechseln von — zu + über die von + zu — in *diesem* Ausdruck, wenn man von $y = +\infty$ zu $y = -\infty$ übergeht, dann ist nach dem Cauchy'schen Theorem die ganze Anzahl Nullpunkte auf der positiven Seite der $y$-Axe $\frac{1}{2}(n+e)$. Dadurch wird selbstverständlich die Anzahl von Wurzeln, deren reelle Theile positiv sind, ausgedrückt.

§ 292. Zum Zählen dieser Zeichenwechsel benutzen wir das Sturm'sche Theorem. Wir nehmen

$$\left.\begin{aligned} f_1(y) &= p_0 y^n - p_2 y^{n-2} + \cdots \\ f_2(y) &= p_1 y^{n-1} - p_3 y^{n-3} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

und suchen den grössten gemeinschaftlichen Factor von $f_1(y)$ und $f_2(y)$, indem wir bei jedem Rest, der übrig bleibt, das Vorzeichen wechseln. Die Reihe so abgeänderter Reste sei $f_3(y)$, $f_4(y)$, etc. Dann lässt sich, wie bei dem Sturmschen Theorem, zeigen, dass, wenn irgend eine dieser Functionen verschwindet, die beiden ihr zur Seite stehenden entgegengesetzte Vorzeichen haben. Es ergibt sich auch, dass zwei aufeinander folgende Functionen nur dann verschwinden können, wenn $f_1(y)$ und $f_2(y)$ einen gemeinschaftlichen Factor haben. Diesen Ausnahmsfall werden wir sofort untersuchen.

Nimmt man nun die Functionen $f_1(y)$, $f_2(y)$ etc. und behandelt sie, wie in dem Sturm'schen Theorem, so sieht man, dass ein Zeichenwechsel nur an *einem Ende der Reihe* verloren oder gewonnen werden kann. Die letzte Function ist aber eine Constante und kann das Zeichen nicht ändern, daher können Zeichenwechsel nur durch das Verschwinden der Function $f_1(y)$ an dem Anfang der Reihe gewonnen oder verloren werden.

Indem wir nun den Anfang der Reihe von Functionen $f_1(y)$, $f_2(y)$, etc. betrachten und sie auf die Sturm'sche Art behandeln, möge $y$ von $+\infty$ zu $-\infty$ fortschreiten. Man sieht, dass ein Zeichenwechsel verloren geht, wenn die beiden ersten von ungleichen zu gleichen Vorzeichen übergehen, d. h., wenn das Verhältniss von $f_1(y)$ zu $f_2(y)$ das — mit + vertauscht. Ebenso wird ein Zeichenwechsel gewonnen, wenn das Verhältniss von + zu — übergeht. Daher ist $e$ der Anzahl von Zeichenwechseln gleich, die bei dem Fortschreiten von $y = +\infty$ zu $y = -\infty$ in der Reihe verloren werden.

§ 293. Ist $y = \pm\infty$, so brauchen wir nur die Coefficienten der höchsten Potenzen in der Reihe von Functionen $f_1(y)$, $f_2(y)$, etc. zu betrachten. Diese Coefficienten mögen, wenn $y$ positiv ist, $p_0$, $p_1$, $q_3$, $q_4$, etc. heissen.

Ist $y$ negativ, so werden die Vorzeichen, da $n$ grade ist, durch $p_0$, $-p_1$, $q_3$, $-q_4$, etc. angegeben. Wir haben nun eben bewiesen, dass $e$ der bei dem Uebergang von der ersten Reihe zur zweiten verlorenen Anzahl von Zeichenwechseln gleich ist.

§ 294. Wenn jedes Glied der Reihe $p_0$, $p_1$, $q_3$, etc. dasselbe Vorzeichen hat, so werden offenbar $n$ Zeichenwechsel gewonnen; es ist daher $e = -n$ und $e$ kann nur dann $= -n$ sein, wenn diese sämmtlichen Glieder dasselbe Vorzeichen haben. In diesem Fall existirt kein Nullpunkt auf der positiven Seite der $y$-Axe. Daraus ergibt sich das folgende Theorem. *Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, unter welchen der reelle Theil einer jeden Wurzel der Gleichung* $f(z) = 0$ *negativ ist, bestehen darin, dass alle Coefficienten der höchsten Potenzen in der Reihe* $f_1(y)$, $f_2(y)$, *etc. dasselbe Vorzeichen haben müssen*[1]).

---

1) Da dies auch die Stabilitätsbedingungen in der Dynamik sind (§ 282), so lohnt es sich, in Kürze darzustellen, wie sich die obigen Betrachtungen diesem

§ 295. Nehmen wir zunächst an, diese Coefficienten hätten nicht alle dasselbe Vorzeichen. Da die Gleichung vom $n^{ten}$ Grad ist, so sind $n+1$ Functionen in der Reihe $f_1(y)$, $f_2(y)$, etc. und daher im Ganzen $n$ Wechsel und Folgen vorhanden. Es mögen $k$ Wechsel und $n-k$ Folgen sein. Jede Folge nun in der Reihe $y=+\infty$ verwandelt sich in einen Wechsel in der Reihe $y=-\infty$ und jeder Wechsel in eine Folge. Daraus folgt, dass $n-k$ Wechsel und $k$ Folgen in der zweiten Reihe vorkommen. Daher ist die Anzahl $e$ der bei dem Uebergang von der ersten Reihe zur zweiten verlorenen Wechsel gleich $2k-n$. Es ist aber bewiesen worden, dass die Anzahl der Nullpunkte auf der positiven Seite der $y$-Axe $=\frac{1}{2}(n+e)$ ist; substituirt man für $e$, so wird daraus $k$. Es ergibt sich mithin das folgende Theorem: *Wenn man die Reihe der Coefficienten der höchsten Potenzen der Functionen $f_1(y)$, $f_2(y)$, etc. bildet, so gibt jeder Zeichenwechsel einen Nullpunkt innerhalb des positiven geschlossenen Weges und daher eine Wurzel an, deren reeller Theil positiv ist.*

§ 296. Wir haben eine Regel nöthig, nach der wir die Reihe der Coefficienten mit Leichtigkeit bilden können. Führt man die Rechnung zur Ermittlung des

---

speciellen Fall anpassen lassen. Man setze $z=x+yi$ und $f(z)=P+Qi$. Sieht man $P$ und $Q$ als Functionen von $x$ und $y$ an, so lassen sich zwei Curven $P=0$, $Q=0$ aufzeichnen; offenbar entspricht dann jeder Durchschnittspunkt derselben einer Wurzel von $f(z)=0$. Die Gleichungen dieser Curven sind in (2), § 291 in Polarcoordinaten gegeben. Die Curve $P$ hat offenbar $n$ Asymptoten, deren Richtungen durch $\cos n\theta=0$ und die Curve $Q$ hat ebenfalls $n$ Asymptoten, die aber durch $\sin n\theta=0$ gegeben sind.

Wir wollen zuerst zeigen, dass die in § 294* gegebenen Bedingungen nöthig sind, wenn kein Nullpunkt auf der positiven Seite der $y$-Axe existiren soll. Man ziehe einen Kreis mit unendlich grossem Radius, der die Asymptoten an die Curve $P$ in $P_1, P_2, \ldots, P_n$ und die an die Curve $Q$ in $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ treffen möge. Diese Punkte wechseln mit einander ab. Nimmt man nur die Punkte, die auf der positiven Seite der $y$-Axe liegen, so kann man sagen, die Curven $P$ und $Q$ begännen bei diesen unendlich weit entfernten Punkten und sollten bei ihrem Uebergang nach der negativen Seite der $y$-Axe sich auf der positiven Seite dieser Axe nicht schneiden. Die Zweige der beiden Curven müssen daher fortwährend durch den ganzen Raum auf der positiven Seite der $y$-Axe mit einander abwechseln. Auch ihre Durchschnittspunkte mit der $y$-Axe müssen alterniren. Setzt man $x=0$ in den Gleichungen $P=0$ und $Q=0$, so erhält man $f_1(y)=0$, $f_2(y)=0$ (§ 292); diese Gleichungen müssen also derart sein, dass ihre Wurzeln reell sind und die Wurzeln einer jeden die der andern trennen oder zwischen ihnen liegen. In § 292 wurde dann gezeigt, dass man die Bedingungen, unter welchen die Wurzeln der einen Gleichung die der andern trennen, praktisch mit Hülfe des Sturm'schen Theorems ermitteln kann.

Umgekehrt lässt sich aus dem Cauchy'schen Theorem ableiten, dass die in § 292 gegebenen Bedingungen ausreichen. Denn, man nehme an, man wisse, dass die Durchgangspunkte der Curven $P$ und $Q$ durch die $y$-Axe mit einander abwechselten. Offenbar passiren wir nun bei dem Umgang um den geschlossenen Weg, welcher von dem unendlich grossen den Raum auf der positiven Seite der $y$-Axe begrenzenden Halbkreis gebildet wird, jeden $P$- und $Q$-Zweig zweimal, indem wir jeden in der einen Richtung auf dem Halbkreis und in der entgegengesetzten auf der $y$-Axe kreuzen. In § 293 sind die aufeinander folgenden Zeichenwechsel von $P/Q$ gezählt worden und es wurde gezeigt, dass die Zeichenwechsel einander balanciren. Aus dem Cauchy'schen Theorem folgt, dass innerhalb des geschlossenen Weges kein Nullpunkt liegt.

grössten gemeinschaftlichen Theilers von $f_1(y)$, $f_2(y)$ aus und verändert die Vorzeichen der Reste, so findet man als erste drei Functionen

$$f_1(y) = p_0 y^n - p_2 y^{n-2} + p_4 y^{n-4} - \text{etc.},$$

$$f_2(y) = p_1 y^{n-2} - p_3 y^{n-3} + p_5 y^{n-5} - \text{etc.},$$

$$f_3(y) = \frac{p_1 p_2 - p_0 p_3}{p_1} y^{n-2} - \frac{p_1 p_4 - p_0 p_5}{p_1} y^{n-4} + \text{etc.}$$

*Die Coefficienten von $f_3(y)$ lassen sich also aus denen von $f_1(y)$ und $f_2(y)$ durch einfache kreuzweise Multiplication ableiten und können daher ohne Weiteres niedergeschrieben werden.* Die Coefficienten von $f_4(y)$ ergeben sich ebenso durch kreuzweise Multiplication aus denen von $f_2(y)$ und $f_3(y)$ u. s. f. Diese auf einander folgenden Functionen kann man die *Hülfsfunctionen* nennen.

§ 297. **Erste Form der Regel.** Fasst man das Vorige zusammen, so erhält man die folgende Regel. Wenn die Gleichung

$$f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots$$

lautet, so ordne man die Coefficienten in zwei Zeilen auf folgende Art

$$p_0, \quad p_2, \quad p_4, \quad \text{etc.},$$
$$p_1, \quad p_3, \quad p_5, \quad \text{etc.},$$

bilde durch kreuzweise Multiplication die neue Reihe

$$\frac{p_1 p_2 - p_0 p_3}{p_1}, \quad \frac{p_1 p_4 - p_0 p_5}{p_1}, \quad \text{etc.}$$

und ebenso eine vierte mittelst der beiden letzten durch eine ähnliche kreuzweise Multiplication. Fährt man so fort, so nimmt die Anzahl der Glieder in jeder Reihe nach und nach ab und wir hören erst auf, wenn kein Glied mehr übrig ist. *Sollen dann keine Wurzeln vorkommen, deren reelle Theile positiv sind, so ist es nöthig und ausreichend, wenn alle Glieder in der ersten Verticalreihe dasselbe Vorzeichen haben. Wenn sie nicht alle dasselbe Vorzeichen haben, so ist die Anzahl der Wechsel der Anzahl der Wurzeln, deren reelle Theile positiv sind, gleich.*

Die Glieder, welche die erste Verticalreihe bilden, wollen wir die *Probefunctionen* nennen.

Da wir bei der Bildung der Horizontalreihen nur die Vorzeichen nöthig haben, so kann man jede mit einer ganz beliebigen positiven Grösse multipliciren oder dividiren. Auf diese Art lassen sich oft complicirte Brüche vermeiden.

§ 298. **Gleichungen von ungradem Grad.** Um die Untersuchung zu vereinfachen, hatten wir bisher vorausgesetzt, die Gleichung sei von gradem Grad. Es sei $n$ jetzt ungrade und wie zuvor

$$f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n.$$

Man kann diese Gleichung als die Grenze von

$$p_0 z^{n+1} + p_1 z^n + \cdots + p_n z + p_n h = 0$$

betrachten.

Wenn $h$ positiv und unbegrenzt klein ist, so ist die hinzugekommene Wurzel reell und negativ und schliesslich gleich $-h$. Auch sind die Wurzeln der beiden Gleichungen, die innerhalb des positiven geschlossenen Weges liegen, schliesslich die nämlichen.

Da $n + 1$ grade ist, so lässt sich auf die letzte Gleichung die frühere Regel anwenden. Die beiden ersten Zeilen sind

$$p_0, \; p_2, \; \text{etc.}, \; p_{n-1}, \; p_n h,$$
$$p_1, \; p_3, \; \text{etc.}, \; p_n.$$

Wenn man ein Paar Zeilen ausrechnet, so erkennt man leicht, dass in den folgenden nur die letzten Coefficienten auf der rechten Seite $h$ als Factor enthalten. Daher bleiben im Allgemeinen alle Probefunctionen mit Ausnahme der beiden letzten endlich, wenn $h = 0$ gesetzt wird, und auf ihr Vorzeichen hat es keinen Einfluss, ob das Endglied $p_n h$ bei der Berechnung der Reihen hinzugenommen wird oder nicht. Die beiden letzten Coefficienten in der ersten Verticalreihe sind, wenn nur die Hauptpotenz von $h$ beibehalten wird, $p_n$ und $p_n h$. Da aber $h$ positiv ist, so kann ein Zeichenwechsel bei dieser Aufeinanderfolge nicht stattfinden. Man kann das letzte Glied $p_n h$ daher ganz weglassen, da es zur Anzahl der Wechsel nichts beiträgt. Daraus folgt, *dass die Regel zur Berechnung der Anzahl der Wurzeln, deren reelle Theile positiv sind, dieselbe bleibt, mag die Gleichung von gradem oder ungradem Grad sein.*

§ 299. **Vereinfachung der Regel, wenn nur Proben auf die Stabilität verlangt werden.** Von dynamischem Standpunkt aus ist es im Allgemeinen wichtiger, die Stabilitätsbedingungen zu bestimmen, als auszurechnen, wie oft sie durchbrochen werden. *Wenn diese Bedingungen allein zu ermitteln sind, so kann man bei der Bildung der successiven Hülfsfunctionen mittelst der Regel der kreuzweisen Multiplication den Divisor jedesmal weglassen, vorausgesetzt, dass $p_0$ von Anfang an positiv gemacht wird;* denn dieser Divisor muss, da er eine der Probefunctionen ist, jedenfalls positiv sein.

Nimmt man an, die Stabilitätsbedingungen seien erfüllt, so ergibt sich aus § 292, dass die richtige Anzahl von Wechseln nur dann am Anfang der Reihen verloren gehen kann, *wenn die Wurzeln der Gleichung $f_1(y)$ sämmtlich reell sind und von denen von $f_2(y)$ getrennt werden, die letzteren Wurzeln also auch reell sind.* Weil nun ferner bei dem Verschwinden einer Hülfsfunction die beiden ihr zur Seite stehenden entgegengesetzte Vorzeichen haben, *so müssen die Wurzeln von $f_3(y) = 0$ reell sein und die von $f_2(y)$ trennen u. s. w.*

Nimmt man an, die reellen Theile der Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ seien negativ, so müssen die reellen quadratischen Factoren, die aus diesen Wurzeln bestehen, positive Glieder haben. Jedes Glied der Gleichung $f(z) = 0$ muss daher positiv sein. Aus den Definitionen der Functionen $f_1(y)$ und $f_2(y)$ in § 292 folgt, dass die Vorzeichen ihrer Glieder abwechselnd positiv und negativ sind und da ihre Wurzeln reell sind, so ist jede Wurzel positiv. Daher haben alle folgenden Hülfsfunctionen $f_3(y)$, $f_4(y)$, etc. reelle und positive Wurzeln. Die Vorzeichen ihrer Glieder sind also abwechselnd positiv und negativ und nach § 297 ist der Coefficient der höchsten Potenz in jedem Fall positiv.

Auf diese Art kommen wir zu einer Verallgemeinerung des Theorems in § 297. Setzt man voraus, $p_0$ sei positiv gemacht worden, so ergibt sich aus dem Vorstehenden, dass es zwar nöthig und hinreichend ist, wenn alle Glieder in der ersten Verticalreihe positiv sind, *dass aber auch die Glieder in jeder Verticalreihe positiv sein müssen. Bei der Ausführung des in diesem Paragraphen angegebenen Verfahrens kann man daher sofort anhalten, sobald man auf irgend ein negatives Glied trifft* und daraus schliessen, dass $f(z)$ einige Wurzeln besitzt, deren reelle Theile negativ sind.

§ 300. Beisp. 1. Man gebe an, unter welcher Bedingung die reellen Wurzeln und die reellen Theile der complexen Wurzeln der cubischen Gleichung

$$z^3 + p_1 z^2 + p_2 z + p_3 = 0$$

negativ sind.

Nach § 296 ist

$$f_1(y) = y^3 - p_2 y,$$
$$f_2(y) = p_1 y^2 - p_3.$$

Führt man die in § 297 angegebene kreuzweise Multiplication aus und lässt die Divisoren, wie in § 299 gezeigt wurde, weg, so erhält man

$$f_3(y) = (p_1 p_2 - p_3) y, \quad f_4(y) = (p_1 p_2 - p_3) p_3.$$

Die nothwendige Bedingung besteht darin, dass $p_1$, $p_1 p_2 - p_3$ und $p_3$ positiv sein müssen.

Wir haben die Potenzen von $y$ beibehalten, um die Glieder zu trennen, und ebenso die negativen Vorzeichen in der zweiten Verticalreihe; beides wäre nicht nöthig gewesen und hätte nach § 297 unterbleiben können. In diesem und dem nächsten Beispiel ist die ganze Zahlenrechnung angegeben.

Beisp. 2. Man gebe die entsprechenden Bedingungen für die biquadratische Gleichung an

$$z^4 + p_1 z^3 + p_2 z^2 + p_3 z + p_4 = 0$$

$$\begin{aligned}
f_1(y) &= y^4 && - p_2 y^2 + p_4 \\
f_2(y) &= p_1 y^3 && - p_3 y \\
f_3(y) &= (p_1 p_2 - p_3) y^2 && - p_1 p_4 \\
f_4(y) &= \{(p_1 p_2 - p_3) p_3 - p_1^2 p_4\} y && \\
f_5(y) &= \{(p_1 p_2 - p_3) p_3 - p_1^2 p_4\} p_1 p_4. &&
\end{aligned}$$

Die Bedingungen bestehen darin, dass $p_1$, $p_1 p_2 - p_3$, $(p_1 p_2 - p_3) p_3 - p_1^2 p_4$ und $p_4$ positiv sein müssen. Sie sind gleichwerthig mit denen in § 287.

§ 301. **Zweite Form der Regel.** Wenn die Gleichung einen sehr hohen Grad hat, so ist die Anwendung der in § 297 gegebenen Regel etwas umständlich. Man kann nämlich den Einwand machen, dass man nur die erste Verticalreihe braucht und doch, um sie zu erhalten, alle andern niederschreiben muss. *Wir wollen nun eine Methode ermitteln, mittelst deren man jedes Glied in der ersten Verticalreihe aus dem über ihm stehenden ableiten kann, ohne irgend einen andern Ausdruck ausser dem gesuchten niederschreiben zu müssen.*

Man beachte, dass man jede Function aus der über ihr stehenden auf dieselbe Art erhält. Die drei ersten Functionen sind in § 297 angegeben worden. Die erste und zweite Zeile verwandeln sich in die zweite und dritte, wenn man

$$\left.\begin{array}{lllll}
\text{statt} & p_0, & p_1, & p_2, & p_3, \text{ etc.} \\
\text{setzt:} & p_1, & p_2 - \dfrac{p_0 p_3}{p_1}, & p_3, & p_4 - \dfrac{p_0 p_5}{p_1}, \text{ etc.}
\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (A).$$

Daraus ergibt sich die folgende Regel: *Um die Probefunctionen (§ 297) zu bilden, schreibe man die erste, nämlich $p_0$, auf, die zweite erhält man aus der ersten, die dritte aus der zweiten u. s. w. durch Vertauschung der Buchstaben nach dem obigen Schema* A.

Bei diesen Vertauschungen wird der Index immer grösser, bis man schliesslich Null statt des Buchstaben zu setzen hat, wenn der Index grösser als der Grad der Gleichung wird.

Auf diese Art wird jede Probefunction aus der ihr vorhergehenden gebildet, bis man die richtige Zahl erhalten hat, d. h. mit Einschluss von $p_0$ eine mehr, als der Grad der Gleichung beträgt.

§ 302. **Beispiel.** *Man bilde die Probefunctionen der Gleichung fünften Grades*

$$f(z) = p_0 z^5 + p_1 z^4 + p_2 z^3 + p_3 z^2 + p_4 z + p_5 = 0.$$

Hier sind $p_6$, $p_7$, etc. Null; jedes Glied mit dem Factor $p_5$ verschwindet daher in der nächsten Function. Die sechs Probefunctionen sind nach unserer Regel

$$p_0, \ p_1, \ p_2 - \frac{p_0 p_3}{p_1}, \ p_3 - \frac{p_1(p_1 p_4 - p_0 p_5)}{p_1 p_2 - p_0 p_3},$$

$$p_4 - \frac{p_0 p_5}{p_1} - \frac{(p_1 p_2 - p_0 p_3)^2 p_5}{p_1 p_3 (p_1 p_2 - p_0 p_3) - p_1^2 (p_1 p_4 - p_0 p_5)}$$

und schliesslich $p_5$.

Wenn man $z$ als eindimensionale Grösse deutet, so werden die Dimensionen der verschiedenen Coefficienten $p_0, p_1$, etc. offenbar durch ihre Indices angegeben. Man erhält somit eine Probe auf die Richtigkeit des arithmetischen Verfahrens, wenn man die Dimensionen der verschiedenen Glieder der Probefunctionen zählt.

§ 303. Verschwindet eine Probefunction, so tritt bei dieser Methode in der nächsten Probefunction ein unendlich grosses Glied auf. In diesem Fall ersetze man die verschwindende Function durch eine unendlich kleine Grösse $\alpha$ und verfahre wie zuvor. Ist z. B. $p_1 = 0$ und man schreibt $\alpha$ statt $p_1$, so werden die sechs Functionen $p_0$, $\alpha$, $-p_0 p_3/\alpha$, $p_3$, $p_4 - p_2 p_5/p_3 + p_0 p_5^2/p_3^2$, $p_5$. Man betrachte die ersten vier Functionen. Sind die Vorzeichen von $p_0$ und $p_3$ gegeben, so bleibt, wie man leicht durch den Versuch findet, die Anzahl der Wechsel die nämliche, ob man $\alpha$ als positiv oder negativ ansieht. Haben $p_0$ und $p_3$ z. B. dieselben Zeichen, so haben die mittleren Glieder immer entgegengesetzte Vorzeichen und es gibt grade zwei Wechsel; sind dagegen die Vorzeichen von $p_0$ und $p_3$ verschieden, so sind die mittleren Glieder beide positiv oder beide negativ und es existirt nur ein Wechsel.

§ 304. **Das Verschwinden einer Hülfsfunction.** Bei der vorstehenden Theorie sind zwei Vorbehalte gemacht worden.

1. Bei der Anwendung des Cauchy'schen Theorems wurde angenommen, dass keine Nullpunkte auf der $y$-Axe liegen.

2. Es wurde vorausgesetzt, dass $P$ und $Q$ keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen. Ist dies aber der Fall, so kommt man schliesslich bei dem Aufsuchen des Factors, um die Hülfsfunctionen $f_3(y)$, etc. zu bilden, zu einer Function, welche dieses grösste Mass ist und die nächste Function ist absolut Null. Wir werden daher von dem Vorhandensein eines gemeinschaftlichen Factors durch das absolute Verschwinden einer Hülfsfunction in Kenntniss gesetzt.

Offenbar müssen, wenn $f(z) = 0$ zwei gleiche und entgegengesetzte Wurzeln hat, die graden und ungraden Potenzen von $z$ getrennt verschwinden. Aus der Definition in § 292 folgt, dass $f_1(y)$ und $f_2(y)$ diese Wurzeln gemeinschaftlich besitzen. Das grösste gemeinschaftliche Mass von $f_1(y)$ und $f_2(y)$ muss daher als Factoren alle Wurzeln von $f(z)$ enthalten, die gleich und entgegengesetzt sind. *Umgekehrt* ist das grösste gemeinschaftliche Mass von $f_1(y)$ und $f_2(y)$ nothwendiger Weise eine Function von $y$, die nur grade Potenzen von $y$ enthält[1]) und deren Wurzeln, wenn sie gleich Null gesetzt wird, gleich und entgegengesetzt sind. Diese Wurzeln müssen offenbar der Gleichung $f(z) = 0$ genügen.

Wenn nun ein Nullpunkt auf der $y$-Axe liegt, so muss $f(z)$ Wurzeln von der Form $\pm k\sqrt{-1}$ besitzen und diese sind gleich und entgegengesetzt. Die beiden vorbehaltenen Fälle sind daher in dem einen Fall enthalten, in welchem $f_1(y)$ und $f_2(y)$ gemeinschaftliche Factoren haben.

---

1) Ist $p_n = 0$, so kommt noch eine Wurzel, nämlich $z = 0$, hinzu, die in dieser Bemerkung nicht eingeschlossen ist. Diese Wurzel lässt sich aber entweder durch Division aus der Gleichung $f(z) = 0$ entfernen oder in die folgende Erörterung als Theil der Function $\varphi(z)$ einschliessen.

§ 305. Das grösste gemeinschaftliche Mass von $f_1(y)$ und $f_2(y)$ sei $\psi(y^2)$. Setzt man nun $f(z) = \psi(-z^2)\varphi(z)$, so ist die $\varphi(z)$ derart, dass sie keine zwei Wurzeln gleich und entgegengesetzt hat und auf sie lässt sich daher das Cauchy'sche Theorem anwenden, ohne dass ein Fehlschlagen zu befürchten wäre. Nach § 295 ist die Anzahl der Wurzeln von $\varphi(z)$, deren reelle Theile positiv sind, der Anzahl von Zeichenwechseln in den Coefficienten der höchsten Potenzen der Hülfsfunctionen von $\varphi(z)$ gleich. Da aber $\psi(-z^2)$ reell wird, wenn man $z = y\sqrt{-1}$ schreibt, so werden die Hülfsfunctionen von $\varphi(z)$, wenn man jede mit $\psi(y^2)$ multiplicirt, die Hülfsfunctionen von $f(z)$. Das Auftreten dieses gemeinschaftlichen Factors hat keinen Einfluss auf die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe. Schliessen wir also die Untersuchung der Factoren von $\psi(-z^2)$ aus unserer Betrachtung aus, so kann man die Lage der übrigen Nullpunkte durch Discussion entweder der Function $f(z)$ oder $\varphi(z)$ ermitteln.

Zu der Regel in § 297 lässt sich daher hinzufügen: *Wenn man diese Regel anwendet und dabei nur die Hülfsfunctionen benutzt, die nicht vollständig verschwinden, so erhält man die Anzahl von Wurzeln, deren reelle Theile positiv sind mit Ausschluss aller derer, die paarweise gleich und entgegengesetzt sind.*

Die weggelassenen Wurzeln findet man selbstverständlich, wenn man die letzte Hülfsfunction, die nicht vollständig verschwindet, gleich Null setzt. Schreibt man $y\sqrt{-1} = z$, so lassen sich die entsprechenden Wurzeln der ursprünglichen Gleichung ableiten.

Wie man sieht, gibt es für jedes Paar complexer Wurzeln von $y$ einen Werth von $z$, dessen reeller Theil positiv ist und für jedes Paar reeller Wurzeln von $y$ zwei Werthe von $z$ von der Form $\pm k\sqrt{-1}$. Die ersten zeigen eine instabile, die letzteren eine stabile Bewegung an, wie in § 283 erklärt wurde.

§ 306. Gewöhnlich lässt sich die Beschaffenheit dieser Wurzeln am leichtesten durch Auflösung der Gleichung finden, die man erhält, wenn man die letzte Hülfsfunction gleich Null setzt. Wird dies aber zu umständlich, so empfiehlt sich das Sturm'sche Theorem. Da die Potenzen von $y$ in allen Hülfsfunctionen jedesmal um zwei abnehmen, so lässt sich das Sturm'sche Verfahren zur Ermittlung des grössten gemeinschaftlichen Masses genau so ausführen, wie in § 297 beschrieben wurde. Man kann auch ebenso wie in § 295 zeigen, dass für jeden Zeichenwechsel in den Sturm'schen Functionen, wenn $y = +\infty$ ist, ein Paar imaginärer Werthe von $y$ existirt. Dies liefert einen zweiten Zusatz zu der Regel in § 297:

*Sobald man bei der Bildung der successiven Hülfsfunctionen auf eine trifft, die vollständig verschwindet, setze man statt ihrer den Differentialquotienten der letzten von denen, die nicht verschwinden und fahre dann fort, die folgenden Functionen auf dieselbe Art wie bisher zu bilden. Jeder Zeichenwechsel in der ersten Verticalreihe zeigt dann eine Wurzel an, deren reeller Theil positiv ist. Die reellen Theile der übrigen Wurzeln sind negativ oder Null.*

§ 307. **Gleiche Wurzeln.** Aus § 283 ist bekannt, dass, wenn eine einzelne Wurzel von der Form $a + b\sqrt{-1}$ sei es Stabilität oder Instabilität anzeigt, mehrere gleiche Wurzeln dasselbe thun mit Ausnahme des Falles, in welchem $a = 0$ ist. In diesem Fall geben, während einzelne Wurzeln von der Gestalt $\pm b\sqrt{-1}$ auf Stabilität hinweisen, mehrere gleiche Wurzeln Instabilität an. Es ist daher im Allgemeinen wichtig zu bestimmen, ob sich die Wurzeln von der letzteren Gestalt wiederholen oder nicht.

Haben die gleichen Wurzeln die erste Form und kommen keine andern vor, die ihnen gleich und entgegengesetzt sind, so wird bei der Benutzung des Cauchy'schen Theorems ihre Anzahl vollständig gezählt. Haben die gleichen

Wurzeln die zweite Gestalt, nämlich $\pm b\sqrt{-1}$, so treten sie in dem gemeinschaftlichen Factor $\psi(-z^2)$ auf. Wenn sich nun die Gleichung $\psi(-z^2)=0$ auflösen lässt, so erkennen wir sofort, ob die sich wiederholenden Wurzeln die erste oder zweite Form haben. Löst man die Gleichung nach dem Sturm'schen Theorem auf (§ 306) und hält wie gewöhnlich bei der ersten Sturm'schen Function an, die nicht verschwindet, so hat man zu beachten, dass diese gleichen Wurzeln so gezählt werden, als ob sie eine Wurzel wären. Die letzte Sturm'sche Function, die nicht verschwindet, liefert durch ihre Factoren die Gruppen gleicher Wurzeln, wobei eine Wurzel in jeder Gruppe verloren geht. Differenzirt man diese Function und fährt so fort, wie in § 297 beschrieben wurde, so wenden wir in Wirklichkeit das Sturm'sche Theorem von Neuem auf diese Function an und kommen so zu einer zweiten Sturm'schen Function, die Gruppen gleicher Wurzeln enthält, wobei in jeder Gruppe zwei Wurzeln verloren gehen. Auf diese Art lässt sich, wenn man das Verfahren fortsetzt, die Anzahl der Wiederholungen zählen.

**Zahlenbeispiele.** Zu bestimmen, wie viele Wurzeln der Gleichung

$$z^{10}+z^9-z^8-2z^7+z^6+3z^5+z^4-2z^3-z^2+z+1=0$$

reelle positive Theile haben.

Bildet man die beiden ersten Horizontalreihen, wie in § 297, so erhält man

$$\begin{array}{lllllll} y^{10} & 1, & -1, & 1, & 1, & -1, & 1, \\ y^9 & 1, & -2, & 3, & -2, & 1, & \end{array}$$

worin wir auf die linke Seite die höchste Potenz der Hülfsfunctionen gesetzt und die in der zweiten, vierten und sechsten Verticalreihe in § 292 gegebenen negativen Vorzeichen weggelassen haben. Man bemerke, dass das Auftreten negativer Glieder zeigt, dass die Gleichung eine instabile Bewegung angibt (§ 299). *Hat man also nur die Frage der Stabilität oder Instabilität zu entscheiden, so hört das Verfahren bei dem ersten negativen Vorzeichen auf.* Um die übrigen Regeln zu erläutern, fahren wir fort, wie folgt.

Nach der Regel in § 297 hat man

$$y^8 \quad 1, \quad -2, \quad 3, \quad -2, \quad 1.$$

Die Zahlen sind die gleichen, wie die in der letzten Linie; daher verschwindet die nächste Hülfsfunction vollständig. Folglich ist

$$\psi(-z^2)=z^8-2z^6+3z^4-2z^2+1.$$

Nach § 306 ersetze man die nächste Function durch den Differentialquotienten

$$\begin{array}{l} y^7\left\{\begin{array}{lllll} 8, & -12, & 12, & -4, & \text{dividire durch } 4 \\ 2, & -3, & 3, & -1, & \end{array}\right. \\ y^6\left\{\begin{array}{lllll} -\frac{1}{2}, & \frac{3}{2}, & -\frac{3}{2}, & 1, & \text{multiplicire mit } 2 \\ -1, & 3, & -3, & 2, & \end{array}\right. \\ y^5\left\{\begin{array}{llll} 3, & -3, & 3, & \text{dividire durch } 3 \\ 1, & -1, & 1, & \end{array}\right. \\ y^4\left\{\begin{array}{llll} 2, & -2, & 2, & \text{dividire durch } 2 \\ 1, & -1, & 1. & \end{array}\right. \end{array}$$

Hier verschwindet die nächste Function von Neuem. Gleiche Wurzeln erhält man also aus der Gleichung $z^4-z^2+1=0$. Die Beschaffenheit der Wurzeln findet man durch ihre Auflösung. Sieht man davon ab, so kann man auch (§ 307) die nächste Function durch den Differentialquotienten ersetzen

$$
\begin{array}{lll}
y^3 & \begin{cases} 4, & -2; \\ 2, & -1, \end{cases} & \text{man dividire durch 2} \\
y^2 & -1, \quad 2, & \text{nach Multiplication mit 2} \\
y & 3, & \\
y^0 & 2. &
\end{array}
$$

Aus der ersten Verticalreihe erkennt man, dass vier Zeichenwechsel vorhanden sind. Es gibt daher vier Wurzeln, deren reelle Theile positiv sind. Man überzeugt sich leicht davon, wenn man beachtet, dass man der gegebenen Gleichung die Form $(z^4 - z^2 + 1)^2 (z^2 + z + 1) = 0$ geben kann. In diesem Beispiel sind alle Zahlenrechnungen ausgeführt worden.

Beisp. 2. Man zeige, dass die Wurzeln der Gleichungen

$$z^4 + 2z^3 + z^2 + 1 = 0,$$

$$z^8 + 2z^7 + 4z^6 + 4z^5 + 6z^4 + 6z^3 + 7z^2 + 4z + 2 = 0$$

den Stabilitätsbedingungen nicht genügen.

Beisp. 3. Man zeige, dass die Wurzeln der Gleichungen

$$z^4 + 3z^3 + 5z^2 + 4z + 2 = 0,$$

$$z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 11z^2 + 6z + 6 = 0$$

den Stabilitätsbedingungen genügen.

Die in diesem Abschnitt gegebenen Stabilitätsbedingungen sind dem dritten Kapitel der *Stability of Motion* des Verfassers entnommen. Andre Methoden zur Bestimmung der Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ findet man ebendaselbst im zweiten Kapitel. Ueber die Bedingungen für eine biquadratische Gleichung hielt der Verfasser einen Vortrag in der Mathematical Society, 1874. Die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit specieller Berücksichtigung des unbestimmten Falles ist ein Auszug aus einer Abhandlung des Verfassers in den *Proceedings of the Mathematical Society*, 1883.

---

## Kapitel VII.

# Freie und erzwungene Schwingungen von Systemen.

## Freie Schwingungen.

§ 308. Der Unterschied zwischen freien und erzwungenen Schwingungen wird im nächsten Abschnitt erklärt werden. Die folgende grobe Unterscheidung reicht indessen für den Augenblick hin: Wenn die an einem System angreifenden Kräfte nur von den Abweichungen der verschiedenen Massenpunkte von ihrer ungestörten Bewegung abhängen, so enthält jedes Glied der Bewegungsgleichungen, wie in § 257 erklärt wurde, die ersten Potenzen der Coordinaten. Die Bewegungsgleichungen nehmen alsdann die ihnen in § 310 dieses Kapitels gegebene Gestalt an. *Die Schwingungen eines solchen Systems heissen freie.*

Ausser diesen Kräften können noch andre vorhanden sein, die von äussern Ursachen herrühren, welche Functionen der Zeit sein können und vielleicht nicht verschwinden, wenn sich das System in seiner ungestörten Lage befindet. Solche Kräfte schreibt man in der Regel auf die rechte Seite der Bewegungsgleichungen, um damit anzudeuten, dass ihre Wirkung nach andern Grundsätzen zu beurtheilen ist, wie die der übrigen Kräfte. *Die durch diese Kräfte erzeugten Schwingungen heissen erzwungene.*

§ 309. **Einleitende Uebersicht.** Die Sätze in diesem Abschnitt sollen zur Untersuchung der kleinen Schwingungen eines Systems dienen, das von vielen Coordinaten abhängt. Da sie aber allgemeine Anwendung finden, so sind sie in rein mathematischer Form gegeben. Es wird auf kein dynamisches Princip Bezug genommen und, wenn dynamische Ausdrücke gebraucht werden, so geschieht es nur zur Erklärung.

Wir fangen damit an, die Gleichungen zweiter Ordnung mit $n$ abhängigen Variablen in ihrer allgemeinsten Form zu nehmen, obgleich diese allgemeinste Form in der Dynamik nicht vorkommt. Alsdann werden zwei typische Gleichungen abgeleitet und aus diesen die Hauptsätze in dem Abschnitt gefolgert.

Der erste Schritt, der bei der Auflösung simultaner Gleichungen gethan werden muss, besteht in der Bildung einer gewissen Determinante (§ 262). Die allgemeine Form der Lösung und die Stabilität der resultirenden Bewegung hängen von den Wurzeln dieser Determinante ab. Wenn die reellen Theile der Wurzeln positiv sind, so ist, wie in § 282 erklärt wurde, die Bewegung instabil. *Es wird gezeigt, dass zwei Sätze sich unmittelbar aus den typischen Gleichungen ergeben. Wenn die Functionen, die hier $A$, $B$, $C$ genannt werden, definite Formen sind, so wird gezeigt, (1), dass die reellen Wurzeln der Determinante, wie allgemein die Gleichungen auch sein mögen, nicht positiv sein können und dass (2), wenn die Gleichungen den einfacheren Charakter haben, der in der Dynamik vorkommt, der reelle Theil jeder complexen Wurzel negativ ist.*

Wendet man unsre Gleichungen auf den Fall an, in welchem das System um eine Gleichgewichtslage schwingt, so erkennt man, dass die Function $A$ der

lebendigen Kraft, $B$ der Dissipationsfunction und $C$ dem Potential der Restitutionskräfte entspricht.

Der erste dieser Sätze wurde von Lagrange und Lord Kelvin für den Fall aufgestellt, in welchem die Gleichungen die Schwingungen des Systems um eine Gleichgewichtslage darstellen. Den zweiten findet man in einer Abhandlung des Verfassers *on the Stability of Motion,* jedoch in andrer Form. Er findet sich auch in der letzten Ausgabe von Thomson und Tait's *Natural Philosophy.* Man vergleiche auch einen Vortrag, den der Verfasser im April 1883 vor der Mathematical Society in London gehalten hat.

§ 310. **Die Wurzeln der Fundamentaldeterminante.** Es sei eine beliebige Anzahl abhängiger Variablen $x$, $y$, $z$ etc. vorhanden, die mit Hülfe ebenso vieler Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten durch $t$ ausgedrückt werden sollen. Die Gleichungen mögen sein, welche sie wollen, man kann ihnen jedenfalls die bequeme Gestalt geben

$$(A_{11}\delta^2 + B_{11}\delta + C_{11})x + \begin{pmatrix} A_{12}\delta^2 + B_{12}\delta + C_{12} \\ + D_{12}\delta^2 + E_{12}\delta + F_{12} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} A_{13}\delta^2 + B_{13}\delta + C_{13} \\ + D_{13}\delta^2 + E_{13}\delta + F_{13} \end{pmatrix} z + \text{etc.} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} A_{12}\delta^2 + B_{12}\delta + C_{12} \\ - D_{12}\delta^2 - E_{12}\delta - F_{12} \end{pmatrix} x + (A_{22}\delta^2 + B_{22}\delta + C_{22}) y + \begin{pmatrix} A_{23}\delta^2 + B_{23}\delta + C_{23} \\ + D_{23}\delta^2 + E_{23}\delta + F_{23} \end{pmatrix} z + \text{etc.} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} A_{13}\delta^2 + B_{13}\delta + C_{13} \\ - D_{13}\delta^2 - E_{13}\delta - F_{13} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} A_{23}\delta^2 + B_{23}\delta + C_{23} \\ - D_{23}\delta^2 - E_{23}\delta - F_{23} \end{pmatrix} y + (A_{33}\delta^2 + B_{33}\delta + C_{33}) z + \text{etc.} = 0,$$

$$\text{etc.} \quad + \quad \text{etc.} \quad + \text{etc.} = 0,$$

worin das Symbol $\delta$ die Differentiation nach $t$ angibt und die Reihenfolge der Indices unwesentlich ist, also $A_{12} = A_{21}$ ist u. s. w.

Wie man sieht, sind zwei Systeme von Gliedern vorhanden, (1) solche, die von den Buchstaben $A$, $B$, $C$ abhängen und für sich allein eine symmetrische Determinante bilden; (2) solche, die von den Buchstaben $D$, $E$, $F$ abhängen und für sich allein eine schiefe Determinante bilden.

§ 311. Aus den in Kap. 9, Bd. 1 angegebenen Gründen kann man die von $A$ abhängigen Glieder *die Effectivkräfte,* die von $B$ abhängigen *die Widerstandskräfte* und die von $C$ abhängigen *die Restitutionskräfte* nennen. Im Allgemeinen fehlen die Glieder, die von den Buchstaben $D$ und $F$ abhängen. Die von dem Buchstaben $E$ abhängigen kommen vor, wenn man die Schwingungen um einen Zustand der Bewegung untersucht, Kap. 3, § 112. *Wir nennen diese Kräfte centrifugale.*

Setzt man

$$A = \tfrac{1}{2} A_{11} x^2 + A_{12} xy + \tfrac{1}{2} A_{22} y^2 + \cdots,$$
$$B = \tfrac{1}{2} B_{11} x^2 + B_{12} xy + \tfrac{1}{2} B_{22} y^2 + \cdots,$$
$$C = \tfrac{1}{2} C_{11} x^2 + C_{12} xy + \tfrac{1}{2} C_{22} y^2 + \cdots,$$

so kann man die Glieder in den verschiedenen Gleichungen, die von $A$, $B$, $C$ herrühren, schreiben

$$\delta^2 \frac{\partial A}{\partial x} + \delta \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{dx}, \quad \delta^2 \frac{\partial A}{\partial y} + \delta \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial y}, \text{ etc.}$$

*Man kann daher $A$, $B$, bez. $C$ die Potentiale der Effectivkräfte, Widerstandskräfte und Restitutionskräfte nennen.*

§ 312. Wenn man die Bewegungsgleichungen mit den Lagrangeschen für die Schwingungen um eine Gleichgewichtslage vergleicht (Kap. 2), so sieht man, dass die Function $A$ nur positiv sein kann. Diese Schwingungen sind daher ebenfalls stabil, wenn die Function $C$ stets positiv ist.

So kommt es häufig vor, dass die drei Functionen $A$, $B$, $C$ oder einige von ihnen derart sind, *dass sie für alle reellen Grössen, die man statt $x$, $y$, $z$, etc. einsetzen kann, dasselbe Vorzeichen behalten und nur dann Null werden, wenn $x$, $y$, etc. sämmtlich Null sind. Solche Functionen werden definite Formen zweiten Grades genannt.* Siehe § 60 und die Note am Ende des Bandes *über die Bedingungen, unter welchen eine quadratische Gleichung eine definite Form ist.*

§ 313. Die Art, wie die Differentialgleichungen in § 310 aufzulösen sind, wurde in Kap. VI erklärt. $m_1$, $m_2$, etc. seien die Wurzeln der Fundamentaldeterminante, die wir hier nicht niederzuschreiben brauchen. Die Determinante ist dieselbe, wie die, welche in § 262 durch das Symbol $\Delta(\delta)$ dargestellt wurde. Wir wollen annehmen die Wurzeln seien ungleich, indem wir den Fall gleicher Wurzeln als Grenzfall ungleicher Wurzeln betrachten. Die Auflösung kann man dann so schreiben

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 e^{m_1 t} + x_2 e^{m_2 t} + \cdots \\ y = y_1 e^{m_1 t} + y_2 e^{m_2 t} + \cdots \\ z = \text{etc.} \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} dx/dt = x_1' e^{m_1 t} + x_2' e^{m_2 t} + \cdots \\ dy/dt = y_1' e^{m_1 t} + y_2' e^{m_2 t} + \cdots \\ \text{etc.} = \text{etc.} \end{array}\right\},$$

worin $x_1' = x_1 m_1$, $y_1' = y_1 m_1$, etc., $x_2' = x_2 m_2$, etc. ist.

Hier enthalten $x_1$, $y_1$, $z_1$, etc. als gemeinschaftlichen Factor eine Integrationsconstante, $x_2$, $y_2$, etc. eine zweite u. s. w. Die Form dieser Constanten braucht man hier nicht. Es reicht hin, wenn man beachtet, *dass die Coefficienten, die zu einer reellen Exponentialgrösse gehören, selbst reell sind.* Andrerseits nehmen die Coefficienten ($x_1$, $x_2$, etc.), wenn $m_1$, $m_2$ ein Paar complexer Wurzeln sind, die Form $P \pm Q\sqrt{-1}$ an.

§ 314. **Die erste Gleichung.** Substituirt man die ersten Glieder der obigen Werthe von $x$, $y$, $z$, etc. in die Gleichungen § 310, so erhält man ein System von Gleichungen, das sich von ihnen nur dadurch unterscheidet, dass $m_1$ statt $\delta$ und $x_1$, $y_1$, etc. statt $x$, $y$, etc. steht. Multiplicirt man sie bezüglich mit $x_1$, $y_1$, etc. und addirt die Resultate, so hat man

$$(A_{11}x_1^2 + 2A_{12}x_1y_1 + \text{etc.})m_1^2 + (B_{11}x_1^2 + 2B_{12}x_1y_1 + \text{etc.})m_1 + \\ + (C_{11}x_1^2 + 2C_{12}x_1y_1 + \text{etc.}) = 0.$$

Man beachte, *dass die Glieder, welche von den Buchstaben $D, E, F$ abhängen, aus dieser Gleichung vollständig verschwunden sind.*

Ebenso bemerke man, *dass die Coefficienten der Potenzen von $m$ die doppelten Functionen $A$, $B$, $C$ sind, wenn man $x_1$, $y_1$, etc. statt $x$, $y$, etc. setzt.*

§ 315. Satz I. **Ueber reelle Wurzeln.** Man kann unmittelbar die drei folgenden Sätze ableiten:

(1) *Wenn die Potentiale $A$, $B$, $C$ entweder Null oder definite Functionen sind und wenn alle drei dasselbe Vorzeichen haben, so kann die Fundamentaldeterminante keine reelle positive Wurzel haben.*

Wäre nämlich $m_1$ reell, so würden die Coefficienten $x_1$, $y_1$, etc. reell sein. Die Summe dreier positiver Grössen wäre mithin Null.

(2) *Wenn keine Widerstandskräfte vorhanden sind, d. h. wenn der Ausdruck $B$ fehlt und wenn die Potentiale $A$ und $C$ definit sind und beide dasselbe Vorzeichen haben, so kann die Fundamentaldeterminante keine reelle positive oder negative Wurzel haben.*

(3) *Wenn $A$, $B$, $C$ definite Functionen sind, das Vorzeichen von $B$ aber dem von $A$ und $C$ entgegengesetzt ist, so kann die Fundamentaldeterminante keine negative Wurzel haben.*

*Diese Sätze gelten, mögen Glieder in den Differentialgleichungen vorkommen, die von den Functionen $D$, $E$, $F$ abhängen oder nicht.*

Man beachte auch, *dass die Fundamentaldeterminante nur dann eine Wurzel gleich Null haben kann, wenn das Potential $C$ auch für von Null verschiedene reelle Werthe der Coordinaten verschwinden kann.* Wenn z. B. die Coordinate $x$ in $C$ fehlt (§ 98), so verschwindet $C$, wenn die übrigen Coordinaten Null sind, $x$ dagegen endlich ist. In diesem Fall kann $m_1$ Null sein. Fehlen auch die Kräfte, die von $B$ abhängen, so kann die Determinante zwei Wurzeln gleich Null haben.

Wenn zwei Wurzeln gleich Null vorkommen, so müssen Glieder wie $nt + \alpha$ zu einigen der Ausdrücke für die Coordinaten in § 313 addirt werden. Wenn die Anfangsbedingungen nicht derart sind, dass sie die Constanten $n$ und $\alpha$ zu Null machen, so sollten diese Glieder in den Ausdrücken $\theta = f(t)$, $\varphi = F(t)$, etc., die, wie in § 257 erklärt wurde, die stationäre Bewegung angeben, eingeschlossen sein. Das Auftreten dieser Glieder zeigt eine geringe Aenderung in der stationären Bewegung an, um welche das System nach der Voraussetzung schwingt.

§ 316. **Die zwei Gleichungen.** Genau wie in § 314 wollen wir wieder das erste Glied eines jeden der Werthe von $x$, $y$, etc. in die Bewegungsgleichungen einsetzen, dann aber die Gleichungen mit $x_2$, $y_2$, etc. multipliciren und die Resultate addiren. Man erhält so

$$\begin{aligned}[A_{11}x_1x_2 + A_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + A_{23}(y_1z_2 + y_2z_1) + \text{etc.}]m_1^2 + \\ + [B_{11}x_1x_2 + \text{etc.}]m_1 + [C_{11}x_1x_2 + \text{etc.}] = \\ = D_{12}(x_1y_2 - x_2y_1) + D_{23}(y_1z_2 - y_2z_1) + \text{etc.}]m_1^2 + \\ + [E_{12}(x_1y_2 - x_2y_1) + \text{etc.}]m_1 + [F_{12}(x_1y_2 - x_2y_1) + \text{etc.}].\end{aligned}$$

Zur Abkürzung wollen wir die Coefficienten anders schreiben, indem wir die Hälfte der Reihen durch ihre ersten Glieder darstellen und die Indices an $A$, $B$, etc. weglassen. Die Gleichung erhält dann die Gestalt

$$A(x_1x_2)m_1^2 + B(x_1x_2)m_1 + C(x_1x_2) = D(x_1y_2)m_1^2 + E(x_1y_2)m_1 + F(x_1y_2).$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich

$$\begin{aligned}A(x_1x_2)m_2^2 + B(x_1x_2)m_2 + C(x_1x_2) = - D(x_1y_2)m_2^2 - \\ - E(x_1y_2)m_2 - F(x_1y_2).\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich dann die beiden folgenden ableiten

$$\left.\begin{aligned}A(x_1x_1)m_1^2 + B(x_1x_1)m_1 + C(x_1x_1) = 0 \\ A(x_2x_2)m_2^2 + B(x_2x_2)m_2 + C(x_2x_2) = 0\end{aligned}\right\},$$

von denen die erste mit der schon in § 314 gefundenen übereinstimmt.

Wir bemerken hier, dass die Functionen $A(xx)$, $B(xx)$, $C(xx)$ in Wirklichkeit dieselben sind, wie die, welche wir früher einfach mit $A$, $B$, $C$ bezeichnet haben und ferner, dass $D(x_1y_1) = 0$, $E(x_1y_1) = 0$ $F(x_1y_1) = 0$ ist.

§ 317. Wir wollen nun annehmen, in der Fundamentaldeterminante käme ein Paar complexer Wurzeln vor von der Form $m_1 = r + p\sqrt{-1}$, $m_2 = r - p\sqrt{-1}$. Die Werthe von $x$, $y$, etc., die in § 313 gegeben wurden, werden dann

$$\begin{aligned}x &= (x_1 + x_2)e^{rt}\cos pt + (x_1 - x_2)\sqrt{-1}\, e^{rt}\sin pt + \text{etc.}, \\ y &= (y_1 + y_2)e^{rt}\cos pt + (y_1 - y_2)\sqrt{-1}\, e^{rt}\sin pt + \text{etc.},\end{aligned}$$

die, passend abgekürzt, lauten

$$\left.\begin{aligned}x &= X_1e^{rt}\cos pt + X_2e^{rt}\sin pt + x_3e^{m_3t} + \cdots \\ y &= Y_1e^{rt}\cos pt + Y_2e^{rt}\sin pt + y_3e^{m_3t} + \cdots \\ z &= \text{etc.}\end{aligned}\right\}.$$

Wenn $X_1' = rX_1 + pX_2$ und $X_2' = -pX_1 + rX_2$ etc. ist, so wird

$$\left.\begin{aligned} dx/dt &= X_1'e^{rt}\cos pt + X_2'e^{rt}\sin pt + x_3'e^{m_3 t} + \cdots \\ dy/dt &= Y_1'e^{rt}\cos pt + Y_2'e^{rt}\sin pt + y_3'e^{m_3 t} + \cdots \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned}\right\}.$$

§ 318. Wir kehren nun zu den ersten beiden Gleichungen in § 316 zurück und dividiren sie durch $m_1$ bez. $m_2$. Addirt man zuerst und subtrahirt dann die Resultate, so bekommt man

$$A(x_1x_2) + B(x_1x_2) + C(x_1x_2)\frac{r}{r^2+p^2} = \left\{D(x_1y_2)p - F(x_1y_2)\frac{p}{r^2+p^2}\right\}\sqrt{-1},$$

$$A(x_1x_2)p - C(x_1x_2)\frac{p}{r^2+p^2} = \left\{D(x_1y_2)r + E(x_1y_2) + F(x_1y_2)\frac{r}{r^2+p^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{-1}}$$

und durch Substitution

$$\left.\begin{aligned} 4A(x_1x_2) &= A(X_1X_1) + A(X_2X_2) \\ -2D(x_1y_2)\sqrt{-1} &= D(X_1Y_2) \end{aligned}\right\}$$

mit ähnlichen Resultaten für die andern Buchstaben. Aus diesen Gleichungen folgt auch, *dass $A(x_1x_2)$, wenn $A$ eine definite Function ist, nicht nur reell ist, sondern auch stets dasselbe Vorzeichen wie $A$ hat.* Aehnliche Bemerkungen gelten für die Functionen $B$ und $C$.

Wenn die Functionen $D$, $E$, $F$ fehlen, so reduciren sich die beiden ersten Gleichungen in diesem Paragraphen auf

$$\left.\begin{aligned} A(x_1x_2)2r + B(x_1x_2) &= 0 \\ -A(x_1x_2)(r^2+p^2) + C(x_1x_2) &= 0 \end{aligned}\right\},$$

es sei denn, dass $p = 0$ wäre, d. h. die Wurzeln, die complex angenommen wurden, reell wären.

Den Gleichungen kann man die bequeme Form geben

$$r = -\frac{1}{2}\frac{B(X_1X_1)+B(X_2X_2)}{A(X_1X_1)+A(X_2X_2)}, \quad r^2+p^2 = \frac{C(X_1X_1)+C(X_2X_2)}{A(X_1X_1)+A(X_2X_2)},$$

woraus sich $r$ und $p$ ergibt, wenn die Schwingungsamplituden bekannt sind.

§ 319. Satz II. **Complexe Wurzeln.** Aus den Gleichungen in § 318 lässt sich unmittelbar das folgende Theorem ableiten:

(1) *Die Fundamentaldeterminante möge symmetrisch sein, d. h. die Functionen $D$, $E$, $F$ mögen verschwinden. Die Potentiale $A$ und $B$ seien definit und von demselben Vorzeichen, während $C$ eine definite Function sein kann oder nicht. Der reelle Theil einer jeden complexen Wurzel muss alsdann negativ und von Null verschieden sein. Verschwindet das Potential $B$, so ist der reelle Theil einer jeden solchen Wurzel Null.*

*Wenn die Potentiale $A$ und $C$ definit sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben, so können complexe bez. imaginäre Wurzeln nicht vorkommen.*

Dies folgt unmittelbar aus den beiden letzten Gleichungen in § 318.

(2) *Wenn die von $D$ und $F$ abhängigen Glieder in den Gleichungen fehlen, während die von $E$ abhängigen entweder vorhanden sind oder nicht, und wenn die drei Potentialfunctionen $A$, $B$, $C$ definit sind und dasselbe Vorzeichen haben, so ist der reelle Theil $r$ einer jeden complexen Wurzel negativ und nicht Null. Wenn die Widerstandskräfte, d. h. $B$, ebenfalls fehlen, so ist der reelle Theil einer jeden complexen Wurzel Null.*

(3) *Wenn die von $D$ und $E$ abhängigen Glieder fehlen*, dagegen die von $F$ abhängigen, nicht nothwendiger Weise auch, und wenn $A$, $B$, $C$ definit sind und dasselbe Vorzeichen haben, so muss der reelle Theil $r$ einer jeden complexen Wurzel negativ sein oder, wenn er positiv ist, kleiner als $p$.

§ 320. Beisp. 1. Wenn $A$ eine definite Function ist, zu beweisen, dass $\{A(x_1 x_2)\}^2$ immer kleiner als das Product $A(x_1 x_1) \cdot A(x_2 x_2)$ ist.

Beisp. 2. Wenn $\Delta(m)$ die Determinante der Bewegung ist, $\Delta_1(m)$ der Minor des ersten Elementes der ersten Zeile, $x_1 y_1$, etc. die Minoren der ersten Zeile und $m$ irgend eine Grösse bedeutet, die nicht nothwendiger Weise eine Wurzel von $\Delta(m)$ zu sein braucht, die Identität

$$A(x_1 x_1) m^2 + B(x_1 x_1) m + C(x_1 x_1) = \Delta(m) \Delta_1(m)$$

zu beweisen.

Beisp. 3. Wenn $m_1$, $m_2$ zwei beliebige Grössen sind, die nicht nothwendiger Weise Wurzeln der Determinante $\Delta(m)$ zu sein brauchen, zu beweisen, dass

$$\left.\begin{array}{r} A(x_1 x_2) m_1^2 + B(x_1 x_2) m_1 + C(x_1 x_2) \\ - D(x_1 y_2) m_1^2 - E(x_1 y_2) m_1 - F(x_1 y_2) \end{array}\right\} = \Delta(m_1) \Delta_1(m_2) \quad \text{ist.}$$

Beisp. 4. Wenn die Determinante symmetrisch ist und die Potentiale $A$ und $C$ definit sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben, während das Potential $B$ ein beliebiges Vorzeichen haben kann, so sind sämmtliche Wurzeln der Determinante reell.

Beisp. 5. Wenn die von $F$ und $E$ abhängigen Glieder fehlen, dagegen die von $D$ abhängigen nicht nothwendiger Weise auch, und wenn die drei Potentiale $A$, $B$, $C$ definit sind und dasselbe Vorzeichen haben, so muss der reelle Theil $r$ einer jeden complexen Wurzel entweder negativ sein oder, wenn er positiv ist, kleiner als $p$.

§ 321. **Die Wirkung der Widerstandskräfte auf die Schwingungen um eine Gleichgewichtslage.** Ein System möge um seine Gleichgewichtslage schwingen, ohne dass Widerstandskräfte wirken, und die Functionen $B$, $D$, $E$, $F$ mögen daher sämmtlich Null sein. Wir nehmen auch an, die Functionen $A$ und $C$ seien definit und hätten dasselbe Vorzeichen.

Aus den Bewegungsgleichungen in § 310 ist dann sofort ersichtlich, dass die Bewegungsdeterminante, nämlich $\Delta(\delta)$, nur grade Potenzen von $\delta$ enthält. Sie ist selbstverständlich dieselbe, wie die in Kapitel II besprochene Lagrange'sche Determinante. Sowohl aus Kapitel II als aus den Paragraphen 315 und 319 dieses Kapitels folgt, dass alle Wurzeln der Gleichung $\Delta(\delta) = 0$ die Gestalt $\pm p\sqrt{-1}$ haben. Irgend eine Coordinate wird daher durch eine Reihe von der Form

$$x = X_1 \cos pt + X_2 \sin pt + \cdots$$

dargestellt.

Nun mögen einige kleine Widerstandskräfte an dem System angreifen. Wir führen dann die Glieder in die Bewegungsgleichungen ein, die von der Function $B$

abhängen und nehmen an, die so eingeführten Kräfte seien so klein, dass wir die Quadrate der Coefficienten der Function $B$ vernachlässigen können. Wir bringen dies dadurch zum Ausdruck, dass wir voraussetzen, jeder Coefficient enthalte einen Factor $\varkappa$, dessen Quadrat zu vernachlässigen ist. Wir wollen nun den Einfluss dieser Zusatzkräfte auf die frühere Bewegung ermitteln.

Wir beziehen uns hierbei wieder auf die Bewegungsgleichungen in § 310. Es seien $\Delta_1(\delta)$, $\Delta_2(\delta)$ die Bewegungsdeterminanten vor und nach der Einführung dieser Widerstandskräfte. Die Determinantengleichung wird also

$$\Delta_2(\delta) = \Delta_1(\delta) + B_{11}\,\delta I_{11}(\delta) + \text{etc.} = 0,$$

worin das Symbol $I$ die Unterdeterminanten der Elemente von $\Delta_1(\delta)$ angibt, wie in Kapitel VI erklärt wurde.

Man kann der Gleichung die Form $\Delta_1(\delta) + \varkappa\delta\varphi(\delta) = 0$ geben, worin $\varphi(\delta)$ nur grade Potenzen von $\delta$ enthält. Da $p\sqrt{-1}$ eine Wurzel von $\Delta_1(\delta) = 0$ ist, so möge die entsprechende Wurzel der neuen Gleichung $p\sqrt{-1} + r$ sein, worin also $r$ eine kleine reelle oder imaginäre Grösse ist, deren Quadrat vernachlässigt werden kann. Nach dem Taylor'schen Satz ist

$$\Delta_1'(p\sqrt{-1})\,r + \varkappa p\sqrt{-1}\,\varphi(p\sqrt{-1}) = 0.$$

Daraus folgt, weil $\Delta_1'(\delta)$ nur ungrade Potenzen von $\delta$ enthält, dass $r$ nothwendiger Weise reell ist.

Damit ist bewiesen, dass die Correction für jede Wurzel der Determinantengleichung bei der Einführung der Widerstände reell sein muss. Das bedeutet aber, dass die Correction für den imaginären Theil der Wurzel von *dem Quadrat* der Widerstände abhängt. *Die Hinzufügung von $r$ zu dem reellen Theil der Wurzel führt eine reelle Exponentialgrösse $e^{rt}$ als Factor in die Amplitude der Schwingungen ein.* Die Addition zu dem imaginären Theil ändert die *Periode* der Schwingung (§ 317). *Die Perioden der Schwingungen werden also nur durch die Quadrate kleiner Grössen beeinflusst, wenn die Widerstandskräfte eingeführt werden.*

§ 322. Die Reihe für eine beliebige Coordinate nimmt jetzt die Gestalt an (siehe § 317)

$$x = X_1 e^{rt}\cos pt + X_2 e^{rt}\sin pt + \cdots,$$

worin $p$ dieselbe Bedeutung, wie zuvor, hat und $r$ nach § 319 negativ ist. Bei denselben gegebenen Anfangswerthen von $x$, $y$, etc., $dx/dt$, $dy/dt$, etc. werden die Coefficienten $X_1$, etc. nur durch Glieder verändert, die den Factor $\varkappa$ enthalten und diese Aenderungen können, da die Coefficienten selbst klein sind, vernachlässigt werden.

Den Werth von $r$ kann man aus den Gleichungen am Ende des § 318 ableiten. Wären die Widerstände Null, so würden die reellen Exponentialgrössen fehlen und die Verhältnisse $X_1/X_2$, $Y_1/Y_2$ sämmtlich gleich sein. Bei kleinen Widerstandskräften unterscheiden sich diese Verhältnisse durch Grössen, die den kleinen Factor $\varkappa$ enthalten. Daraus folgt, dass die Verhältnisse $B(X_1X_1)/A(X_1X_1)$ und $B(X_2X_2)/A(X_2X_2)$ ebenfalls gleich sind, wenn man *das Quadrat* der kleinen Grösse verwirft. Der Ausdruck für $r$ reducirt sich daher auf die einfache Form

$$r = -\frac{1}{2}\frac{B(X_1X_1)}{A(X_1X_1)} = -\frac{1}{2}\frac{B_{11}X_1^2 + 2B_{12}X_1Y_1 + \cdots}{A_{11}X_1^2 + 2A_{12}X_1Y_1 + \cdots}.$$

Das heisst also in Worten, wie man aus § 73 erkennt: *Der Zahlenwerth von $r$ ist für irgend eine Hauptschwingung die Hälfte des Verhältnisses des mittleren Werthes der Dissipationsfunction zu dem mittleren Werth der kinetischen Energie für diese Schwingung.*

## Erzwungene Schwingungen.

§ 323. Wir wollen annehmen, ein System befinde sich in einem gegebenen Bewegungszustand, der, wie in § 257 erklärt wurde, durch die Coordinaten $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$, etc. definirt ist, worin $\theta_0$, $\varphi_0$, etc. bekannte Functionen der Zeit sind. Wir werden diese Bewegung manchmal die ungestörte Bewegung, zuweilen auch die stationäre Bewegung nennen. Wenn das System jetzt auf irgend eine Art gestört wird, so setzen wir $\theta = \theta_0 + x$, $\varphi = \varphi_0 + y$, etc., wobei $x$, $y$, etc. so klein sind, dass wir ihre Quadrate vernachlässigen können. Diese Störung kann die Folge einer kleinen Momentankraft sein, und das System möge dann seinen Schwingungen um die ungestörte Bewegung überlassen bleiben.

Doch können auch continuirliche Kräfte an dem System angreifen, welche Schwingungen um die ungestörte Bewegung hervorzurufen suchen. Da *die Schwingung* der Systeme der Gegenstand unsrer Untersuchung ist, so werden wir annehmen, diese Kräfte seien, wenn sie existiren, periodisch. Wir können annehmen, die Function $f(t)$, welche eine solche Kraft darstellt, sei nach dem aus der Trigonometrie bekannten Verfahren in eine trigonometrische Reihe entwickelt; wie z. B.

$$f(t) = Pe^{-\varkappa t}\sin(\lambda t + \alpha) + P'e^{-\varkappa' t}\sin(\lambda' t + \alpha') + \text{etc.}$$

Jedes dieser Glieder heisst *eine störende Kraft.* Der Coefficient des trigonometrischen Factors eines jeden Gliedes soll *die Grösse oder Amplitude* dieses Gliedes genannt werden. Der Winkel $\lambda t + \alpha$ heisst zuweilen *die Phase* oder auch *das Argument* und der Coefficient $\lambda$ *die Frequenz.*

Es kommt oft vor, dass die reellen Exponentialgrössen in dem Ausdruck für die Kraft fehlen. Dieser Fall wird daher im Folgenden eingehender untersucht werden. Will man auf das Fehlen der reellen Exponentialgrösse aufmerksam machen, so nennt man die störende Kraft oft eine *permanente.* Tritt die reelle Exponentialgrösse mit negativem Exponenten auf, so heisst die Kraft wohl auch *(periodisch) gedämpft.*

Manchmal ist nicht die Kraft gegeben, sondern ein Punkt des Systems gezwungen, auf eine gegebene Art zu schwingen. Alsdann besteht eine bekannte Beziehung zwischen den Coordinaten des Systems von der Form

$$ax + by + cz + \text{etc.} = Ge^{-gt}\sin(\nu t + \gamma),$$

worin $a$, $b$, $c$, etc., $G$, $g$, etc. gegebene Constanten sind. Es können auch mehrere ähnliche Relationen zwischen einigen oder sämmtlichen Coordinaten bestehen. In solchen Fällen nehmen wir an, diese gegebenen Beziehungen seien in die Differentialgleichungen eingeschlossen, obwohl sie aus einer Lagrange'schen Function, wie in § 111, nicht abgeleitet werden können. Man kann dann die in § 326 angegebene

Methode zur Ermittlung der entsprechenden erzwungenen Schwingung benutzen.

Die Kräfte, welche an dem System angreifen, werden dadurch in die Bewegungsgleichungen eingeführt, dass man sie zerlegt oder die Momente nimmt; sie werden auf diese Art mit Cosinussen oder Längen multiplicirt, welche Functionen der Coordinaten sind. Da die Quadrate kleiner Grössen vernachlässigt werden, so setzen wir für diese Factoren ihre Werthe in der Gleichgewichtslage oder bei der stationären Bewegung, um welche das System schwingt. In dem ersten Fall sind die Factoren constante Multiplicatoren der Kraft, in dem zweiten können sie periodische Functionen von $t$ sein. Wenn z. B. die Kraft $P \sin \lambda t$ durch Zerlegung $P \sin \lambda t \cos \psi$ wird und wenn $\psi = \mu t$ (wie beim Problem des Kreisels in § 207) ist, so ersetze man das Product durch zwei trigonometrische Ausdrücke, deren Phasen $(\lambda \pm \mu)t$ und deren Amplituden constant sind. Die Perioden dieser neuen Kräfte sind die der ursprünglichen Kraft in Bezug auf die stationäre Bewegung $\psi = \mu t$. Diese Complication kommt dagegen nicht vor, wenn das System um eine Gleichgewichtslage schwingt.

§ 324. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung stehen in § 310; in der Dynamik freilich fehlen im Allgemeinen die Glieder, welche von den Functionen $D$ und $F$ abhängig sind. Die Art, wie die Gleichungen gebildet werden, wenn die Widerstandskräfte fehlen, wurde in § 111 erklärt. Sind diese Widerstände vorhanden, so kann man annehmen, die Gleichungen hätten die Form

$$\left(A_{11}\delta^2 + B_{11}\delta + C_{11}\right)x + \left(\begin{matrix} A_{12}\delta^2 + B_{12}\delta + C_{12} \\ + E_{12}\delta \end{matrix}\right)y + \cdots = Pe^{-kt}\sin(\lambda t + \alpha),$$

$$\left(\begin{matrix} A_{12}\delta^2 + B_{12}\delta + C_{12} \\ - E_{12}\delta \end{matrix}\right)x + \left(A_{22}\delta^2 + B_{22}\delta + C_{22}\right)y + \cdots = Qe^{-k't}\sin(\mu t + \beta),$$

$$\text{etc.} = \text{etc.},$$

worin auf der rechten Seite nur eine störende Kraft in jeder Gleichung als Muster angegeben wurde.

Der Kürze halber empfiehlt es sich, die Gleichung, in welcher eine störende Kraft auftritt, auf eine einfache Art zu bezeichnen. Die erste Gleichung erhält man aus den Lagrange'schen (§ 111) durch Differentiation nach $\theta$ oder $x$; die zweite durch Differentiation nach $\varphi$ oder $y$. Man kann daher kurz sagen, die Kraft auf der rechten Seite der ersten Gleichung wirke *direct* auf die Coordinate $x$ und *indirect* auf $y$, $z$, etc., ferner die auf der rechten Seite der zweiten Gleichung wirke direct auf $y$ und indirect auf $x$, $z$, etc.

§ 325. **Erzwungene und freie Schwingungen.** In der Lehre von den Differentialgleichungen wird bewiesen, dass die Auflösung dieser Gleichungen zu Ausdrücken für die Coordinaten $x_1$, $y_1$, etc. führt, welche zwei Gruppen von Termen enthalten. Die erste Gruppe heisst ein *particuläres Integral* und besteht aus irgend einer Auflösung, die durch

irgend ein noch so eingeschränktes Verfahren erhalten wird. Die zweite Gruppe enthält alle Integrationsconstanten, heisst die *Zusatzfunction* und stellt den Werth der Coordinate dar, wenn alle störenden Kräfte auf der rechten Seite weggelassen werden. Die Zusatzfunction ist daher dieselbe, wie die in dem ersten Abschnitt dieses Kapitels besprochene und gefundene Lösung.

Die Zusatzfunctionen in den Ausdrücken für die Coordinaten geben alle möglichen Schwingungen des Systems um die ungestörte Bewegung, wenn keine störenden Kräfte an ihm angreifen. In der Dynamik heissen sie die *natürlichen oder freien Schwingungen des Systems.*

Die particulären Integrale für die verschiedenen Coordinaten, welche die Wirkungen einer störenden Kraft anzeigen, heissen *die durch diese Kraft erzwungenen Schwingungen.* Dieser Definition entsprechend kann man jedes particuläre Integral als die erzwungene Schwingung ansehen. *In der Dynamik ist es Gebrauch, aus dem particulären Integral den Theil vollständig auszuscheiden, den man in die Zusatzfunction einschliessen kann. Der Rest heisst dann die erzwungene Schwingung.*

Die erzwungene Schwingung stellt die ganze Wirkung einer störenden Kraft auf ein System, *dessen Anfangsbedingungen gegeben sind,* nicht dar. Um die ganze Wirkung zu finden, nehme man das allgemeine Integral und bestimme die Constanten mit Hülfe der Anfangsbedingungen. Offenbar können die Werthe von $x$, $y$, etc. Terme aus der Zusatzfunction enthalten, welche noch zu dem particulären Integral hinzukommen.

Eine freie Schwingung bedeutet nicht nothwendiger Weise eine Hauptschwingung, obwohl der Ausdruck manchmal in diesem Sinn gebraucht wird (§§ 53 und 116). Jede Bewegung, welche durch eine beliebige Anzahl von Gliedern, die aus der Zusatzfunction entnommen sind, dargestellt wird, ist eine freie Bewegung. Das Wort „frei“ soll den Gegensatz zu „erzwungen“ angeben.

Den Ausdruck „Zusatzfunction“ hat Liouville in Bd. 13 des *Journal Polytechnique,* 1832 in einem Artikel über gebrochene Differentialquotienten gebraucht. Auch in Gregory's *Examples,* 1841 kommt er vor. Die Unterscheidung von Wellen in „freie“ und „erzwungene“ findet man in Airy's *Tides and Waves* (Art. 278), die in der *Encyclopaedia Metropolitana,* 1842 veröffentlicht sind.

§ 326. **Die erzwungene Schwingung zu ermitteln.** Um ein particuläres Integral für irgend eine Kraft $Pe^{-\varkappa t}\sin(\lambda t + \alpha)$ zu ermitteln, folgen wir den früher in Kap. 6 erklärten Methoden. Wenn $\Delta(\delta)$ die Determinante der Bewegung ist und $I_1(\delta)$, $I_2(\delta)$, etc. die Minoren des ersten, zweiten, etc. Elementes in derjenigen Horizontalreihe von $\Delta(\delta)$ sind, welche der Gleichung entspricht, in welcher die Kraft vorkommt, so hat man

$$x = \frac{I_1(\delta)}{\Delta(\delta)} Pe^{-\varkappa t}\sin(\lambda t + \alpha), \quad y = \frac{I_2(\delta)}{\Delta(\delta)} Pe^{-\varkappa t}\sin(\lambda t + \alpha), \quad z = \text{etc.}$$

Wir wollen jetzt beweisen, dass diese Operatoren bei jeder der Coordinaten zu zwei trigonometrischen Ausdrücken führen. Diese beiden Ausdrücke bilden die erzwungene Schwingung in der betreffenden Coordinate.

§ 327. Zur Ausführung der durch die obigen Functionen von $\delta$ angegebenen Operationen benutzen wir die folgende einfache Regel. *Um die Operation* $F(\delta) = \frac{I(\delta)}{\Delta(\delta)}$ *an* $Pe^{-\varkappa t} \frac{\sin}{\cos}(\lambda t + \alpha)$ *auszuführen, setze man* $\delta = -\varkappa + \lambda\sqrt{-1}$ *und reducire den Operator auf die Form* $L + M\sqrt{-1}$. *Das gesuchte Resultat ist dann* $Pe^{-\varkappa t}\left(L + M\frac{\delta}{\lambda}\right)\frac{\sin}{\cos}(\lambda t + \alpha)$.

*Ist die Kraft permanent,* so ist $\varkappa = 0$ und es ergibt sich unmittelbar, dass *die folgende erzwungene Schwingung ebenfalls permanent ist.* Wenn die Periode einer erzwungenen Schwingung der einer freien Schwingung, welche sich nicht wiederholt, nahezu gleich ist, so sind die Grössen der erzwungenen Schwingungen in den verschiedenen Coordinaten ungefähr denen der freien Schwingungen in denselben Coordinaten proportional; siehe auch § 343.

Um die obige Regel zu beweisen, bemerke man, dass nach § 265

$$F(\delta)e^{mt} = \left(L + M\sqrt{-1}\right)e^{mt}$$

ist, worin $m = -\varkappa + \lambda\sqrt{-1}$. Ersetzt man nun den imaginären Theil der Exponentialgrösse durch seinen trigonometrischen Werth und setzt die reellen und imaginären Theile auf jeder Seite der Gleichung einander gleich, so ergibt sich das Resultat unmittelbar.

§ 328. Beisp. Wenn die Determinante $\Delta(\delta)$ eine Anzahl $\alpha$ von Wurzeln hat, von denen jede gleich $m$, d. h. $-\varkappa + \lambda\sqrt{-1}$, ist, so nimmt das Resultat eine unendliche Gestalt an. Man beweise, dass in diesem Fall der Operator sich durch

$$\left\{t^\alpha I(\delta) + \alpha t^{\alpha-1} I'(\delta) + \cdots + I^\alpha(\delta)\right\} / \Delta^\alpha(\delta)$$

ersetzen lässt, worin die Coefficienten nach dem binomischen Satz gebildet sind und $\Delta^\alpha(\delta)$, etc. den $\alpha^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $\Delta(\delta)$, etc. angibt. Jede dieser Operationen kann jetzt nach der in dem letzten Paragraphen angegebenen Regel ausgeführt werden.

Um es zu beweisen, ersetze man die Wurzel $m$ durch $m + h$, worin dann später $h$ gleich Null gesetzt wird. Man findet

$$\frac{I(\delta)}{\Delta(\delta)}e^{mt} = \left\{I(m)e^{mt} + \cdots + \frac{\partial^\alpha}{\partial m^\alpha}\left[I(m)e^{mt}\right]\frac{h^\alpha}{L\alpha}\right\} \Big/ \left\{\Delta^\alpha(m)\frac{h^\alpha}{L\alpha}\right\}.$$

Die ersten $\alpha$ Glieder dieser Reihe kann man bei jeder Coordinate, obwohl sie unendlich gross sind, in die Zusatzfunction verweisen; siehe § 266. Die Lösung wird daher durch das $(\alpha + 1)^{\text{te}}$ Glied gegeben. Sie reducirt sich nach dem Leibnitz'schen Theorem zur Ermittelung des $\alpha^{\text{ten}}$ Differentialquotienten eines Productes auf den oben angegebenen Operator.

§ 329. Beisp. Ein Massenpunkt, wie z. B. die Erde, beschreibt eine nahezu kreisförmige Bahn um das Centrum einer Kraft, deren Anziehung umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes variirt. Ferner greifen zwei störende Kräfte an ihm an, die durch $P\sin\lambda t$ und $Q\sin\lambda t$ dargestellt werden und die Richtung des

Radiusvectors bez. senkrecht zu ihm haben. Wenn die Polarcoordinaten $r, \theta$ durch $r = a + x$, $\theta = nt + y$ gegeben sind, zu beweisen, dass die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}(\delta^2 - 3n^2)\,x - 2an\delta y &= P \sin \lambda t\\ 2n\delta x + a\delta^2 y &= Q \sin \lambda t\end{aligned}\right\}$$

sind. Man zeige auch, dass die erzwungenen Schwingungen durch

$$x = \frac{P}{n^2 - \lambda^2} \sin \lambda t - \frac{2nQ}{\lambda(n^2 - \lambda^2)} \cos \lambda t,$$

$$y = \frac{2nP}{a\lambda\,(n^2 - \lambda^2)} \cos \lambda t + \frac{(3n^2 + \lambda^2)\,Q}{a\lambda^2(n^2 - \lambda^2)} \sin \lambda t$$

bestimmt werden.

Wenn die Periode der Kraft entweder derjenigen in der kreisförmigen Bahn nahezu gleichkommt oder sehr lang ist, so wird die erzwungene Schwingung sehr gross, siehe § 345. Auf einen andern wichtigen Punkt wird in § 354 hingewiesen.

§ 330. **Ruhige und zitternde Bewegung.** Wir haben angenommen, das System sei im Stande, in irgend einem Zustand stationärer Bewegung zu bleiben, grade wie ein Reif in einer verticalen Ebene über den Boden rollt. In Wirklichkeit aber schwingt in Folge gewisser kleiner Störungen das System nach beiden Seiten dieser stationären Bewegung, wobei der Betrag der Störung für jede Coordinate stets durch die Summe der natürlichen und erzwungenen Schwingungen dargestellt wird. Ist die Periode einer dieser Schwingungen klein, so geht das System schnell von der einen auf die andre Seite seiner mittleren oder stationären Bewegung über. Die mittlere Bewegung scheint alsdann dem Auge eine *zitternde* zu sein. Sind dagegen die Perioden aller Schwingungen sehr lang, so geht der Wechsel von der einen Seite der mittleren Bewegung auf die andre so langsam vor sich, dass er als Schwingung kaum wahrzunehmen ist. Die mittlere Bewegung heisst dann eine *ruhige*.

§ 331. **Verschwinden der freien Schwingungen.** Wenn ein System durch eine continuirliche permanente störende Kraft in Schwingung gesetzt wird, so werden, wie wir gesehen haben, zwei Arten von Schwingungen erzeugt, freie und erzwungene. Sind keine Widerstandskräfte vorhanden, so bleiben beide während der Bewegung nebeneinander fortbestehen. Treten aber solche Kräfte auf, so wird durch sie in die freie Schwingung eine Exponentialgrösse eingeführt, in Folge deren ihre Amplitude beständig abnimmt, und die freie Schwingung daher schliesslich unbemerkbar wird (§ 319). Die Amplitude der erzwungenen Schwingung vermindert sich jedoch nicht in demselben Masse. Denn die störende Kraft hat, da sie permanent ist, keinen reellen Exponentialfactor und in § 323 ist daher $\varkappa = 0$. Die resultirende erzwungene Schwingung ist daher auch permanent, § 327. *Auf diese Art wird die Schwingung des Systems schliesslich von den Anfangsbedingungen unabhängig und nur von den erzwungenen Schwingungen abhängig.*

Die von einer permanenten störenden Kraft hervorgerufene erzwungene Schwingung heisst daher zuweilen die *permanente Schwingung.*

§ 332. *Es ist manchmal wichtig, die Geschwindigkeiten, mit denen die verschiedenen freien Schwingungen unter dem Einfluss der Widerstandskräfte zu verschwinden suchen, miteinander zu vergleichen.* Offenbar hängen sie von der Grösse des negativen Exponenten $r$ in dem durch die Widerstände eingeführten Exponentialfactor $e^{rt}$ ab. Da dieser Factor nicht nothwendiger Weise in allen Gliedern derselbe zu sein braucht, so nehmen die sämmtlichen freien Schwingungen nicht mit derselben Geschwindigkeit ab. Einige können unmerkbar geworden sein, ehe noch die Grösse anderer sich sehr geändert hat.

Wenn die Anfangsamplituden irgend einer Hauptschwingung für alle Coordinaten bekannt sind, so lässt sich der Werth von $r$ für diese Schwingung aus den Gleichungen in § 318 ableiten. Schwingt aber das System um eine Gleichgewichtslage und sind die Widerstandskräfte klein, so nimmt der Ausdruck für $r$ die sehr einfache Form in § 322 an. Wenn $X_1$, $Y_1$, etc. die Amplituden für die Coordinaten $x$, $y$, etc. irgend einer freien Hauptschwingung sind, so wird dieser Ausdruck

$$r = -\frac{1}{2}\frac{B_{11}X_1^2 + 2B_{12}X_1Y_1 + \cdots}{A_{11}X_1^2 + 2A_{12}X_1Y_1 + \cdots},$$

worin die lebendige Kraft und die Dissipationsfunction durch

$$2A = A_{11}x'^2 + 2A_{12}x'y' + \cdots, \quad 2B = B_{11}x'^2 + 2B_{12}x'y' + \cdots$$

gegeben sind.

Wie man diesen Ausdruck für $r$ zu benutzen hat, wird am besten an einigen Beispielen gezeigt.

§ 333. Beisp. 1. Wir wollen uns denken, eine homogene dichte Kette bestehe aus einer Reihe gleicher sehr kleiner Punkte, von denen jeder die Masse $m$ habe und die durch sehr kurze Fäden verbunden wären, von denen jeder die Länge $l$ und keine Masse habe. $x$, $y$, etc. seien die Verschiebungen der Massenpunkte eines solchen Fadens bei z. B. seitlichen Schwingungen. Die lebendige Kraft ist dann durch $\frac{1}{2}\Sigma mx'^2$ gegeben. Man nehme an, der Widerstand der Atmosphäre würde *durch eine verzögernde an jedem Massenpunkt angreifende Kraft dargestellt, die wie seine absolute Geschwindigkeit variirt.* Man beweise, dass die Dissipationsfunction $B$ sich durch $2B = \Sigma \varkappa m x'^2$ ausdrücken lässt. Setzt man voraus, $\varkappa$ sei für alle Massenpunkte dasselbe, so ergibt sich unmittelbar $r = -\frac{1}{2}\varkappa$, *die proportionale Wirkung des Widerstandes der Luft auf alle freien Schwingungen ist daher die nämliche.*

Beisp. 2. Wenn die Massenpunkte der Kette statt seitlich der Länge nach schwingen, so ist der Widerstand der Luft geringer wie zuvor, während die Wirkung der Zähigkeit oder unvollkommenen Elasticität mehr hervortritt. Wir wollen annehmen, sie würde durch eine Reihe von Kräften dargestellt, die der Compression oder Ausdehnung benachbarter Massenpunkte widerstehen und *jede Kraft sei der relativen Geschwindigkeit der beiden Massenpunkte, zwischen denen sie eine Action und Reaction ausübt, proportional.* Man beweise, dass die Dissipationsfunction $B$ durch $2B = \Sigma \varkappa m (x' - y')^2$ dargestellt werden kann.

Allgemein gesprochen ist also $r$ für die Art Schwingung am grössten, bei welcher der Unterschied der Amplituden der Schwingungen nebeneinander liegender

Massenpunkte am grössten ist. *Schwingungen dieser Art verschwinden am schnellsten, weil die Zähigkeit der relativen Geschwindigkeit proportional ist, während diejenigen, bei welchen die benachbarten Massenpunkte sich nahezu zusammenbewegen, noch lange Zeit nachher sichtbar bleiben können.* Man drückt dies manchmal kurz aus, indem man sagt, *die Wirkung der Zähigkeit bestehe darin, dass sie die kurzen Wellen vor den langen vernichtet.*

Beisp. 3. Wenn die Coordinaten so gewählt werden, dass die Dissipationsfunction und die lebendige Kraft die Gestalt

$$2B = B_{11}x'^2 + B_{22}y'^2 + \cdots, \quad 2T = A_{11}x'^2 + A_{22}y'^2 + \cdots$$

annehmen, so liegt der Werth von $r$ für jede Hauptschwingung zwischen dem grössten und kleinsten der Brüche $B_{11}/2A_{11}$, $B_{22}/2A_{22}$, etc. Man bemerke, *dass diese Grenzen von der Kräftefunction unabhängig sind und daher immer die nämlichen bleiben, die Kräfte mögen sein, welche sie wollen.*

Beisp. 4. Die Membrane, welche das obere Fell einer Trommel bildet, schwingt seitwärts, wenn sie geschlagen wird. Falls der Widerstand der Luft gering ist und wie die absolute Geschwindigkeit eines jeden Massenpunktes variirt, zu zeigen, dass alle freien Schwingungen denselben reellen Exponentialfactor haben.

Beisp. 5. Man erkläre, warum, wenn successive Töne auf einem musikalischen Instrument erzeugt werden, jeder Ton von dem vorhergehenden nicht merkbar beeinflusst wird. Siehe § 331.

**§ 334. Herschel's Theorem über die Periode der erzwungenen Schwingung.** Aus der Vergleichung der Glieder in § 327, welche die erzwungene Schwingung ausmachen, mit dem Glied, welches die störende Kraft bildet, ergibt sich, dass die Periode der erzwungenen Schwingung dieselbe ist, wie die der Kraft, durch welche sie veranlasst wird. *Wenn daher irgend eine periodische Störungsursache an einem System schwingender Massenpunkte angreift, so richten sich die erzwungenen Schwingungen nach der Periode der sie erzeugenden Ursache.* Dieses wichtige Theorem verdankt man Sir J. Herschel, der es zuerst in seiner *Theory of Sound* aufstellte (Encyc. Met. 1830). Sein Beweis ist jedoch von dem hier gegebenen durchaus verschieden.

Man kann den Satz verallgemeinern. Die störende Kraft und die resultirende erzwungene Schwingung haben nicht nur dieselbe Periode, sondern auch dieselbe reelle Exponentialgrösse. Wenn daher die Fundamentaldeterminante keine gleichen Wurzeln hat, so haben beide dieselbe allgemeine Form oder denselben Typus. Eine permanente Kraft erzeugt eine permanente Schwingung, eine verschwindende Schwingung ist die Folge einer verschwindenden Kraft.

Bei dem Beweis dieses Theorems wurde angenommen, es sei das System schwingender Massenpunkte so beschaffen, dass man die Quadrate der Verschiebungen vernachlässigen kann.

Das Theorem gilt auch nur für erzwungene Schwingungen. Will man daher den Herschel'schen Satz auf die absolute sichtbare Bewegung anwenden, so muss man, von der Anfangsbewegung an gerechnet, soviel Zeit verstreichen lassen, dass die freien Schwingungen allmählig aufhören können. Siehe § 331.

§ 335. Als Beispiel zu diesem Princip führen wir an: Wenn ein tönender Körper, wie z. B. eine Trommel, Schwingungen in der Luft verursacht, so ist die Periode oder Höhe des in der Luft und dem Ohr erzeugten Tones dieselbe, wie die des tönenden Körpers.

§ 336. Ein andres Beispiel hat Herschel gegeben. Ein Lichtstrahl falle auf eine ihn brechende Substanz, z. B. Glas. Die Schwingungen des einfallenden Lichtes erregen Schwingungen innerhalb des Glases. Sie dauern so lange, wie die erregende Ursache wirkt und bilden daher die erzwungene Schwingung. Die Periode des gebrochenen Lichtes ist nach dem Herschel'schen Theorem die nämliche, wie die des einfallenden Lichtes.

Es gibt aber auch einige Ausnahmen. So hat Sir G. Stokes in den *Phil. Trans.*, 1852 darauf hingewiesen, dass die Periode des ultravioletten Lichtes bei dem Durchgang durch gewisse Substanzen so verlängert werden kann, dass es sichtbar wird. Prof. Tyndall ferner erhitzte mittelst der ultrarothen Strahlen ein Platinplättchen bis zum Weissglühen und verkürzte auf diese Art die Perioden so, dass die Schwingungen sichtbar wurden. Siehe seine *Rede Lecture,* 1865.

Um zu begreifen, woher diese Ausnahmen kommen, muss man sich erinnern, *dass die Restitutionskräfte der ersten Potenz der Verrückungen proportional angenommen,* d. h., nur die ersten Potenzen von $x$, $y$, etc. beibehalten wurden. Nun können die Moleküle eines Körpers aus kleineren dicht zusammengepackten Atomen zusammengesetzt sein. Wenn die fraglichen Schwingungen derart sind, dass sich nur die Moleküle untereinander bewegen, so können diese Verrückungen im Vergleich mit den Abständen der Moleküle von einander so klein sein, dass die Restitutionskraft $f(\xi)$, welche die Folge einer Verschiebung $\xi$ eines Moleküls ist, durch die erste Potenz, die in der Mac Laurin'schen Entwicklung vorkommt, ersetzt werden kann. Wenn aber die Schwingungen derart sind, dass sich die dicht zusammengepackten Atome eines jeden Moleküls untereinander bewegen, so kann die Restitutionskraft nicht länger wie die erste Potenz der Verrückung variiren. Die Gleichungen in § 324 können für die erste, aber nicht für die letzte Bewegungsart gelten. Genaueres findet man in Sir G. Stokes' Abhandlung, S. 549 u. 550.

Offenbar kann die Bewegung von der oben beschriebenen sehr verschieden sein, wenn die Quadrate und Cuben der kleinen Grössen nicht vernachlässigt werden können. Es wird dies besonders auffallend, wenn die Glieder erster Ordnung fehlen. Ein elementares Beispiel wurde in Bd. 1, § 450 besprochen, bei welchem eine Schwingung zu der Differentialgleichung $\delta^2\theta + a\theta^3 = 0$ führte. Es wurde gezeigt, dass die Periode weit entfernt davon ist, constant zu sein, vielmehr umgekehrt wie der Schwingungsbogen variirt. Wenn wir hier eine störende Kraft durch den Ausdruck $P \sin \lambda t$ auf der rechten Seite der obigen Gleichung darstellen, so kann der Gleichung offenbar nicht durch einen Ausdruck von der Form $\theta = Q \sin \lambda t$ genügt werden, die Periode der erzwungenen Schwingung ist daher nicht dieselbe, wie die der Kraft.

§ 337. **Die Vergrösserung der Wirkung störender Kräfte.** Bei dynamischen Problemen, wie sie in der Natur vorkommen, hat man oft mit einem System zu thun, welches frei um eine mittlere Lage schwingt und an dem eine Menge kleiner Kräfte angreift, welche diese Bewegung zu stören sucht. Einige können sehr klein, andre grösser sein. Ist es nun gestattet, die kleinen im Vergleich mit den grösseren ausser Acht zu lassen? Vielleicht ist die Anzahl der Kräfte zu gross, als dass man die Wirkung einer jeden untersuchen könnte. Offenbar haben wir

hier irgend eine Regel nöthig, die uns bei der Auswahl derjenigen Kräfte leitet, welche die bedeutendste Wirkung haben. In der Theorie der Planeten z. B. kommt bei jedem Planeten eine zahllose Menge von Störungsursachen seiner Bewegung vor. Es würde nicht möglich sein, die wirkliche Bewegung ohne ein Princip zu bestimmen, das uns in den Stand setzte, die Kräfte, welche unmerkliche Störungen erzeugen, zu vernachlässigen.

An einem System mögen zwei permanente störende Kräfte angreifen, welche durch die zwei Glieder $P \sin(\lambda t + \alpha)$ und $Q \sin(\mu t + \beta)$ in der ersten Gleichung des § 324 dargestellt seien. Die entsprechenden erzwungenen Schwingungen in der Coordinate $x$ sind durch

$$x = \frac{I(\delta)}{\varDelta(\delta)} P \sin(\lambda t + \alpha) + \frac{I(\delta)}{\varDelta(\delta)} Q \sin(\mu t + \beta)$$

gegeben, worin $I(\delta)$ der Minor des auf $x$ bezüglichen Terms in der ersten Zeile der Determinante $\varDelta(\delta)$ ist. Diese Coefficienten enthalten den Operator $\delta$ und ihre Grösse hängt daher von $\lambda$ und $\mu$ ab. Daraus schliessen wir, *dass die Wirkungen der verschiedenen permanenten störenden Kräfte, die unter ähnlichen Bedingungen an derselben Coordinate angreifen, nicht ihrer Grösse einfach proportional sind, sondern von ihren Perioden abhängen.*

§ 338. Ohne uns jedoch auf permanente störende Kräfte zu beschränken, wollen wir die erzwungene Schwingung betrachten, die durch die störende Kraft $Pe^{-\varkappa t} \sin \lambda t$ hervorgerufen wird. Setzt man wie früher (§ 327) $m = -\varkappa + \lambda\sqrt{-1}$, so ist die resultirende erzwungene Schwingung der Coefficient von $\sqrt{-1}$ in $\frac{I(\delta)}{\varDelta(\delta)} Pe^{mt} = P\frac{I(m)}{\varDelta(m)} e^{mt}$. Wenn $m$ einer Wurzel von $\varDelta(\delta) = 0$ nahezu gleich kommt, so ist der Nenner dieses Ausdrucks sehr klein. Die Typen aber der freien Schwingungen sind, wie in § 262 gezeigt wurde, durch $\varDelta(m) = 0$ gegeben. Daraus folgt, *dass eine störende Kraft, deren Periode und reelle Exponentialgrösse nahezu dieselben sind, wie die irgend einer freien Schwingung, eine grosse erzwungene Schwingung hervorruft.*

§ 339. Gewöhnlich hat eine störende Kraft den permanenten Typus $P \sin(\lambda t + \alpha)$. Wenn keine Widerstandskräfte auftreten, so gibt es in dem System freie permanente Schwingungen von der Form $A \sin(pt + \alpha)$ und wenn $\lambda$ irgend einem Werth von $p$ nahezu gleich ist, so erzeugt die störende Kraft, wie wir eben gesehen haben, eine vergrösserte erzwungene Schwingung. Die Widerstandskräfte führen aber reelle Exponentialgrössen als Factoren der freien Schwingungen ein (§ 319). Der Typus der störenden Kraft ist daher nicht mehr der nämliche, wie der einer freien Schwingung. Daraus ergibt sich, *dass eine Wirkung der Widerstände auf eine störende permanente Kraft, welche sonst eine vergrösserte erzwungene Schwingung erzeugen würde, darin besteht, diese Schwingung zu modificiren und in Grenzen zu halten.*

§ 340. Als einfaches Beispiel zu diesem dynamischen Princip wollen wir den Fall *einer schweren Schaukel betrachten, welche durch eine Reihe leichter Stösse und Züge, wenn sie rechtzeitig angebracht werden, so sehr leicht in heftige Schwingung gesetzt werden kann.* Stossen wir, wenn die Schaukel sich von uns entfernt und ziehen wir, wenn sie sich nähert, so wird ihr Gang beständig beschleunigt und der Schwingungsbogen bei jedem folgenden Lauf grösser. Eine solche Reihe von abwechselnden Stössen und Zügen ist praktisch das, was wir eine permanente störende Kraft genannt haben, deren Periode dieselbe, wie die der freien Schwingung der Schaukel, ist. Wenn dagegen die Periode derjenigen der freien Schwingung sehr ungleich ist, so können zwar einige Stösse und Züge den Schwingungsbogen noch vergrössern, jedenfalls kommt aber eine Zeit, zu der sich die Wirkung umkehrt. Die Kraft wirkt der Bewegung der Schaukel entgegen und die Schwingungen nehmen ab, gerade wie sie vorher zugenommen haben.

Auf dieselbe Art werden schwere Kirchenglocken gewöhnlich in Bewegung gesetzt, indem man die Seile rechtzeitig anzieht. Um die Schwingung zu vergrössern, sollte jedes Seil nur dann gezogen werden, wenn es herabkommt.

Ein grosses schweres Schiff kann, wenn man seine Schwingungsdauer zu bestimmen wünscht, dadurch zum Rollen gebracht werden, dass man einen Trupp Leute zur richtigen Zeit über das Deck quer hin und her laufen lässt; die Leute müssen bergan laufen. Einige interessante Beispiele zu diesem allgemeinen Princip werden auch in Tyndall's *Sound*, 1867, S. 101 gegeben.

Es ist allgemein bekannt, dass eine Klaviersaite, die der äusseren Luft ausgesetzt wird und auf welche die Schwingungen dieses Mittels einwirken, manchmal durch diese Bewegung nicht beeinflusst zu werden scheint und zu einer andern Zeit einen Ton von sich gibt. Die Saite wird nämlich zwar immer in Bewegung gesetzt; wenn jedoch die Stösse der Luft nicht *in den richtigen Intervallen einander folgen,* so ist die erzeugte Bewegung zu gering, um merkbar zu sein. Hat aber einer der in der Luft existirenden Töne dieselbe Periode wie einer der Töne der Saite, so sucht der Druck der Luft auf die Saite, wie die oben beschriebenen Stösse auf das Pendel, die Bewegung beständig zu vergrössern.

Auf der andern Seite wird die Intensität dieses speciellen Tones in der Luft um den der Saite mitgetheilten Betrag geschwächt, während die Stärke der übrigen in der Luft existirenden Töne unbeeinflusst bleibt. So entzieht eine Klaviersaite oder ein anderer schwingender Körper dem umgebenden Mittel dieselben Töne, die sie in der Luft erzeugen würden, wenn sie auf andre Art, als durch die Luft, in Bewegung gesetzt werden.

Durch Ausdehnung dieser Theorie auf die Schwingungen des Lichtes zeigte Sir G. Stokes, dass ein Körper zu gleicher Zeit eine Lichtquelle sein kann, indem er Strahlen von bestimmter Periode ausgibt und ein absorbirendes Mittel, in dem er Strahlen von derselben Periode, die durch ihn gehen, auslöscht. Auf diese Art gab er eine dynamische Erklärung der Entdeckung Foucault's und Kirchhoff's, dass die dunklen Fraunhofer'schen Linien im Sonnenspectrum von der Anwesenheit solcher Substanzen in der Sonnenatmosphäre herrühren, die sonst die entsprechenden hellen Linien erzeugen. *Philosophical Magazine,* März 1860.

Helmholtz benutzte dieses Princip bei seinen Versuchen mit den Tönen musikalischer Instrumente. Siehe seine „Lehre von den Tonempfindungen“, Braunschweig 1877. Wenn er einen aus einer unbekannten Mischung verschiedener Töne bestehenden Ton analysiren wollte, so stellte er eine über einen Resonanzboden gespannte Membrane in die Nähe. Sie verrieth durch ihre Schwingungen sofort die Gegenwart irgend welcher Töne von ihrem eignen System von Perioden.

Tyndall ferner beschreibt die merkwürdige Wirkung eines Tones auf eine in einer Pfeife eingeschlossene Flamme, wenn die Höhe des Tones mit dem der Pfeife übereinstimmte.

§ 341. *Ein weiteres Beispiel liefert das Rollen der Schiffe auf der See.* Das Schiff hat seine eigene natürliche Schwingung, wozu dann noch die erzwungene kommt, die der Schwingung der Wellen folgt. Wenn die Perioden beider zeitlich zusammenfallen, so kann das Rollen des Schiffes sehr stark werden. White erwähnt in seinem *Manual of Naval Architecture* mehrere interessante Beispiele dafür. Nachdem er darauf hingewiesen, dass ein fast unmerklicher Wogengang gewisse Schiffe in starkes Rollen bringt, berichtet er vom Achilles, einem Schiff, das in dem Rufe eines besonders ruhigen Ganges stand und welches bei seiner Abfahrt von Portland in fast vollständiger Windstille stärker rollte, als an der Küste von Irland bei sehr schwerem Wetter. Auch bei dem Kreuzen der combinirten englischen Geschwader im Jahre 1871 zeigte sich, dass der Monarch, der im Sturm die meisten anwesenden Schiffe an ruhigem Gang weit übertraf, bei einer Gelegenheit (möglicher Weise in Folge der nahen Uebereinstimmung der natürlichen Periode der Schiffes mit der der Wellen) in langen Wellen stärker rollte, als die wegen ihres Rollens im schlimmsten Rufe stehenden Schiffe. In einer späteren Abhandlung, die er vor der *Institution of Naval Architects,* 1894 vorlas, führte White aus, wie die Perioden der Wellen in einigen ähnlichen Fällen gemessen wurden und dass sie mit denen der Schiffe übereinstimmten.

Beisp. Eine Reihe von Wellen geht über das Meer, deren Rücken senkrecht zur $x$-Axe sind und bedeutenden Abstand von einander haben. Die Höhe des Wassers für irgend einen Punkt $x$ zu irgend einer Zeit $t$ sei durch $z = H \cos n(ct - x)$ gegeben. Die Wirkung des Flüssigkeitsdruckes auf ein schwimmendes Schiff, das seine Breitseite den Wogen zukehrt, werde durch ein Paar dargestellt, das dem Winkel z. B. $k(\theta - \varphi)$ proportional ist, den der Mast mit der Normalen zur Welle macht, wobei $\theta$, $\varphi$ die Winkel sind, die der Mast und die Normale mit der Verticalen bilden. Man beweise, dass die Schwingungen des Schiffes durch

$$\theta = L \sin(pt + \gamma) + \frac{p^2 nH}{p^2 - n^2 c^2} \sin n(ct - x)$$

bestimmt werden, worin $k^2/p$ das Trägheitsmoment des Schiffes und $L$, $\gamma$ zwei Integrationsconstante bedeuten.

Man zeige, dass $2\pi/p$ die Schwingungsperiode des Schiffes in stillem Wasser ist, und dass, wenn diese Periode viel kürzer als die der Wellen ist, die Masten stets fast senkrecht auf der Welle stehen; wenn sie dagegen viel länger ist, dass dann das Verdeck fast horizontal bleibt (siehe auch § 346). Man beweise auch, dass man, wenn die Periode des Schiffes derjenigen der Welle auf unbequeme Art nahe kommt, dem Uebelstand abhelfen kann, indem man die Geschwindigkeit oder die Bewegungsrichtung des Schiffes ändert.

§ 342. Ein anderes Beispiel zu diesem Princip liefern Capitain Kater's Experimente zur Bestimmung der Länge des Secundenpendels. *Es war wichtig, festzustellen, ob der Stützpunkt seines Pendels vollkommen fest läge.* Er benutzte dazu ein empfindliches und einfaches Instrument, das ein Uhrmacher Hardy erfunden hatte und welches die geringste Bewegung der Stütze sofort verrathen hätte. Es besteht aus einem Stahldraht, dessen unterer Theil in das Messingstück, welches ihn trägt, eingefügt und so plattgeschlagen ist, dass er eine empfindliche Feder bildet. Auf dem Draht kann man ein kleines Gewicht gleiten lassen, mit dessen Hülfe man ihn *in derselben Zeit* eine Schwingung machen lassen kann, wie das Pendel, zu dessen Untersuchung er dienen soll. Ist das Gewicht auf diese Art eingestellt, so wird er auf das Material gesetzt, an dem das Pendel befestigt ist. Liegt das Material nicht vollkommen fest, so wird die Bewegung dem Draht mitgetheilt, der das Pendel dann bei seinen Schwingungen begleitet. Diese geistreiche Erfindung war ihrem Zweck durchaus angemessen und lieferte den ausreichenden Beweis für die Stabilität des Aufhängungspunktes. Siehe *Phil. Trans.* 1818.

§ 343. In § 338 wurde gezeigt, dass eine störende Kraft eine grosse Schwingung in $x$ hervorrufen kann, wenn der Nenner $\Delta(\delta)$ in seiner Periode klein ist. Der Operator $I(\delta)$, der in dem Zähler auftritt, kann dies aber ändern. Ist z. B. das Resultat der Operation mit der Unterdeterminante $I(\delta)$ Null, so verschwindet die erzwungene Schwingung.

Diese Unterdeterminanten sind nun gerade die Operatoren, die zur Ermittlung der freien Schwingungen gebraucht werden. In § 262 haben wir z. B.

$$x = I(\delta)\ [\text{Typus}].$$

Wenn also irgend eine der freien Schwingungen in einer der Coordinaten fehlt, wobei sie jedoch in den andern vorhanden sein kann, so bringt eine störende Kraft von nahezu derselben Periode keine grosse erzwungene Schwingung in dieser Coordinate hervor. Daraus folgt, *dass eine störende Kraft in irgend einer Coordinate nur dann eine grosse erzwungene Schwingung erzeugen kann, wenn in dieser Coordinate eine freie Schwingung von nahezu derselben Periode stattfindet, welche nahezu dieselbe reelle Exponentialgrösse enthält.*

§ 344. Wenn die Kraft nahezu $Pe^{-\varkappa t}\sin(\lambda t + \alpha)$ gleich ist, so kann es vorkommen, dass $\alpha$ Wurzeln der Determinante $\Delta(\delta)$ gleich $-\varkappa + \lambda\sqrt{-1}$ sind, während der Minor $I(\delta)$ keine solchen Wurzeln besitzt. Vergleicht man die Ausdrücke für die erzwungenen Schwingungen in den Coordinaten $x$, $y$, etc. in § 326, so erkennt man, dass in diesem Fall die erzwungene Schwingung $\alpha$-mal durch eine kleine Grösse dividirt wird. Man sagt daher, sie werde $\alpha$-mal vergrössert. Wenn aber $\beta$ solche Wurzeln in dem Minor $I(\delta)$ vorkommen, so wird die erzwungene Schwingung $(\alpha - \beta)$-mal vergrössert. Aus § 272 ist ersichtlich, dass alsdann die Coordinate $x$ in den Coefficienten ihrer freien Schwingung Potenzen von $t$ aufwärts bis zur $(\alpha - \beta - 1)$-ten hat. Wir schliessen daraus, *dass die erzwungene Schwingung in irgend einer Coordinate einmal mehr vergrössert wird, als die höchste Potenz von $t$ beträgt, welche in dieser Coordinate in Verbindung mit den freien Schwingungen von nahezu derselben Periode vorkommt.*

§ 345. Wir wollen als Beispiel einen Planeten betrachten, der einen Kreis um die Sonne beschreibe, welche in dem Mittelpunkt des Kreises festliegen möge. Der Radiusvector $r$ ist dann einer Constanten gleich und die Länge $\theta = nt + \varepsilon$. Wenn der Planet leicht gestört wird und nur die Anziehung der Sonne auf ihn wirkt, so beschreibt er eine Ellipse von kleiner Excentricität $e$. Die darauf folgenden Aenderungen im Radiusvector und der Länge sind klein und können durch die Grössen, die wir $x$ und $y$ genannt haben, dargestellt werden. Aus der Lehre von der elliptischen Bewegung wissen wir, dass nahezu

$$x = a - ae\cos(nt + \alpha),$$
$$y = bt + c + 2e\sin(nt + \alpha)$$

ist, worin $a$, $b$, $c$ kleine Grössen sind und $2\pi/n$ die Periode des Planeten bedeutet. Sie sind selbstverständlich die freien Schwingungen. Vergleicht man sie mit dem Typus $\sin(\lambda t + \alpha)$, so sieht man, dass zwei freie Schwingungen in $x$ vorkommen, nämlich $\lambda = n$ und $\lambda = 0$. In dem Ausdruck für $y$ gibt es dagegen drei freie Schwingungen, nämlich $\lambda = n$ und zwei gleiche Werthe von $\lambda$, von denen jeder Null ist. Diese gleichen Werthe führen die Glieder mit Potenzen von $t$ ein, wie in § 266 erklärt wurde.

*Wir schliessen daraus, dass irgend eine kleine permanente periodische Kraft eine vergrösserte Störung sowohl im Radiusvector als der Länge des Planeten hervorbringt, wenn ihre Periode der des Planeten nahezu gleich oder sehr lang ist. Da es zwei gleiche freie Perioden in der Länge gibt, deren Typus $\lambda = 0$ ist, und nur eine in dem Radiusvector, so werden diese kleinen störenden Kräfte, deren Perioden sehr lang sind, zweimal in ihren Wirkungen auf die Länge und einmal in dem*

*Radiusvector vergrössert.* Wenn daher irgend solche Kräfte, wie diese, an dem Planeten angreifen, so muss man ihre Wirkung untersuchen. Kleine störende Kräfte, deren Grösse unter dem Normalmass derjenigen kleinen Grössen bleibt, die noch beibehalten werden, können nur dann ausser Acht bleiben, wenn ihre Perioden von den soeben angegebenen verschieden sind.

Diese Regeln helfen uns, in der Theorie des Mondes und der Planeten die Werthe der störenden Kräfte abzuschätzen. Sie setzen uns in den Stand, aus der grossen Menge kleiner Kräfte die auszuscheiden, die merkbare Wirkungen auf die Bewegung der Planeten hervorbringen können; siehe § 337.

§ 346. **Die Verminderung der Wirkung störender Kräfte.** Wir wollen den Ausdruck in § 326 für die erzwungene Schwingung, welche die Folge einer continuirlichen störenden Kraft ist, wieder aufnehmen. Wir bemerken vor Allem, dass der Nenner des Coefficienten höhere Potenzen von $\lambda$ enthält, als der Zähler. Um sich davon zu überzeugen, beachte man nur, dass die Determinante der Bewegung $\Delta(\delta)$ zwei Potenzen von $\delta$ mehr hat, als irgend einer ihrer Minoren. Es ergibt sich daher, dass in der Grenze, wenn $\lambda$ sehr gross ist, d. h. *wenn die Periode der störenden Kraft viel kleiner ist als die irgend einer freien Schwingung, die erzeugte erzwungene Schwingung im Allgemeinen unbedeutend ist.*

§ 347. Wir bemerken weiter, dass, wenn der Typus einer continuirlichen störenden Kraft $f(t)$, welche direct auf die Coordinate $x$ wirkt, derart ist, dass er der Differentialgleichung $I_1(\delta) f(t) = 0$ genügt, die erzwungene Schwingung in der Coordinate $x$ gänzlich verschwindet. $I_1(\delta) = 0$ ist nun die Determinantengleichung, deren Wurzeln die freie Schwingung ergeben, wenn die Coordinate $x$ gezwungen wird, Null zu sein. Es ergibt sich daher, dass, *wenn der Typus einer störenden Kraft, welche direct auf irgend eine Coordinate $x$ wirkt, nahezu derselbe ist, wie irgend eine der Arten freier Schwingung, falls $x$ genöthigt wird, Null zu sein, die erzwungene Schwingung in $x$ sehr klein ist.* Siehe § 343.

§ 348. Beisp. An einem gespannten Faden, dessen Enden $A$ und $B$ festliegen, greift in einem Punkt $C$ eine seitliche permanente störende Kraft an. Wenn die Periode der Kraft einer der Perioden eines mit derselben Spannung ausgestreckten Fadens gleich ist, der aber entweder die Länge $AC$ oder $CB$ hat, zu zeigen, dass die erzwungene Schwingung den Punkt $C$ nicht stört. Wenn die Fäden $AC$, $CB$ keine freie Periode gemeinschaftlich haben, zu zeigen, dass der eine Faden durch die erzwungene Schwingung nicht bewegt wird.

Man kann dies auch aus elementaren Betrachtungen ableiten. Man halte den Faden bei $C$ fest und setze den Theil $AC$ in Bewegung, während $CB$ in Ruhe bleibt. Die Componente des Drucks bei $C$ senkrecht zum Faden stellt eine permanente störende Kraft dar, deren Periode derjenigen einer der freien Schwingungen von $AC$ gleich ist. Ersetzt man den Druck durch die störende Kraft, so ist $AC$ in Schwingung und $CB$ in Ruhe.

§ 349. **Die Verminderung der Wirkung der Momentankräfte.** Während sich ein Maschinensystem in einem Zustand stationärer stabiler

Bewegung befindet, kann es plötzlichen Stössen ausgesetzt sein, deren Wirkung man möglichst zu vermindern suchen muss. Wir wollen in Kürze die Mittel besprechen, die uns zu diesem Zweck zur Verfügung stehen.

Wenn der Stoss seine Arbeit verrichtet und aufgehört hat zu wirken, so ist das System aus seinem normalen Bewegungszustand verschoben. Es beginnt alsdann um diesen Zustand zu schwingen. Eine Wirkung des Stosses besteht also darin, dass er ein neues System freier Schwingungen einführt. Wenn Widerstandskräfte vorhanden sind, so fangen diese freien Schwingungen an allmählich aufzuhören und das System sucht einen Zustand stationärer Bewegung anzunehmen. *Eine Methode, die Wirkungen störender Momentankräfte zu corrigiren, besteht also darin, dass man die Widerstandskräfte vergrössert.*

Die Widerstände, welche man zu diesem Zweck absichtlich auf den Gang der Maschine wirken lässt, sollten richtig angeordnet werden. Sie dürfen die stationäre Bewegung nicht stören und ihre Wirkung muss erst beginnen, wenn die Maschine von ihrem normalen Gang abweicht. Ein Beispiel dazu wurde in § 105 bei der Besprechung des Regulators gegeben.

§ 350. Die thatsächliche Wirkung eines Stosses $X$ auf irgend eine Coordinate, wie z. B. $x$, lässt sich leicht aus den Gleichungen in § 118 ableiten. Ist $\Delta$ die Determinante der quadratischen Form $A$, wobei $2A = A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + \cdots$ und $I_{11}$ der Minor des Elements $A_{11}$ ist, so haben wir

$$\delta x_1 - \delta x_0 = (I_{11}/\Delta)\, X.$$

Wenn es daher darauf ankommt, die Wirkung der Momentankraft $X$ zu vermindern, so kann man eine neue Vorrichtung an der Maschine anbringen oder ihre Theile derart anders anordnen, dass die Determinante $\Delta$ im Vergleich mit $I$ so viel als möglich vergrössert wird.

Ist die Function $A$ positiv und definit, so ist ihre Determinante $\Delta$ positiv. Man kann dann, wie im nächsten Paragraphen geschieht, zeigen, dass das Verhältniss von $I_{11}$ zu $\Delta$ im Allgemeinen durch Addition des Quadrates einer linearen Function von $x$, $y$, etc. zu der Function $A$ *verringert* wird. Nun ist aber die quadratische Function $A$ mit accentuirten Coordinaten ein Theil des Ausdrucks für die lebendige Kraft in § 111 und stets eine positive Function. Wenn daher irgend eine Addition zu der lebendigen Kraft gemacht wird, so ist die entsprechende Addition zu dieser Function ebenfalls positiv und kann als die Summe einer Anzahl Quadrate linearer Functionen ausgedrückt werden. *Im Allgemeinen lassen sich daher die directen Wirkungen von Stössen auf ein System dadurch schwächen, dass man seine lebendige Kraft vergrössert.*

*Man erreicht dies in der Regel dadurch, dass man ein Schwungrad an der Maschine anbringt.* Die lebendige Kraft rotirender Körper ist $Mk^2\omega^2$, worin $Mk^2$ das Trägheitsmoment des Körpers für die Axe und $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Der Vortheil bei der Benutzung eines Rades besteht darin, dass man bei einer gegebenen Quantität von Zusatzmaterie die additiven Glieder durch Vergrösserung des Trägheitsradius beliebig vergrössern kann.

§ 351. Beisp. 1. Wenn die Coordinaten so gewählt werden, dass der Factor zweiten Grades, der zu dem quadratischen Ausdruck für $2A$ hinzugefügt wird, die

Form $\mu y^2$ hat, unter $y$ irgend eine von $x$ verschiedene Coordinate verstanden, zu zeigen, dass aus $I_{11}/\varDelta$ das Verhältniss $(I_{11} + \mu \varDelta_2)/(\varDelta + \mu I_{22})$ wird, worin $\varDelta_2$ die zweite Unterdeterminante ist, die man durch Weglassen der beiden ersten Horizontal- und Verticalreihen erhält, und worin der Index eines jeden $I$, wie gewöhnlich, das Element angibt, dessen Unterdeterminante $I$ ist. Man zeige auch, dass das zweite Verhältniss um $I_{12}{}^2\mu/\varDelta(\varDelta + \mu I_{22})$ kleiner als das erste ist. Ferner, *dass diese Differenz positiv oder Null ist und einen endlichen Grenzwerth hat, wenn $\mu$ unendlich gross wird.*

Beisp. 2. Wenn der Factor zweiten Grades, der zu dem quadratischen Ausdruck für $2A$ hinzugefügt wird, $\mu(ax + by + cz + \cdots)^2$ ist, zu zeigen, dass die directe Wirkung einer durch $X$ dargestellten Momentankraft auf die Coordinate $x$ durch diese Addition zu der Trägheit *nicht geändert* wird, wenn

$$a^2 I_{11}{}^2 + 2ab I_{11} I_{12} + b^2 I_{12}{}^2 + \cdots = 0$$

ist.

§ 352. **Das Intervall, nach welchem die Phase der Wirkung auf dieselbe Phase der Ursache folgt.** Wenn irgend eine störende Kraft abwechselnd die Abweichung des Systems von seiner ungestörten Lage zu vermehren und zu vermindern sucht, *so ist es nicht nothwendiger Weise richtig, dass diese Abweichung thatsächlich zunimmt, wenn die Kraft eine Vermehrung anstrebt, oder abnimmt, wenn sie auf eine Verminderung ausgeht.* Um sich davon zu überzeugen, bemerke man, dass nach § 326 die erzwungene Schwingung, die durch die störende Kraft $Pe^{-\varkappa t}\sin(\lambda t + \alpha)$ hervorgerufen wird,

$$Pe^{-\varkappa t}\{L\sin(\lambda t + \alpha) + M\cos(\lambda t + \alpha)\} =$$
$$= P\sqrt{L^2 + M^2}\, e^{-\varkappa t}\sin(\lambda t + \alpha + \operatorname{arc\,tg} M/L)$$

ist.

Bei dieser Transformation muss offenbar, wenn die Quadratwurzel in dem Coefficienten als positiv angesehen wird, der zu der Phase addirte Winkel derart sein, dass sein Sinus dasselbe Vorzeichen wie $M$, sein Cosinus dasselbe wie $L$ hat. Die Folge ist, dass alle möglichen Werthe der Aenderung der Phase um Vielfache von $2\pi$ differiren.

Wenn man den Ausdruck für die erwungene Schwingung mit dem für die störende Kraft vergleicht, so sieht man, dass ihre Maxima nicht gleichzeitig eintreten. Das Maximum der Schwingung kommt später als das der Kraft, und das Intervall beträgt $-(1/\lambda)\operatorname{arc\,tg}(M/L)$. Ebenso *folgt jede Phase der Schwingung auf die entsprechende Phase der Kraft nach demselben Intervall.*

Die Aenderung der Phase in irgend einer Coordinate hängt auf solche Art von den Werthen von $L$ und $M$ für diese Coordinate ab. Sie lassen sich auf die in § 327 angegebene Art leicht ermitteln; dort wurde gezeigt, dass man $L + M\sqrt{-1}$ erhält, wenn man in dem Operator $I(\delta)/\varDelta(\delta)$ für diese Coordinate $\delta = -\varkappa + \lambda\sqrt{-1}$ setzt.

§ 353. Wenn die störende Kraft permanent ist, d. h. die Form $P\sin(\lambda t + \alpha)$ hat, und wenn die Widerstandskräfte vernachlässigt werden, so enthält die Determinante $\varDelta(\delta)$ nur grade Potenzen von $\delta$. Wir schliessen daher aus § 326, dass,

*wenn die Unterdeterminante $I(\delta)$ auch nur grade Potenzen von $\delta$ enthält, die Phase der erzwungenen Schwingung dieselbe wie die der Kraft oder um $\pi$ grösser ist. Enthält die Unterdeterminante $I(\delta)$ nur ungrade Potenzen, so ist die Phase der Schwingung um $\pm\frac{1}{2}\pi$ grösser als die der Kraft.*

Betrachtet man die *directe* Wirkung einer Kraft auf eine Coordinate, so enthält der Minor $I(\delta)$ ebenso wie die Determinante $\Delta(\delta)$ nur grade Potenzen von $\delta$. Wenn die centrifugalen Kräfte fehlen, wie es z. B. der Fall ist, wenn das System um eine Gleichgewichtslage schwingt, so gibt es in jedem Minor nur grade Potenzen von $\delta$. *In diesen Fällen ist die erzwungene Schwingung einfach ein positives oder negatives Vielfache der störenden Kraft ohne weitere Aenderung der Phase.*

§ 354. Beisp. Ein Massenpunkt beschreibt eine nahezu kreisförmige Bahn um das Centrum einer Kraft, die ihn nach dem Newton'schen Gesetz anzieht, und eine permanente störende Kraft wirkt längs des Radiusvectors auf ihn ein. Man zeige, dass der Massenpunkt sich in jedem Augenblick innerhalb der mittleren kreisförmigen Bahn befindet, wenn die Kraft nach aussen, und ausserhalb, wenn sie nach innen wirkt, vorausgesetzt, dass die Periode der Kraft kleiner ist, als die des Massenpunktes auf seiner ungestörten Bahn um das Centrum der Kraft. Umgekehrt dagegen verhält es sich, wenn die Periode der störenden Kraft grösser ist, als die des Massenpunktes. Würde eine ähnliche Unterscheidung der Fälle eintreten, wenn die Centralkraft umgekehrt wie eine Potenz des Abstandes anzöge, die grösser als 3 ist? Siehe § 329.

## Zweite Annäherungen.

§ 355. Bei dem Versuch, die Schwingungen eines dynamischen Systems zu ermitteln, gehen wir im Allgemeinen mit fortgesetzten Annäherungen vor. Zuerst vernachlässigen wir alle Quadrate der kleinen Grössen und erhalten so ein System linearer Differentialgleichungen. Wir lösen diese auf, setzen die Resultate in die Glieder zweiter Ordnung ein und behandeln diese Functionen von $t$ als störende Kräfte. Alsdann werden die ihnen entsprechenden erzwungenen Schwingungen gesucht. Die Operation wird dann als dritte Annäherung wiederholt u. s. w.

Wie man sich aus § 337 erinnert, bringt, wenn die Widerstandskräfte klein sind, eine permanente störende Kraft, deren Periode der irgend einer der freien Schwingungen nahezu gleich ist, eine *vergrösserte erzwungene Schwingung* hervor. Daraus folgt, dass eine kleine Kraft von der richtigen Periode, die in den Differentialgleichungen nur auftreten würde, wenn Glieder, sagen wir, der dritten Ordnung eingeschlossen würden, Schwingungen in den Coordinaten verursachen kann, die von der zweiten oder ersten Ordnung sind.

*Wenn wir daher unsere Resultate bis auf irgend eine gegebene Ordnung genau haben wollen, so müssen wir diejenigen periodischen Glieder höherer Ordnung in den Differentialgleichungen zur Prüfung beibehalten, deren Perioden irgend einer der freien Schwingungen nahezu gleich sind.*

Man sieht auch ein, wie wichtig es ist, mit grösseren Annäherungen vorzugehen. Jene kleinen Glieder, die so grosse erzwungene Schwingungen

hervorbringen, erscheinen vielleicht erst, wenn man die Glieder höherer Ordnung untersucht. Es könnten uns also wichtige Schwingungen entgehen, wenn man es bei der ersten Annäherung bewenden liesse.

§ 356. Bei der Substitution der ersten Annäherung in die Glieder höherer Ordnung kommt es zuweilen vor, dass permanente störende Kräfte erscheinen, *deren Perioden genau die nämlichen sind, wie die einiger der freien in der ersten Annäherung eingeschlossenen Schwingungen.* Tritt dieser Fall ein, so ändert, wie in § 328 gezeigt wurde, die erzwungene Schwingung ihren Charakter. Die Lösung enthält jetzt Glieder mit Potenzen von $t$ als Factor. Diese Glieder werden, da sie nicht durch die richtigen Exponentialfactoren in Schranken gehalten sind (§ 283), so gross, dass sich das System weit von dem durch die angenäherte Lösung bezeichneten Zustand entfernt.

Das heisst dann freilich soviel als, dass unsere erste Annäherung der Wahrheit nicht nahe genug kommt, um auch nur als Annäherung Dienste leisten zu können. In den meisten dynamischen Problemen werden die störenden Kräfte als Functionen der Coordinaten gegeben und alsdann durch die angenäherte Lösung als Functionen der Zeit ausgedrückt. Die Ausdrücke für die Kräfte selbst sind also nur Annäherungen. Es *kann* daher vorkommen, dass, wenn man eine genauere erste Annäherung an die Bewegung erhalten kann, die kleinen Glieder, welche eine so grosse Abweichung von der ersten Annäherung anzeigen, nicht auftreten.

*Um eine hinreichend genaue erste Annäherung an die Bewegung zu finden, reicht es vielleicht nicht hin, die Lösung der Differentialgleichungen bei Vernachlässigung aller Glieder höherer Ordnung zu adoptiren. Wir müssen in diese Differentialgleichungen alle jene kleinen Glieder höherer Ordnung einschliessen, welche die Bewegung wesentlich beeinflussen. Erst die Lösung dieser modificirten Gleichungen, wenn eine ermittelt werden kann, ist als erste Annäherung zu nehmen.*

Wir wollen die Sache in etwas anderer Form wiederholen. Die erste Annäherung umfasst alle grössten Glieder in den Ausdrücken für die Coordinaten und kann im Allgemeinen als Darstellung der sichtbaren Bewegung des Systems adoptirt werden. Eine störende Kraft nun, wie die eben beschriebene, welche an dem System angreift, ändert die sichtbare Bewegung beträchtlich und umgekehrt wird ihre eigene Periode durch die Aenderung der Bewegung modificirt. Das System nimmt daher einen neuen Zustand stationärer Bewegung mit Schwingungen um *diese* stationäre Bewegung an. Wir werden dadurch genöthigt, die frühere erste Annäherung zu verlassen und eine solche zu benutzen, die als permanente Darstellung der neuen sichtbaren Bewegung dienen kann.

Untersucht man eine solche neue erste Annäherung näher, wie in den folgenden Beispielen, so findet man oft, dass sie denselben allgemeinen Charakter wie die frühere hat und sich nur dadurch wesentlich von ihr unterscheidet, dass die freie Schwingung, deren Periode die nämliche war wie die der Kraft, modificirt wurde. Wir schliessen daraus, *dass eine kleine störende Kraft, wenn sie gänzlich oder zum Theil eine Function der Coordinaten ist und dieselbe Periode wie eine freie Schwingung des Systems hat, die Wirkung haben kann, diesen Typus freier Schwingung aus dem System zu entfernen und ihn durch einen andern Typus von verschiedener Periode zu ersetzen.*

§ 357. Ehe wir zu der allgemeinen Theorie übergehen, wollen wir die Art des Verfahrens an einem einfachen Beispiel erläutern.

*Ein Massenpunkt schwingt in einer graden Linie um ein Kraftcentrum, dessen Anziehung in dem Abstand $x$ durch $p^2x + \beta x^3$ dargestellt wird. Man finde die Dauer einer kleinen Schwingung.*

Die Bewegungsgleichung ist offenbar

$$d^2x/dt^2 + p^2x = -\beta x^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Bei der ersten Annäherung vernachlässigen wir das Glied auf der rechten Seite, weil es von der dritten Ordnung kleiner Grössen ist. Man findet dann

$$x = M \sin(pt + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Um eine zweite Annäherung zu erhalten, substituiren wir diesen Ausdruck in das vorher vernachlässigte Glied. Man hat

$$d^2x/dt^2 + p^2x = -\tfrac{1}{4}\beta M^3\{3 \sin(pt + \alpha) - \sin 3(pt + \alpha)\} \quad . \quad . \quad (3).$$

Das erste trigonometrische Glied auf der rechten Seite hat dieselbe Periode, wie die Schwingung, welche die erste Annäherung darstellt und modificirt daher diese Annäherung (§ 356). Um seine Wirkungen einzuschliessen, muss Gleichung (2) geändert werden. Diese geänderte Lösung muss bei ihrer Substitution in die Differentialgleichung die linke Seite nicht gleich Null wie zuvor, sondern einer sehr kleinen Grösse, nämlich der kleinen störenden Kraft, gleich machen. Als versuchsweise Lösung wollen wir daher dieselbe allgemeine Form beibehalten. Die Buchstaben $M$ und $\alpha$ dienen, da sie unbestimmt sind, noch weiter als allgemeine Symbole; nur wollen wir $p$ durch $p + \mu$ ersetzen, worin $\mu$ eine kleine Grösse bedeutet, die durch die störende Kraft zu bestimmen ist. Wir geben daher der ersten Annäherung die Form

$$x = M \sin\{(p + \mu)t + \alpha\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Geht man nun zur zweiten Annäherung über, so hat man

$$d^2x/dt^2 + p^2x = -\tfrac{3}{4}\beta M^3 \sin\{(p + \mu)t + \alpha\}.$$

Ist die Correction erfolgreich gewesen, so muss dieser Gleichung durch unsere verbesserte erste Annäherung genügt werden. Substituirt man, so ergibt sich, dass dies der Fall ist, wenn

$$M\{-(p + \mu)^2 + p^2\} = -\tfrac{3}{4}\beta M^3, \quad \text{also nahezu} \quad \mu = \frac{3}{8}\frac{\beta}{p}M^2$$

ist.

Die Schwingungen des Massenpunktes um das Kräftecentrum werden daher sehr nahekommend durch Gleichung (4) dargestellt. *Die Wirkung der störenden Kraft* $-\beta x^3$ *besteht darin, dass sie die Schwingungsdauer um eine Grösse verkürzt, die von dem Quadrat des Bogens abhängt.*

§ 358. Wäre die Anziehungskraft statt der oben gegebenen $p^2x + \beta(dx/dt)^3$ gewesen, so lässt sich zeigen, dass dieses Verfahren uns im Stich gelassen hätte.

Nimmt man die erste Annäherung wie vorher an und substituirt in die Differentialgleichung, so erhält man

$$d^2x/dt^2 + p^2x = -\tfrac{1}{4}\beta M^3\{3\cos(pt + \alpha) + \cos 3(pt + \alpha)\}.$$

Wir wollen, wie früher, das zweite trigonometrische Glied vernachlässigen und versuchen, das erste in unsere erste Annäherung einzuschliessen. Nimmt man die verbesserte Form (4) an und substituirt, so würde man finden

$$M\{-(p + \mu)^2 + p^2\}\sin\{(p + \mu)t + \alpha\} = -\tfrac{3}{4}\beta M^3 \cos\{(p + \mu)t + \alpha\}.$$

Diese Gleichung kann aber durch irgend einen constanten Werth von $\mu$ nicht erfüllt werden. *Die Wirkung dieser störenden Kraft besteht daher nicht lediglich darin, dass sie die Schwingungsdauer ändert.*

§ 359. Beisp. Ein Massenpunkt beschreibt eine nahezu kreisförmige Bahn um ein Kräftecentrum, dessen Anziehung im Abstand $r$ durch $\mu\left(u^2+\beta u^n\right)$ dargestellt wird, worin $u$ den reciproken Werth von $r$ bedeutet. Wenn $\beta$ sehr klein ist, zu zeigen, dass die Bahn nahezu durch

$$u=\alpha\{1+e\cos(c\theta-\alpha)\}$$

gegeben ist, worin

$$c=1-\frac{1}{2}\beta\alpha^{n-3}(n-2)\left\{1+\frac{1}{8}(n-3)(n-4)e^2+\text{etc.}\right\}$$

ist, vorausgesetzt, dass das Quadrat von $\beta$ vernachlässigt werden kann. Dieses Beispiel ist die Modification eines Falles, der in der Theorie des Mondes vorkommt.

§ 360. **Allgemeine Theorie.** Nachdem wir die Art, wie die Glieder höherer Ordnung zu behandeln sind, an verschiedenen Beispielen erläutert haben, wollen wir jetzt den Gegenstand allgemeiner betrachten. *Unsere Aufgabe besteht darin, die erste angenäherte Lösung so zu modificiren, dass sie die Wirkungen kleiner Kräfte, deren Perioden dieselben wie die der freien Schwingungen sind, wenn dies überhaupt möglich ist, in sich einschliesst* (§ 356). Das allgemeine Resultat, zu dem wir kommen, wird in der Uebersicht am Ende der Untersuchung gegeben.

Wir nehmen an, die linken Seiten der Differentialgleichungen enthielten alle ersten Potenzen der kleinen Coordinaten $x$, $y$, $z$, etc. Sie erhalten daher die Gestalt, die ihnen in § 324 oder allgemeiner in § 262 gegeben wurde. Die störenden Kräfte werden auf die rechten Seiten gebracht und enthalten Potenzen und Producte der Coordinaten $x$, $y$, etc. und ihrer Differentialquotienten, die höher als die erste Potenz sind. Diese sämmtlichen störenden Kräfte würden daher vernachlässigt werden, wenn man nur die Glieder erster Ordnung berücksichtigen wollte. Wir nehmen auch an, diese störenden Kräfte seien nicht explicite Functionen der Zeit. Ist diese letzte Bedingung nicht erfüllt, so muss die folgende Entwicklung etwas modificirt werden.

§ 361. Um die Symbole einfacher zu gestalten, wollen wir die Exponentialwerthe der Sinusse und Cosinusse nehmen. Die erste Annäherung, die man erhält, wenn alle Glieder, die über die erste Ordnung hinausgehen, in der Differentialgleichung vernachlässigt werden, sei

$$x=M_1e^{m_1t}+M_2e^{m_2t}+\cdots,\quad y=N_1e^{m_1t}+N_2e^{m_2t}+\cdots,\ \text{etc.}=\text{etc.}\quad (1),$$

worin $m_1$, $m_2$, etc. die reellen oder imaginären Wurzeln der Determinante $\Delta(\delta)$ sind (§ 262). Um eine zweite Annäherung zu erhalten, substituiren wir diese Werthe von $x$, $y$, etc. in die verschiedenen kleinen Glieder, die zuvor vernachlässigt worden waren. Nimmt man ein Glied, welches die Producte und Potenzen der Variabelen enthält, so ergibt das Resultat der Substitution störende Kräfte von der Form

$$\Sigma Pe^{(fm_1+gm_2+\cdots)t}\quad\ldots\ldots\quad (2),$$

worin die Ordnung des Gliedes $f+g+\cdots$ ist. Wenn diese Grössen $f$, $g$, etc. derart sind, dass irgend eine Anzahl Beziehungen von der Form

$$fm_1+gm_2+\cdots=m_1\quad\ldots\ldots\quad (3)$$

besteht, so gibt es genau ebensoviele unter diesen störenden Kräften, welche den Typus $Pe^{m_1t}$ haben. Die erzwungenen Schwingungen, die aus ihnen hervorgehen, erhält man durch Benutzung des Operators $I(\delta)/\Delta(\delta)$; sie sind offenbar unendlich gross. Um sie in die erste Annäherung einzuschliessen, ersetzen wir die Gleichungen (1) durch

$$x=M_1e^{n_1t}+M_2e^{n_2t}+\cdots,\quad y=N_1e^{n_1t}+N_2e^{n_2t}+\cdots\ \text{etc.}=\text{etc.}\quad (4),$$

worin $M$, $N$, etc. nicht nothwendiger Weise dieselben Grössen, wie zuvor, zu sein brauchen, und jedes $n$ nur wenig von dem entsprechenden $m$ verschieden ist. Substituirt man, wie früher, so erhält man natürlich eine störende Kraft von der Form (2), nur dass an die Stelle der $m$ jedesmal ein $n$ tritt. Nimmt man an, dieselben Beziehungen beständen zwischen den Exponenten wie zuvor, nämlich

$$f n_1 + g n_2 + \cdots = n_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

so hat diese Kraft den Typus $Pe^{n_1 t}$. Auch andere Beziehungen ähnlich denen unter (5) mit dem Unterschied, dass $n_2$ oder $n_3$, etc. statt $n_1$ auf der rechten Seite steht, können vorkommen; sie führen dann andere störende Kräfte ein, deren Wirkungen ebenfalls in die neue erste Annäherung einzuschliessen sind.

Diese Kräfte inbegriffen, kann man die Differentialgleichungen in der Form

$$\left.\begin{aligned} f_{11}(\delta)\,x + f_{12}(\delta)\,y + \cdots &= P_1 e^{n_1 t} + P_2 e^{n_2 t} + \cdots \\ f_{21}(\delta)\,x + f_{22}(\delta)\,y + \cdots &= Q_1 e^{n_1 t} + Q_2 e^{n_2 t} + \cdots \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

schreiben, worin die Functionssymbole $f_{11}(\delta)$ etc. der Kürze wegen gebraucht werden. Ist es uns gelungen, die Wirkungen dieser störenden Kräfte in unsere neue erste Annäherung einzuschliessen, so müssen die in (4) gegebenen Werthe von $x$, $y$, etc. diesen Differentialgleichungen genügen. Durch Substitution erhält man

$$\left.\begin{aligned} f_{11}(n_1)\,M_1 + f_{12}(n_1)\,N_1 + \cdots &= P_1 \\ f_{21}(n_1)\,M_1 + f_{22}(n_1)\,N_1 + \cdots &= Q_1 \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und ähnliche Gleichungen für jede der übrigen störenden Kräfte.

In diesen Gleichungen sind die $M$ als willkürlich anzusehen, indem ihre Werthe dazu bestimmt sind, den Anfangsbedingungen der Bewegung zu genügen. Wir haben die Aufgabe, die Werthe der übrigen Coefficienten zu ermitteln, d. h. der $N$ und der in den Gliedern der $M$ vorkommenden $n$. *Diese Werthe der $n$ müssen auch den Beziehungen* (5) *genügen. Nimmt man an, diese Probe sei gemacht,* so haben wir Werthe der Coordinaten gefunden, die den Differentialgleichungen bis zur ersten Ordnung genügen und die störenden Kräfte, welche die Stabilität des Systems zu bedrohen schienen, enthalten.

§ 362. Jede der Kräfte $P$, $Q$, etc. kann aus verschiedenen Gliedern von verschieden kleiner Ordnung bestehen. Von dem kleinsten wird aber vorausgesetzt, dass es von höherer Ordnung, als die Coefficienten $M$, $N$, etc. ist. Nimmt man nur die niedrigsten Potenzen, die in $P$, $Q$, etc. vorkommen, so kann man leicht eine erste Annäherung an die Werthe von $n_1$, $n_2$, etc. finden. Durch Auflösung der Gleichungen (7) ergibt sich

$$M_1\,\Delta(n_1) = P_1\,I_{11}(n_1) + Q_1\,I_{21}(n_1) + \text{etc.},$$

worin $I_{11}(n)$, etc., wie gewöhnlich, die Minoren der Determinante $\Delta(n)$ sind. Es sei $n_1 = m_1 + \mu_1$, $n_2 = m_2 + \mu_2$, etc. Da alle Glieder auf der rechten Seite kleiner als $M_1$ sind, so kann man in diesen Gliedern $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, etc. setzen. Beachtet man nun, dass $\Delta(m_1) = 0$ ist, so hat man

$$M_1\,\frac{\partial \Delta(m_1)}{\partial m_1}\,\mu_1 = P_1\,I_{11}(m_1) + Q_1\,I_{21}(m_1) + \text{etc.} \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Auf dieselbe Art erhält man

$$M_2\,\frac{\partial \Delta(m_2)}{\partial m_2}\,\mu_2 = P_2\,I_{11}(m_2) + Q_2\,I_{21}(m_2) + \text{etc.}$$

Die Kräfte $P_1$, etc. sind Functionen von $M_1$, $N_1$, etc., $M_2$, $N_2$, etc. Aus den Gleichungen (7) ergibt sich aber, dass die Verhältnisse von $M_1$, $N_1$, etc. sich von den Verhältnissen der Unterdeterminanten $I_{11}(m_1)$, $I_{12}(m_2)$ etc. durch Grössen von der Ordnung $P/M$ unterscheiden. Man kann daher bei der Berechnung der Werthe von $P_1$, etc. für $N_1$, etc. die Grössen $N_2$, etc. mit Hülfe dieser Verhältnisse substituiren. Die rechten Seiten der Gleichungen (8) sind also sämmtlich bekannte Functionen der willkürlichen Grössen $M$ und der Wurzeln der Determinantengleichung $\Delta(\delta) = 0$.

Die Grössen $f$, $g$, etc. sind gewöhnlich positive ganze Zahlen. In diesem Fall sind die Ordnungen der Grössen $P$, etc. nicht kleiner als $f + g +$ etc. Daraus folgt, dass die Correctionen $\mu_1$, $\mu_2$, etc. mindestens die Ordnung $f + g +$ etc. $- 1$ haben.

§ 363. **Uebersicht über die Resultate.** Die Resultate der Gleichungen (8) lassen sich in eine Regel bringen.

Wir gehen mittelst der ersten Annäherung, nämlich $x = M_1 e^{m_1 t}$, die durch Vernachlässigung aller Glieder höherer Ordnung in den Differentialgleichungen gefunden wurde, zur zweiten Annäherung über. Man nehme an, man käme in Folge gewisser Beziehungen, wie z. B.

$$f m_1 + g m_2 + \text{etc.} = m_1$$

zu störenden Kräften $P_1 e^{m_1 t}$, $P_2 e^{m_2 t}$, etc. Diese würden in der Coordinate $x$ unendlich grosse Glieder erzeugen, wenn wir die Operatoren $I(\delta)/\Delta(\delta)$, etc., wie gewöhnlich, anwenden wollten (§ 326). Statt ihrer benutzen wir die Operatoren $I(\delta)/\Delta'(\delta)$, etc., indem wir einfach $\Delta(\delta)$ durch $\Delta'(\delta)$ ersetzen. Das Resultat sei $x = He^{m_1 t} + Ke^{m_2 t} +$ etc., worin $H$ und $K$ Potenzen von $M_1$, $M_2$, etc. enthalten, die höher sind, als die erste. Den Wirkungen dieser störenden Kräfte kann dann bei der nächsten Annäherung dadurch Rechnung getragen werden, dass man statt der ersten Annäherung

$$x = M_1 e^{(m_1 + \mu_1)t} + M_2 e^{(m_2 + \mu_2)t}$$

setzt, worin $\mu_1 = H/M_1$, $\mu_2 = K/M_2$, etc. ist, vorausgesetzt, dass diese neuen Exponenten den Beziehungen $f\mu_1 + g\mu_2 +$ etc. $= \mu_1$, etc. genügen.

Ist diese Bedingung erfüllt, so besteht die Wirkung einer störenden Kraft von demselben Typus und derselben Periode wie die einer freien Schwingung darin, dass sie diesen Typus aus dem System entfernt und durch einen andern Schwingungstypus ersetzt, der sich um so weiter von dem ursprünglichen entfernt, je grösser die Amplitude der Schwingung ist.

§ 364. **Beispiele.** *Ein Pendel schwingt in einem sehr dünnen Mittel, dessen Widerstand durch eine quadratische Function der Geschwindigkeit dargestellt wird; man soll die Bewegung finden.*

$\theta$ sei der Winkel, den die Gerade, welche den Stützpunkt $O$ mit dem Schwerpunkt $G$ des Pendels verbindet, mit der Verticalen macht. Ferner sei $g = ln^2$, worin $l$ die Länge des gleichwerthigen einfachen Pendels bedeutet. Dann ist die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + n^2 \sin\theta = -2\varkappa \frac{d\theta}{dt} - \mu \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad \cdots\cdots \quad (1),$$

worin $2\varkappa$ und $\mu$ die Widerstandscoefficienten, dividirt durch das Trägheitsmoment des Pendels in Bezug auf die Aufhängungsaxe, sind. Da $\theta$ klein ist, können wir der Gleichung die Form geben

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + n^2\theta = -2\varkappa \frac{d\theta}{dt} - \mu \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{6} n^2 \theta^3 - \cdots.$$

Da ferner $\varkappa$ und $\theta$ sehr klein sind, so könnte man zuerst annehmen, es reiche für eine erste Annäherung hin, alle Glieder auf der rechten Seite zu vernachlässigen. Dies liefert $\theta = \alpha \sin nt$, wobei $t$ so gemessen wird, dass $t$ und $\theta$ zugleich verschwinden. Durch Substitution in die kleinen Glieder erhält man

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + n^2\theta = -2\varkappa n \cdot \alpha \cos nt + \frac{1}{8} n^2\alpha^3 \sin nt + \text{etc.},$$

und daraus

$$\theta = \alpha \sin nt - \varkappa\alpha t \sin nt + \frac{1}{16} n\alpha^3 t \cos nt + \text{etc.}$$

Diese Zusatzglieder enthalten $t$ als Factor und zeigen, dass unsere erste Annäherung der Wahrheit nicht nahe genug kam und die Bewegung nur während einer kurzen Zeit darstellt. Um eine hinreichend nahe erste Annäherung zu erhalten, müssen wir das kleine Glied $2\varkappa\, d\theta/dt$ in sie einschliessen. Man hat daher

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\varkappa \frac{d\theta}{dt} + n^2\theta = 0\,.$$

Dies liefert $\theta = ae^{-\varkappa t} \cdot \sin mt$, worin der Kürze wegen $n^2 - \varkappa^2 = m^2$ gesetzt wurde.

Bei der zweiten Annäherung vernachlässigen wir alle Glieder von der Ordnung $\alpha^3$ oder $\alpha^2\varkappa$, wenn sie nicht nach der Integration auf die in § 344 erklärte Art sich Geltung verschaffen. Wir erhalten so

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\varkappa \frac{d\theta}{dt} + n^2\theta = -\frac{1}{2}\mu\alpha^2 m^2 e^{-2\varkappa t}(1 + \cos 2mt) +$$
$$+ \frac{1}{24} n^2\alpha^3 e^{-3\varkappa t}(3 \sin mt - \sin 3mt) +$$
$$+ \frac{1}{2}\mu\alpha^2\varkappa e^{-2\varkappa t}(-\varkappa + \varkappa \cos 2mt + 2m \sin 2mt),$$

worin alle Glieder auf der rechten Seite, die auf das erste folgen, von der dritten Ordnung und zu vernachlässigen sind, wenn sie sich keine Geltung verschaffen. Um darüber in's Klare zu kommen, betrachten wir zuerst den allgemeinen Fall

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\varkappa \frac{d\theta}{dt} + n^2\theta = e^{-p\varkappa t} \cdot (A \sin rmt + B \cos rmt).$$

Setzt man

$$\theta = e^{-p\varkappa t}(L \sin rmt + M \cos rmt)$$

und substituirt, so findet man

$$\left.\begin{aligned} L\{(p-1)^2\varkappa^2 + m^2(1-r^2)\} + 2(p-1)\varkappa rmM = A \\ M\{(p-1)^2\varkappa^2 + m^2(1-r^2)\} - 2(p-1)\varkappa rmL = B \end{aligned}\right\}.$$

$\varkappa$ ist nun sehr klein; ist daher $r$ nicht der Einheit gleich, so wird nahezu

$$L = \frac{A}{m^2(1-r^2)}, \quad M = \frac{B}{m^2(1-r^2)},$$

ist aber $r = 1$, so hat man nahezu

$$L = \frac{-B}{2(p-1)\varkappa m}, \quad M = \frac{A}{2(p-1)\varkappa m}.$$

Der Fall $p = 1$ kommt in unserem Problem nicht vor. Es ergibt sich, dass nur solche Glieder in der Differentialgleichung, in denen $r = 1$ ist, das Anwachsen derjenigen Glieder in dem Werth von $x$ verursachen, in deren Nenner die kleine Grösse $\varkappa$ auftritt. In der Differentialgleichung ist daher das einzige Glied dritter

Ordnung, welches beibehalten werden muss, das erste. Man erhält so, wenn man nacheinander $r = 0$, $r = 2$, $r = 1$ setzt,

$$\theta = \alpha e^{-\varkappa t} \sin mt - \frac{\mu \alpha^2}{2} e^{-2\varkappa t} + \frac{\mu \alpha^2}{6} e^{-2\varkappa t} \cos 2mt + \frac{n^2 \alpha^3}{32 \varkappa m} e^{-3\varkappa t} \cos mt.$$

Diese Gleichung bestimmt die Bewegung nur während einem Schwung des Pendels; wenn das Pendel sich auf den Rückweg begibt, wechselt $\mu$ das Vorzeichen. Wir wollen annehmen, das Pendel bewege sich von links nach rechts und die Länge der Bogen des Abstieges und Aufstieges suchen.

Zu dem Zweck sei $d\theta/dt = 0$. Die Gleichung sei in der Form $\theta = f(t)$ geschrieben. Wenn wir nun alle kleinen Glieder vernachlässigen, so verschwindet $d\theta/dt$, wenn $mt = \pm \frac{1}{2}\pi$ ist, sagen wir, wenn $t = \pm T$ ist. Setzt man $t = -T + x$, worin $x$ eine kleine Grösse bedeutet, so hat man

$$f'(t) = f'(-T) + f''(-T)x = 0.$$

Nun ist

$$f'(t) = \alpha e^{-\varkappa t}(m \cos mt - \varkappa \sin mt) -$$
$$- \frac{\mu \alpha^2}{2} e^{-2\varkappa t}\left(-2\varkappa + \frac{2\varkappa}{3} \cos 2mt + \frac{2m}{3} \sin 2mt\right) +$$
$$+ \frac{n^2 \alpha^3}{32 \varkappa m} e^{-3\varkappa t}(-m \sin mt - 3\varkappa \cos mt).$$

Eine hinreichend genaue Annäherung an den Werth von $f''(t)$ findet man durch Differentiation des ersten Gliedes von $f'(t)$. Man erhält so

$$m^2 x = -\varkappa - \tfrac{4}{3}\mu \alpha \varkappa - \tfrac{1}{32} n^2 \alpha^2/\varkappa;$$

das zweite Glied kann man, da es kleiner als die beiden andern ist, vernachlässigen. Ferner findet man den Bogen des Abstieges

$$\theta = f(-T) + f'(-T)x =$$
$$= -\left\{\alpha e^{\varkappa T} + \tfrac{2}{3}\mu \alpha^2 e^{2\varkappa T} - mx\left(\varkappa \alpha e^{\varkappa T} + \tfrac{1}{32} n^2 \alpha^3 e^{6\varkappa T}/\varkappa m\right)\right\}.$$

Um den Bogen des Aufstieges zu ermitteln, setze man $t = T + y$. Dies liefert $m^2 y = -\varkappa - \frac{1}{32} n^2 \alpha^2/\varkappa$ und den Bogen des Aufstieges

$$\theta = \alpha e^{-\varkappa T} - \tfrac{2}{3}\mu \alpha^2 e^{-2\varkappa T} - my\left(\varkappa \alpha e^{-2\varkappa T} + \tfrac{1}{32} n^2 \alpha^3 e^{-3\varkappa T}/\varkappa m\right).$$

In diesen Ausdrücken für die Bogen des Ab- und Aufstieges sind die Glieder, welche $x$ und $y$ enthalten, sehr klein und können unter der Annahme, $\varkappa$ sei nicht äusserst klein, vernachlässigt werden[1]).

Nun ist $\alpha$ für jeden Schwung des Pendels verschieden; wir müssen daher $\alpha$ eliminiren. $u_n$ und $U_{n+1}$ seien zwei aufeinander folgende Bogen des Abstieges und Aufstieges und $\lambda = e^{-\varkappa T}$, $\lambda$ also etwas kleiner als die Einheit. Man erhält dann

$$u_n = \alpha \frac{1}{\lambda} + \tfrac{2}{3}\mu \alpha^2 \frac{1}{\lambda^2}, \quad u_{n+1} = \alpha \lambda - \tfrac{2}{3}\mu \alpha^2 \lambda^2$$

und durch Elimination von $\alpha$ nahezu

1) Werden die genannten Glieder nicht vernachlässigt, so erhält man als Gleichung, welche die successiven Bogen des Ab- und Aufstieges verbindet,

$$\frac{1}{u_n} - \frac{\lambda}{u_{n+1}} = -\tfrac{2}{3}\mu(1 + \lambda^2) + \frac{n^2 x}{32 \varkappa m} \frac{1 - \lambda^4}{\lambda}.$$

Es ist aber nahezu $1 - \lambda^4 = \dfrac{2\varkappa\pi}{m}$, das Zusatzglied ist daher im Vergleich mit dem beibehaltenen sehr klein.

$$\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{c} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{c}\right),$$

worin nahezu

$$c = \frac{3}{2\mu}\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{3\varkappa\pi}{4\mu m} \quad \text{und} \quad T = \frac{\pi}{2m} \text{ ist.}$$

*Die aufeinander folgenden Bogen sind daher derart, dass* $1/u_n + 1/c$ *das allgemeine Glied einer geometrischen Reihe ist, die den gemeinschaftlichen Factor* $e^{\varkappa\pi/m}$ *hat. Das Verhältniss irgend eines Bogens* $u_n$ *zu dem folgenden* $u_{n+1}$ ist

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = e^{2\varkappa T} + \frac{u_n}{c}(e^{2\varkappa T} - 1)$$

*und nimmt mit dem Bogen beständig ab.* In irgend einer Reihe von Schwingungen ist das Verhältniss zuerst grösser und später kleiner als sein mittlerer Werth. Dies stimmt mit den Versuchen überein.

*Die Schwingungsdauer zu finden.* $t_1$, $t_2$ seien die Zeiten, zu welchen sich das Pendel auf der äussersten Linken und Rechten seines Schwingungsbogens befindet. Dann ist

$$mt_1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\varkappa}{m} - \frac{n^2\alpha^2}{32m\varkappa}, \quad mt_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varkappa}{m} - \frac{n^2\alpha^2}{32m\varkappa}.$$

Die Schwingungsdauer von der einen äussersten Lage bis zur andern $t_2 - t_1$ ist $\frac{\pi}{m}$. Sie hängt nicht von dem Bogen ab, bleibt also während der Bewegung constant. Die Dauer ist jedoch nicht genau dieselbe wie im luftleeren Raum, sondern etwas grösser; die Differenz hängt von dem *Quadrat* der kleinen Grösse $\varkappa$ ab. Siehe § 321.

Dass die Schwingungszeit von einer Lage augenblicklicher Ruhe zur nächsten von dem Bogen unabhängig ist, hat für die Fälle, dass (1) der Widerstand, wie die Geschwindigkeit variirt und dass er (2) dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, Poisson in seinem *Traité de Mécanique* bewiesen, Art. 186 u. f.

Beisp. 2. Ein starrer Körper wird an zwei gleich langen und parallelen Fäden aufgehängt, die an zwei Punkten befestigt sind, welche in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende verticale Hauptaxe symmetrisch gelegen sind. Man dreht ihn um diese Axe durch einen kleinen Winkel und überlässt ihn dann sich selbst, um seine kleinen *endlichen* Schwingungen auszuführen. Man untersuche die Reduction auf unendlich kleine Schwingungen. [Smith's *Prize.*]

---

## Kapitel VIII.

# Bestimmung der Integrationsconstanten durch die Anfangsbedingungen.

## Die Methode der Isolirung.

§ 365. Unsere Aufgabe in diesem Kapitel lässt sich mit wenigen Worten angeben. Wenn irgend eine Anzahl simultaner Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten gegeben ist, so lassen sich bekanntlich die abhängigen Variabelen $x$, $y$, $z$, etc. mittelst einer Reihe reeller oder imaginärer Exponentialgrössen durch die unabhängige Variable $t$ ausdrücken. Ist $x = Me^{mt}$ eine solche Exponentialgrösse, so ist $M$ eine Function der Anfangswerthe der Variabelen $x$, $y$, etc. und ihrer Differentialquotienten. Unsere Absicht ist hier, diese Function zu eruiren. Man kann, ohne die Gleichungen aufzulösen, ein beliebiges Glied der Lösung, wenn sein Exponent bekannt ist, von den übrigen trennen und seinen Werth niederschreiben auch ohne diese übrigen Glieder zu ermitteln.

Wenn die Differentialgleichungen nicht von hoher Ordnung sind, so lässt sich im Allgemeinen die Determinantengleichung auflösen und lassen sich die sämmtlichen möglichen Werthe von $m$ finden. In diesem Fall ist es lediglich eine algebraische Aufgabe, die Constanten durch die Anfangswerthe der Variabelen auszudrücken. Man kann dieses Ziel aber auf kürzerem und bequemerem Weg erreichen, wenn man die unten angegebene Regel benutzt. Manchmal ist es auch unmöglich, die Determinantengleichung aufzulösen. Wir können vielleicht eine oder mehrere Wurzeln ermitteln, während die übrigen unbekannt bleiben. Alsdann lässt sich das Verfahren der gewöhnlichen Algebra nicht anwenden, da die Gleichungen nicht niedergeschrieben werden können. *Unsere Aufgabe besteht darin, die Constanten, welche diese bekannten Glieder begleiten, ohne Kenntniss der übrigen zu finden.*

Die Methode ist sehr einfach und leicht anwendbar, wenn die von den anderen zu trennende Exponentialgrösse mit einer einfachen Wurzel der Fundamentaldeterminante verbunden ist. Sie ist aber auch dann brauchbar, wenn die Wurzel sich mehrere Mal wiederholt. Eine Complication entsteht nur dadurch, dass alsdann die Exponentialgrösse von so

vielen Constanten begleitet wird, als es gleiche Wurzeln gibt. Jede von ihnen erfordert eine Operation für sich zur Ermittlung ihres Werthes.

Die Methode kann zwar bei jeder beliebigen Ordnung der Gleichungen benutzt werden, wird jedoch bei weitem einfacher, wenn die Ordnung nicht über die zweite hinausgeht. Selbstverständlich ist dieser Fall am wichtigsten, weil dann die Gleichungen so sein können, wie sie in der Dynamik vorkommen.

In gewissen Fällen kann man der Regel eine andre Form geben, die man möglicher Weise für einfacher halten wird. Es ist dies die Methode der Multiplicatoren. Ist die Anzahl der abhängigen Variabelen unendlich gross, so liefert die Fourier'sche Regel für die Entwicklung der Functionen in eine Reihe von Sinussen und Cosinussen ein Beispiel.

§ 366. **Die Isolirungsdeterminante.** Mit Benutzung der Bezeichnung in § 262 schreiben wir die $n$ Gleichungen für $x, y, z$, etc. in der Form

$$\left.\begin{array}{l} f_{11}(\delta)x + f_{12}(\delta)y + f_{13}(\delta)z + \cdots = 0 \\ f_{21}(\delta)x + f_{22}(\delta)y + f_{23}(\delta)z + \cdots = 0 \\ \quad \cdot\cdot \qquad\quad \cdot\cdot \qquad\quad \cdot\cdot \qquad \cdots = 0 \end{array}\right\},$$

worin $\delta$ wie früher für $d/dt$ steht. Bei der Anwendung in der Dynamik sind alle diese Functionen von $\delta$ vom zweiten Grad, hier jedoch machen wir keine Einschränkung dieser Art.

Um sie aufzulösen, verfahren wir, wie in § 262, und bilden die Determinante

$$\varDelta\delta = \begin{vmatrix} f_{11}(\delta), & f_{12}(\delta), & f_{13}(\delta)\cdots \\ f_{21}(\delta), & f_{22}(\delta), & f_{23}(\delta)\cdots \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{vmatrix},$$

welche, gleich Null gesetzt, eine Gleichung zur Ermittlung von $\delta$ liefert. Ihre Wurzeln seien $m, m_2$, etc., wobei wir den Index des ersten $m$ der Kürze halber weglassen. Wie wir wissen, ist dann

$$x = Me^{mt} + M_2 e^{m_2 t} + \cdots.$$

Wir wollen nun untersuchen, wie sich irgend einer dieser Coefficienten z. B. $M$ ohne die andern finden lässt.

Zu diesem Zweck leiten wir aus der Determinante $\varDelta(\delta)$ eine andere ab, die wir schreiben

$$\Pi(m) = \begin{vmatrix} \frac{f_{11}\delta - f_{11}m}{\delta - m}x + \frac{f_{12}\delta - f_{12}m}{\delta - m}y + \text{etc.}, & f_{12}(m), & f_{13}(m)\text{ etc.} \\ \frac{f_{21}\delta - f_{21}m}{\delta - m}x + \frac{f_{22}\delta - f_{22}m}{\delta - m}y + \text{etc.}, & f_{22}(m), & f_{23}(m)\text{ etc.} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{vmatrix}.$$

Wir bilden diese Determinante nach der folgenden Regel. *Man schliesse irgend eine Verticalreihe der Determinante $\varDelta(\delta)$ aus, z. B. die*

*erste. Um sie zu ersetzen, dividire man die erste Gleichung durch $\delta - m$, lasse den Rest weg und setze den Quotienten in die erste Horizontalreihe der ausgeschlossenen Verticalreihe. Ebenso dividire man die zweite Gleichung durch $\delta - m$ und setze den Quotienten in die zweite Horizontalreihe u. s. w. Schliesslich wird dann in den übrigen Verticalreihen $m$ für $\delta$ geschrieben.*

Schliesst man die zweite Verticalreihe der Determinante $\Delta(\delta)$ oder $\Delta(m)$ aus, so erhält man eine etwas verschiedene Determinante, die wir $\Pi_2(m)$ nennen, wobei der Index anzeigt, welche Verticalreihe von $\Delta(m)$ ausgeschlossen wurde.

Die Determinante $\Pi(m)$ ist offenbar eine Function von $x$, $y$, etc., $\delta x$, $\delta y$, etc., $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, etc. u. s. w. bis zu einer Potenz, die um die Einheit geringer ist als die höchste in den gegebenen Differentialgleichungen vorkommende Potenz von $\delta$. Für sie alle setzen wir nun ihre gegebenen Anfangswerthe und haben dann

$$M = \frac{\Pi(m)}{\Delta'(m)},$$

worin $\Delta'(m)$ wie gewöhnlich den Differentialquotienten von $\Delta(m)$ nach $m$ bezeichnet. Ebenso findet man, wenn $Ne^{mt}$ das entsprechende Glied in dem Werth von $y$ ist, $N = \frac{\Pi_2(m)}{\Delta'(m)}$ u. s. w.

§ 367. **Beispiele.** Ehe wir dazu übergehen, diesen Satz zu beweisen, wollen wir einige Beispiele betrachten.

Beisp. 1. Sind die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(\delta^2 - 4\delta)\,x - (\delta - 1)\,y = 0\\ (\delta + 6)\,x + (\delta^2 - \delta)\,y = 0\end{aligned}\right\}$$

gegeben, so ist die Fundamentaldeterminante, wie man leicht sieht,

$$\Delta(m) = \begin{vmatrix} m^2 - 4m, & -(m-1) \\ m+6, & m^2 - m \end{vmatrix} = m^4 - 5m^3 + 5m^2 + 5m - 6.$$

Setzt man sie gleich Null, so ergibt sich als eine Wurzel $m = -1$. Wir wollen nun den Coefficienten von $e^{-t}$ in dem Werth von $x$ suchen.

Durch Division der Gleichungen mit $\delta + 1$ und Weglassen des Restes erhalten wir sofort die zweite Determinante

$$\Pi(m) = \begin{vmatrix} (\delta - 5)\,x - y, & 2 \\ x + (\delta - 2)\,y, & 2 \end{vmatrix},$$

worin die zweite Verticalreihe sich ergibt, wenn man $m = -1$ in der zweiten Verticalreihe von $\Delta(m)$ setzt. Entwickelt man und beachtet, dass $\Delta'(m) = -24$ ist, wenn $m = -1$, so wird

$$-12M = \delta x - \delta y - 6x + y,$$

worin $M$ der gesuchte Coefficient ist, und angenommen wird, dass $x$, $y$, $\delta x$, $\delta y$ ihre bekannten Anfangswerthe haben.

Man kann auf dieselbe Art zeigen, dass ein Glied $M'e^{2t}$ in dem Werth von $x$ vorkommt, worin $-3M' = 2\delta x + \delta y - 3x - y$ ist.

Beisp. 2. Wir wollen ein anderes Beispiel nehmen, in welchem die Differentialquotienten zu höherer Ordnung aufsteigen, die abhängigen Variabelen aber, um nicht zu viel Raum nöthig zu haben, wie früher auf zwei beschränkt sind. Die Gleichungen seien

$$\left.\begin{array}{r}(\delta^3+2\delta^2+\delta+1)\,x+(\delta^3+2\delta+1)\,y=0\\ (\delta^2+2\delta+2)\,x+(\delta^4+\delta+2)\,y=0\end{array}\right\}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass der Determinantengleichung durch $m=1$ genügt wird. $x=Me^t$ ist daher ein Theil der Lösung. Es möge $M$ gesucht werden, wenn die Anfangswerthe von $\delta x$, $\delta^2 x$, $\delta y$, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ sämmtlich Null und die von $x$ und $y$ die Einheit sind. Bildet man die Function $\Pi$ durch Division jeder Gleichung mit $\delta-1$ und setzt alsdann $\delta=0$, so wird

$$\Pi(m)=\begin{vmatrix}4x+3y, & 4\\ 3x+2y, & 4\end{vmatrix}=M\varDelta'(m).$$

Differenzirt man aber die Determinante, ohne sie zu entwickeln und setzt $m=1$, so erhält man $\varDelta'(m)=16$. Daraus ergibt sich dann unmittelbar, wenn man die Einheit für $x$ und $y$ schreibt, $M=\frac{1}{2}$.

§ 368. *Wir gehen nun zu dem Beweis der Regel über.*

$p$ sei irgend eine Grösse, welche wir statt $m$ in der Definition der Determinante $\Pi(m)$ schreiben wollen, um darauf aufmerksam zu machen, dass $p$ nicht nothwendiger Weise eine Wurzel von $\varDelta(\delta)=0$ zu sein braucht.

Der allgemeine Ausdruck für die Determinante $\Pi(p)$ in § 366 lässt sich in die Differenz zweier Determinanten zerlegen, von denen die ersten Horizontalreihen, wie folgt, lauten:

$$\Pi(p)=\frac{1}{\delta-p}\,|\,f_{11}(\delta)x+f_{12}(\delta)y+\text{etc.},\;\; f_{12}(\delta),\;\text{etc.}\,|$$
$$-\frac{1}{\delta-p}\,|\,f_{11}(p)x+f_{12}(p)y+\text{etc.},\;\; f_{12}(p),\;\text{etc.}\,|.$$

In der ersten Determinante ist die erste Verticalreihe durch die Functionen besetzt, welche die Differentialgleichungen bilden. Diese Determinante verschwindet daher jedesmal, wenn man $x$, $y$, etc. Werthe beilegt, die den Differentialgleichungen genügen.

Die zweite Determinante kann als Summe eben sovieler Determinanten dargestellt werden, als in dem ersten Element der ersten Zeile Glieder sind. Bei ihnen allen mit Ausnahme der ersten sind zwei Verticalreihen die nämlichen. Diese erste Determinante ist offenbar $\varDelta(p)x$. Daraus folgt unmittelbar, dass

$$(\delta-p)\,\Pi(p)=-\varDelta(p)x$$

ist.

Löst man diese lineare Differentialgleichung auf die gewöhnliche Art auf, so erhält man

$$\Pi(p)+\varDelta(p)e^{pt}\int_0^t e^{-pt}x\,dt=Ce^{pt}\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(1).$$

Darin ist $p$ eine beliebige zu unserer Disposition stehende Grösse und haben $x, y$, etc. irgend welche Werthe, die den Differentialgleichungen genügen.

Setzt man, um den Werth der Constanten $C$ zu finden, $t = 0$, so wird das zweite Glied auf der linken Seite Null, weil die Grenzen zusammenfallen. Es folgt, dass $C$ dem Werth von $\Pi(p)$ gleich wird, wenn man statt $x, y$, etc., $\delta x, \delta y$, etc. ihre Anfangswerthe setzt.

Da $p$ willkürlich ist, lässt sich die Gleichung partiell nach $p$ differenziren. Führt man dies aus und setzt $p = m$, worin $m$ eine *einfache Wurzel* der Gleichung $\Delta(p) = 0$ ist, so findet man

$$\frac{\partial \Pi(m)}{\partial m} + \Delta'(m) e^{mt} \int_0^t e^{-mt} x dt = C t e^{mt} + \frac{\partial C}{\partial p} e^{mt}.$$

Wir wollen nun $x = M e^{mt} + M_2 e^{m_2 t} +$ etc. mit den entsprechenden Werthen von $y, z$, etc. in die linke Seite dieser Gleichung substituiren und nach Gliedern von der Form $t e^{mt}$ suchen. Der Operator $\partial \Pi(m)/\partial m$ ist eine lineare Function von $x, y$, etc., $\delta x$, etc. und kann offenbar ein Glied von der gesuchten Form nicht zur Folge haben. Der übrige Theil der linken Seite liefert nur das einzelne Glied $\Delta'(m) M t e^{mt}$ von der genannten Form. Setzt man es dem entsprechenden Glied auf der rechten Seite gleich, so hat man $\Delta'(m) M = C$. Weil nun $C$ der Anfangswerth von $\Pi(p)$ ist, so stimmt diese Gleichung genau mit der in § 366 überein.

§ 369. **Mehrfache Wurzeln.** Wenn $p = m$ eine *mehrfache Wurzel* der Gleichung $\Delta(p) = 0$ ist, so verliert der obige Beweis seine Gültigkeit. Da $p$ willkürlich ist, so können wir die Gleichung (1) so oft differenziren, wie wir wollen, und nach jeder Differentiation $p = m$ setzen. Weil nun $\Delta(m) = 0$, $\Delta'(m) = 0$, etc. ist, so reduciren sich die successiven linken Seiten auf $\Pi(m)$, $\partial \Pi(m)/\partial m$, etc. Auf den successiven rechten Seiten haben wir nur Glieder, welche die Exponentialgrösse $e^{mt}$ enthalten.

Daraus folgt, dass, wenn $\alpha$ Wurzeln von $\Delta(p) = 0$ vorhanden sind, von denen jede gleich $m$ ist, die Operatoren

$$\Pi(m), \quad \frac{\partial \Pi(m)}{\partial m}, \quad \frac{\partial^2 \Pi(m)}{\partial m^2}, \quad \ldots \frac{\partial^{\alpha-1} \Pi(m)}{\partial m^{\alpha-1}}$$

*sämmtlich Null erzeugen, wenn man für $x, y$, etc. irgend solche Lösungen der Differentialgleichungen substituirt, welche die Exponentialgrösse $e^{mt}$ nicht enthalten.*

Es ergibt sich also, dass die Resultate dieser Operationen, welche man durch Substitution derjenigen speciellen Theile der Werthe von $x, y$, etc. erhält, die von der Wurzel $m$ der Gleichung $\Delta(\delta) = 0$ abhängen, allgemein sind, d. h. die nämlichen sind, wie die durch Einsetzen der vollständigen Werthe von $x, y$, etc. erhaltenen.

Ohne eine weitere Regel zu benutzen, lassen sich also die $\alpha$ Constanten, die von der wiederholten Wurzel $p = m$ abhängen, durch Substitution derjenigen Glieder von $x, y$, etc., welche die Exponentialgrösse $e^{mt}$ enthalten, in diese $\alpha$ Operatoren ermitteln. Man findet so $\alpha$ Ausdrücke für die Operatoren, welche die $\alpha$ Constante enthalten. Zugleich lassen sich die Werthe der Operatoren selbst ermitteln, indem man den Variablen $x, y$, etc. ihre Anfangswerthe gibt.

Dazu ist freilich nöthig, dass man *alle* Coordinaten benutzt; will man jedoch nur die Werthe der Constanten finden, die in einer einzigen Coordinate vorkommen, so kann man von dem folgenden Theorem Gebrauch machen.

§ 370. *Man soll durch die Anfangsbedingungen die Werthe der Constanten ausdrücken, die in dem Ausdruck für irgend eine der Coordinaten auftreten, wenn jede von $\alpha$ Wurzeln der Fundamentaldeterminante $\Delta(p)$ gleich $m$ ist.*

In diesem Fall enthält der Werth von $x$ Potenzen von $t$; ihre Anzahl aber hängt davon ab, ob die Minoren der Determinante $\Delta(\delta)$ Null sind oder nicht. Da jedoch die höchste Potenz von $t$ nicht über $\alpha - 1$ hinausgehen kann, so kann man als allgemeinen Werth von $x$

$$x = \left(M_0 + M_1 t + \cdots + \frac{M_{\alpha-1} t^{\alpha-1}}{L(\alpha-1)}\right) e^{mt} + \Sigma N t^i e^{qt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ansehen, worin die in der Summe eingeschlossenen Glieder die Theile des Werthes von $x$ vertreten, welche nicht von der Wurzel $m$ abhängen und worin

$$L(\alpha - 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\alpha - 1)$$

ist. Aehnliche Ausdrücke gelten für $y$, $z$, etc., die ebenfalls Potenzen von $t$ nicht höher als die $(\alpha - 1)^{\text{te}}$ enthalten; es wird jedoch nicht nöthig sein, sie hier aufzuschreiben.

Wir gehen nun dazu über, die Gleichung (1) in § 368, $r$-mal nach $p$ zu differenziren und suchen nach Substitution für $x$, $y$, etc. die Glieder auf, welche $t^{\varkappa} e^{mt}$ enthalten, worin $r$ und $\varkappa$ beliebige ganze Zahlen sind, deren Benutzung uns passend erscheint. Der $r^{\text{te}}$ Differentialquotient ist offenbar

$$\frac{\partial^r \Pi(p)}{\partial p^r} + \frac{\partial^r \Delta(p) P}{\partial p^r} = \frac{\partial^r}{\partial p^r} C e^{pt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin $P = e^{pt} \int\limits_0^t e^{-pt} x \, dt$ ist.

Wir bemerken, dass das erste der beiden Glieder auf der linken Seite eine lineare Function von $x$, $y$, etc. und ihrer Differentialquotienten nach $t$ ist. Daher können in ihm nur Glieder von der gesuchten Form mit Potenzen *kleiner* als $\alpha$ auftreten. Beschränken wir uns daher auf Werthe von $\varkappa$, die grösser als $\alpha - 1$ sind, so brauchen wir dieses Glied nicht weiter zu beachten.

Das zweite Glied auf der linken Seite von (2) lässt sich nach dem Leibnitzschen Theorem schreiben

$$\Delta^r(p) P + r \Delta^{r-1}(p) \frac{\partial P}{\partial p} + \cdots + \frac{L(r)}{L(\alpha) L(r-\alpha)} \Delta^{\alpha}(p) \frac{\partial^{r-\alpha} P}{\partial p^{r-\alpha}} .$$

In dieser Reihe sind alle Differentialquotienten von $\Delta(p)$ unter dem $\alpha^{\text{ten}}$ weggelassen worden, weil die Gleichung $\Delta(p) = 0$ nach der Voraussetzung $\alpha$ Wurzeln hat, von denen jede gleich $m$ ist.

Substituirt man in den Werth von $P$ irgend einen Ausdruck wie $N t^i e^{qt}$, so erhält man nach der Integration nur ein einziges Glied, welches von der Exponentialgrösse $e^{qt}$ frei ist, und dieses eine Glied hat die Form $H e^{pt}$. Daher enthält $\partial^s P / \partial p^s$ keine höhere Potenz von $t$ als die $s^{\text{te}}$. In dieser Reihe brauchen wir daher, wenn wir $p = m$ setzen und Glieder von der Form $t^{\varkappa} e^{mt}$ aufsuchen und uns auf Werthe von $\varkappa$ beschränken, die grösser als $r - \alpha$ sind, solche Glieder, wie $N t^i c^{qt}$, nicht zu beachten.

Zunächst ist nun der Werth von $\partial^s P/\partial p^s$ zu finden, wenn man für $x$ irgend einen Ausdruck von der Form

$$\frac{M_{\varkappa-1}}{L(\varkappa-1)} t^{\varkappa-1} e^{mt}$$

einsetzt. Für jeden Werth von $x$ gilt aber

$$\frac{\partial^s P}{\partial p^s} = \frac{\partial^s}{\partial p^s} \frac{1}{\delta - p} x = \frac{Ls}{(\partial - p)^{s+1}} x = Ls e^{pt} \delta^{-s-1} \left(e^{-pt} x\right),$$

worin $Ls = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s$ ist, wie gewöhnlich. Substituirt man für $x$ und setzt $p = m$, so lassen sich die durch $\delta^{-s}$ angegebenen Integrationen ohne Schwierigkeit ausführen. Die Exponentialgrösse verschwindet und man findet sofort

$$\frac{\partial^s P}{\partial p^s} = \frac{Ls}{L(\varkappa + s)} M_{\varkappa-1} t^{\varkappa+s} e^{mt}.$$

Eine Correction der Integration ist nicht nöthig, da dieser Ausdruck mit $t$ verschwindet.

Nimmt man nun an, $\varkappa$ sei grösser als $\alpha - 1$ und als $r - \alpha$, so erhält man als Coefficienten von $t^\varkappa e^{mt}$ auf der linken Seite der Gleichung (2)

$$\frac{1}{L\varkappa}\left\{\Delta^r(m) M_{\varkappa-1} + r\Delta^{r-1}(m) M_{\varkappa-2} + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} \Delta^{r-2}(m) M_{\varkappa-3} + \text{etc.}\right\}.$$

Auf der rechten Seite ist der Coefficient von $t^\varkappa e^{mt}$, $\dfrac{Lr}{L\varkappa L(r-\varkappa)} \cdot \dfrac{\partial^{r-\varkappa} C}{\partial m^{r-\varkappa}}$.

Setzt man beide gleich, so hat man

$$\frac{\Delta^r(m)}{Lr} M_{\varkappa-1} + \frac{\Delta^{r-1}(m)}{L(r-1)} M_{\varkappa-2} + \cdots + \frac{\Delta^\alpha(m)}{L\alpha} M_{\varkappa-r+\alpha-1} =$$
$$= \frac{1}{L(r-\varkappa)} \frac{\partial^{r-\varkappa} C}{\partial m^{r-\varkappa}}.$$

Da der Buchstabe $C$ den Anfangswerth von $\Pi(m)$ bezeichnet, so wird es sich empfehlen, statt $C$ das letztere Symbol zu benutzen, jedoch unter der Voraussetzung, *dass alle Coordinaten ihre Anfangswerthe haben.*

Da $\varkappa$ grösser als $\alpha - 1$ sein muss und $M_\alpha = 0$ ist, so kann man nur den Werth $\varkappa = \alpha$ brauchen. Da ferner $\varkappa$ grösser sein muss als $r - \alpha$, so sind die allein möglichen Werthe von $r$, $r = \alpha, \alpha + 1, \ldots, 2\alpha - 1$. Setzt man diese Werthe für $r$ nacheinander ein, so erhält man

$$\frac{\Delta^\alpha}{L\alpha} M_{\alpha-1} = \Pi(m),$$

$$\frac{\Delta^{\alpha+1}}{L(\alpha+1)} M_{\alpha-1} + \frac{\Delta^\alpha}{L\alpha} M_{\alpha-2} = \frac{\partial \Pi(m)}{\partial m},$$

$$\frac{\Delta^{\alpha+2}}{L(\alpha+2)} M_{\alpha-1} + \frac{\Delta^{\alpha+1}}{L(\alpha+1)} M_{\alpha-2} + \frac{\Delta^\alpha}{L\alpha} M_{\alpha-3} = \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 \Pi(m)}{\partial m^2}$$

$$\text{etc.} = \text{etc.}$$

$$\frac{\Delta^{2\alpha-1}}{L(2\alpha-1)} M_{\alpha-1} + \text{etc.} + \frac{\Delta^{\alpha+1}}{L(\alpha+1)} M_1 + \frac{\Delta^\alpha}{L\alpha} M_0 = \frac{1}{L(\alpha-1)} \frac{\partial^{\alpha-1} \Pi(m)}{\partial m^{\alpha-1}}.$$

Wir haben hier grade die richtige Anzahl von Gleichungen, um die $\alpha$ willkürlichen Constanten zu ermitteln, die in dem Werth von $x$ auftreten, und brauchen die entsprechenden Werthe der übrigen Coordinaten nicht.

Wenn $\beta$ Wurzeln aller ersten Minoren der Determinante $\Delta(\delta)$ gleich $m$ sind, so verschwinden die ersten $\beta$ Operatoren auf der rechten Seite für alle Werthe von $x, y$, etc. In diesem Fall sind daher alle Coefficienten $M_{\alpha-1} \ldots M_{\alpha-\beta}$ Null. So verliert der Ausdruck für $x$, wie schon in § 272 erklärt wurde, $\beta$ seiner höchsten Potenzen von $t$.

Auf dieselbe Art findet man die Constanten, die in $y$ vorkommen, wenn man den in § 366 $\Pi_2$ genannten Operator statt $\Pi$ benutzt.

§ 371. **Eine andre Form der Determinante.** Es gibt noch eine andre Form, in welcher man den Operator $\Pi(m)$ schreiben kann und welche ganz besonders vortheilhaft ist, wenn die Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung sind. Kehrt man zu dem Beweis in § 368 zurück, so sieht man, dass sich die Determinante $\Pi(p)$ als Differenz zweier Determinanten schreiben lässt, von denen die zweite, für $\Delta(p) = 0$, Null wird. Was die erste angeht, so kann man alle Elemente der ersten Verticalreihe durch eine beliebige Potenz von $\delta$ dividiren, wenn man nur schliesslich die Determinante mit derselben Potenz von $\delta$ multiplicirt. Diese Elemente sind aber die Functionen, welche die Differentialgleichungen bilden. Die in § 366 gegebene Regel lässt sich daher modificiren, wie folgt: *Man dividire zuerst die Gleichungen durch eine beliebige Potenz von $\delta$; bilde dann aus diesen geänderten Gleichungen auf die in § 366 angegebene Art $\Pi(m)$ und multiplicire schliesslich die Elemente der ersten Verticalreihe mit derselben Potenz von $\delta$.* Dieser modificirte Operator heisse $\Pi'(m)$. $\Pi(m)$ und $\Pi'(m)$ unterscheiden sich dann durch ein Vielfaches von $\Delta(m)$. Gibt es $\alpha$ Wurzeln der Gleichung $\Delta(\delta) = 0$, die gleich $m$ sind, so folgt, dass alle Differentialquotienten von $\Pi(m)$ und $\Pi'(m)$ aufwärts bis zum $(\alpha - 1)$ten einander gleich sind.

§ 372. Die Gleichungen seien z. B.

$$\left.\begin{aligned}(A_{11}\delta^2 + B_{11}\delta + C_{11})x + (A_{12}\delta^2 + B_{12}\delta + C_{12})y = 0\\ (A_{21}\delta^2 + B_{21}\delta + C_{21})x + (A_{22}\delta^2 + B_{22}\delta + C_{22})y = 0\end{aligned}\right\},$$

wobei wir nur zwei Variabele nehmen, um die Resultate abzukürzen. Wir dividiren jede Gleichung durch $\delta$, und dann, zur Bildung von $\Pi(m)$, durch $\delta - m$ und lassen die Reste weg. Schliesslich multipliciren wir wieder mit $\delta$. So erhält man

$$\Pi(m) = \begin{vmatrix} A_{11}\delta x + A_{12}\delta y - \dfrac{C_{11}x + C_{12}y}{m}, & A_{12}m^2 + B_{12}m + C_{12} \\ A_{21}\delta x + A_{22}\delta y - \dfrac{C_{21}x + C_{22}y}{m}, & A_{22}m^2 + B_{22}m + C_{22} \end{vmatrix}.$$

*In dieser Form können die Elemente der ersten Verticalreihe,* wenn die Gleichungen vom zweiten Grad sind, *einfach aus der Gleichung abgeschrieben werden.*

Der Vortheil der Form besteht darin, dass die Widerstandskräfte, welche von dem Potential $B$ abhängen (§ 311), aus dem Symbol $\Pi(m)$ verschwunden sind. Sie führt auch zur Methode der Multiplicatoren, die in dem nächsten Abschnitt erklärt werden soll.

§ 373. Beisp. 1. Die Gleichungen seien

$$\left.\begin{array}{r}(\delta^2 - 3\delta + 2)x + (\delta - 1)y = 0 \\ -(\delta - 1)x + (\delta^2 - 5\delta + 4)y = 0\end{array}\right\}.$$

Die Fundamentaldeterminante ist dann

$$\Delta(m) = \begin{vmatrix} m^2 - 3m + 2, & m - 1 \\ -(m-1), & m^2 - 5m + 4 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m-3)^2.$$

Die Gleichung $\Delta(m) = 0$ hat daher zwei Wurzeln, von denen jede gleich 3 ist; die entsprechenden Glieder in dem Werth von $x$ sind daher

$$x = (M_0 + M_1 t)\,e^{3t}.$$

Man soll $M_0$ und $M_1$ durch die Anfangswerthe der Coordinaten ausdrücken.

Man bilde den Operator $\Pi(m)$ auf die in § 372 angegebene Art, indem man die Verticalreihen aus den obigen Gleichungen copirt,

$$\Pi(m) = \begin{vmatrix} \delta x - \dfrac{2x - y}{m}, & m - 1 \\ \delta y - \dfrac{x + 4y}{m}, & m^2 - 5m + 4 \end{vmatrix} = (m-1)\left\{(m-4)\,\delta x - \delta y - \frac{2m-9}{m}x + y\right\}.$$

Daraus ergibt sich für $m = 3$,

$$\Pi(m) = -2\{\delta x + \delta y - x - y\},$$

$$\frac{\partial \Pi(m)}{\partial m} = \delta x - \delta y - x + y.$$

Ferner ist für $m = 3$,

$$\Delta(m) = 0, \quad \Delta'(m) = 0, \quad \Delta''(m) = 8, \quad \Delta'''(m) = 24.$$

Daher nach der Regel in § 370

$$\left.\begin{array}{r}4M_1 = -2(\delta x + \delta y - x - y) \\ 4(M_1 + M_0) = \delta x - \delta y - x + y\end{array}\right\},$$

worin die Grössen auf der rechten Seite ihren Anfangswerth haben.

Beisp. 2. Die Gleichungen seien

$$\left.\begin{array}{r}(\delta^2 - 2\delta)x - y = 0 \\ (2\delta - 1)x + \delta^2 y = 0\end{array}\right\}.$$

Man finde die Constanten in $x = \left(M_0 + M_1 t + \frac{1}{2} M_2 t^2\right)e^t$. Die Antwort ist

$$2M_2 = \delta x + \delta y + x + y,$$

$$2M_1 + M_2 = 2\delta x - x + y, \quad 2M_0 + M_1 = \delta x + x.$$

§ 374. Die folgenden Beispiele erläutern die Anwendung der vorstehenden Sätze auf den Fall, in welchem die Differentialgleichung nur eine abhängige Variable hat.

Die Gleichung und ihr allgemeines Integral sei

$$f(\delta)x = (A_n\delta^n + \cdots + A_1\delta + A_0)x = 0,$$

$$x = M_1 e^{m_1 t} + M_2 e^{m_2 t} + \cdots.$$

Schreibt man $m$ für irgend eine der Wurzeln $m_1$, $m_2$, etc. und beachtet, dass $f(m) = 0$ ist, so wird, wie man leicht sieht,

$$Me^{mt} = \frac{1}{f'(m)} \frac{f(\delta) - f(m)}{\delta - m} x.$$

Führt man die Division aus und setzt $t = 0$, so wird damit der Werth von $M$ durch die Anfangswerthe von $x$, $\delta x$, etc., $\delta^{n-1} x$ ausgedrückt.

Die entprechenden Formeln für gleiche Wurzeln lassen sich daraus leicht ableiten. Sie ergeben sich auch aus § 370, wenn man

$$\varDelta = f(m) \quad \text{und} \quad \Pi = \frac{f(\delta) - f(m)}{\delta - m} x$$

setzt.

Beisp. 1. Der Differentialgleichung $(\delta^3 - 2\delta^2 - \delta + 2) x = 0$ wird durch $x = Me^t$ genügt. Die Anfangswerthe von $x$, $\delta x$, $\delta^2 x$ sind $a$, $a'$, $a''$; zu beweisen, dass $2M = 2a + a' - a''$ ist.

Beisp. 2. Die Differentialgleichung sei $f(\delta) x = 0$ und $f(\delta)$ enthalte nur grade Potenzen von $\delta$. Die Glieder der Lösung, welche von dem Paar einzelner Wurzeln $m = \pm \sqrt{-1}$ von $f(m) = 0$ abhängen, sind $x = F \cos \varkappa t + G \sin \varkappa t$; zu beweisen, dass

$$\frac{F}{2} \frac{f'(m)}{m} = \frac{f(\delta)}{\delta^2 + \varkappa^2} x \quad \text{und} \quad \frac{G}{2} \frac{f'(m)}{m} = \frac{f(\delta)}{\delta^2 + \varkappa^2} \frac{\delta x}{\varkappa}$$

ist.

Beisp. 3. $A_n \delta^n \alpha + \cdots + A_1 \delta x + A_0 x = 0$ sei eine Differentialgleichung. Stellt man sie durch $f(\delta) x = 0$ dar und ist $m$ eine reelle einzelne Wurzel von $f(\delta) = 0$, ferner $Me^{mt}$ das entsprechende Glied in dem Werth von $x$; zu beweisen, dass die obere Grenze des Werthes von $Mf'(m)$ die Summe derjenigen Glieder in der Reihe $A_n \delta^{n-1} x + \cdots + A_2 \delta x + A_1$ ist, welche dasselbe Vorzeichen wie $f'(m)$ haben. Es wird natürlich vorausgesetzt, dass $x$, $\delta x$, etc. hier ihre bekannten Anfangswerthe haben.

§ 375. Die folgenden Beispiele geben eine andere Methode zur Erläuterung der Sätze dieses Abschnittes.

Beisp. 1. Jeder erste Minor der Determinante $\varDelta(\delta)$ werde mit dem Buchstaben $I$ bezeichnet und der Index gebe das Element an, dessen Minor er ist. Ist $q$ eine Wurzel von $\varDelta(\delta) = 0$, so ist bekanntlich eine Lösung der Differentialgleichungen

$$x = GI_{11}(q) e^{qt}, \quad y = GI_{12}(q) e^{qt}, \quad z = \text{etc.},$$

worin $G$ eine willkürliche Constante bedeutet. Wir wollen jedoch annehmen, $q$ sei seinem Werth nach unbeschränkt und nicht nothwendiger Weise eine Wurzel von $\varDelta(\delta) = 0$. Man beweise, dass das Ergebniss der Substitution der obigen Werthe von $x$, $y$, etc. in $\Pi(p)$

$$\Pi(p) = Ge^{qt} \frac{\varDelta(q) I_{11}(p) - \varDelta(p) I_{11}(q)}{q - p}$$

ist, worin $p$ ebenfalls seinem Werth nach keiner Beschränkung unterliegt.

Der Beweis kann so geführt werden, dass man $\Pi(p)$ in die Differenz zweier Determinanten, wie in § 368, zerlegt und dann in jede substituirt.

Beisp. 2. Aus dem vorigen Beispiel leite man ab, dass $\Pi(p) = 0$ ist, wenn $p$ und $q$ ungleiche einfache Wurzeln von $\varDelta(\delta) = 0$ bezeichnen. Sind aber $p$ und $q$ dieselbe einfache Wurzel, so ist

$$\Pi(p) = GI_{11}(p) \varDelta'(p) e^{pt}.$$

Beisp. 3. Wenn $\beta$ Wurzeln der Gleichung $\Delta(\delta)=0$ gleich $q$ sind, so wird die Form der Lösung durch

$$x = G_0 I_{11}(q)e^{qt} + \cdots + G_{\beta-1}(\partial/\partial q)^{\beta-1}\{I_{11}(q)e^{qt}\}$$

angegeben mit ähnlichen Ausdrücken für die übrigen Coordinaten. Sind ferner $\alpha$ Wurzeln der Gleichung $\Delta(\delta)=0$ gleich $p$, zu beweisen, dass das Resultat der Substitution dieser Werthe der Coordinaten in irgend eine der Determinanten $\Pi(p)$, $(\partial/\partial p)\Pi(p)\ldots(\partial/\partial p)^{\alpha-1}\Pi(p)$ Null ist, wenn $p$ und $q$ ungleich sind. Ist dagegen $p=q$, so erhält man die in § 366 angegebenen Resultate.

Der Beweis lässt sich so führen, dass man mittelst des Leibnitz'schen Theorems die Gleichung in Beisp. 1, $i$-mal nach $p$ und $j$-mal nach $q$ differenzirt, wobei $i$ kleiner als $\alpha$ und $j$ kleiner als $\beta$ ist.

Beisp. 4. Wenn alle ersten Unterdeterminanten von $\Delta(\delta)$ für einen speciellen Werth von $\delta$ verschwinden, so hängt die Lösung von einem doppelten Typus $\xi$, $\eta$ ab, derart, dass

$$x = J_{12}(\delta)\,\xi,\quad y = J_{12}(\delta)\,\eta,\ \text{etc.}$$

ist, worin $J_{12}(\delta)$ die zweite Unterdeterminante von $\Delta(\delta)$ ist, die man durch Weglassen der beiden ersten Horizontal- und Verticalreihen wie in § 273 erhält. Man beweise, dass, wenn man $\xi = Ge^{qt}$, $\eta = He^{qt}$ setzt, und unter $G$ und $H$ zwei willkürliche Constanten versteht, welche in allen Werthen der übrigen Coordinaten vorkommen,

$$\Pi(p) = G\frac{e^{qt}}{q-p}\left\{\begin{vmatrix} I_{11}(p), & I_{12}(q) \\ I_{21}(p), & I_{22}(q)\end{vmatrix} - J_{12}(q)\Delta(p)\right\} - H\frac{e^{qt}}{q-p}\begin{vmatrix} I_{11}(p), & I_{11}(q) \\ I_{21}(p), & I_{21}(q)\end{vmatrix}$$

ist. Hier sind $p$ und $q$ ihrem Werth nach unbeschränkt und genügen nicht nothwendiger Weise der Gleichung $\Delta(\delta)=0$.

Beisp. 5. Man leite aus dem Resultat in Beisp. 4 ab, dass, wenn $\Delta(\delta)$ zwei Wurzeln gleich $m$ hat, von denen eine alle ersten Unterdeterminanten zu Null macht, so dass $x = Me^{mt}$, $y = Ne^{mt}$ Theile der Lösung sind, unter $M$, $N$ unabhängige Constante verstanden,

$$\tfrac{1}{2}\Delta''(m)M = \frac{\partial \Pi}{\partial m},\quad \tfrac{1}{2}\Delta''(m)N = \frac{\partial \Pi_2}{\partial m}$$

ist, worin $\Pi_2$ aus $\Delta(m)$ durch Weglassen der zweiten statt der ersten Verticalreihe erhalten wird (siehe § 366). Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Coordinaten auf der rechten Seite ihre Anfangswerthe haben.

Beisp. 6. Die Gleichung $\Delta(\delta)=0$ habe $\alpha$ Wurzeln gleich $m$ und die sämmtlichen ersten Unterdeterminanten $\beta$ Wurzeln, die ebenfalls gleich $m$ sind. Wenn man aus $\Pi(m)$ eine neue Determinante $\Pi'(m)$ bildet, indem man eine beliebige Horizontalreihe und irgend eine Verticalreihe mit Ausnahme der ersten weglässt, zu beweisen, dass bei Substitution irgend welcher Werthe der Coordinaten, die den Differentialgleichungen genügen und die Exponentialgrösse $e^{mt}$ nicht enthalten, in die Determinanten $(\partial/\partial m)\Pi'(m)$, etc. $(\partial/\partial m)^{\beta-1}\Pi'(m)$ die sämmtlichen Resultate Null werden.

## Die Methode der Multiplicatoren.

§ 376. In dem letzten Abschnitt haben wir gezeigt, wie die zu irgend einer Schwingung gehörige Constante bestimmt werden kann, wenn die Differentialgleichungen von beliebiger Ordnung sind. Jetzt

wollen wir untersuchen, welche Abkürzungen in dem Verfahren eintreten, wenn die Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung und jener einfacheren Art sind, wie sie gewöhnlich in der Dynamik vorkommt.

In § 310 findet man die Gleichungen zweiter Ordnung in voller Ausführlichkeit. So allgemeine Formen jedoch, wie diese, treten selten auf. Die beiden wichtigsten Probleme in der Dynamik sind die, in welchen wir

(1) mit Schwingungen um eine Gleichgewichtslage mit oder ohne Widerstandskräfte,

(2) mit Schwingungen um einen Zustand stationärer Bewegung zu thun haben.

In dem ersten Fall fehlen die von $D$, $E$, $F$ abhängigen Glieder in den Gleichungen und ist daher die Fundamentaldeterminante symmetrisch. In dem zweiten fehlen die von $D$ und $F$ abhängigen Glieder, dagegen treten die von den Centrifugalkräften $E$ abhängigen auf. Die Widerstandskräfte $B$ kommen in diesem Fall im Allgemeinen nicht vor.

§ 377. Wir können daher jene Bewegungsgleichungen vereinfachen und ihnen die Gestalt geben

$$\left.\begin{array}{l} (A_{11}\delta^2 + B_{11}\delta + C_{11})x + \begin{pmatrix} A_{12}\delta^2 + B_{12}\delta + C_{12} \\ + E_{12}\delta \end{pmatrix} y + \text{etc.} = 0 \\ \begin{pmatrix} A_{12}\delta^2 + B_{12}\delta + C_{12} \\ - E_{12}\delta \end{pmatrix} x + (A_{22}\delta^2 + B_{22}\delta + C_{22})y + \text{etc.} = 0 \\ \qquad \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} = 0 \end{array}\right\}.$$

Ihre Auflösung ist bereits in den §§ 313 und 317 in den folgenden Formen ausgedrückt worden, wenn $m_1$, $m_2$, etc. reelle Wurzeln der Fundamentaldeterminante sind,

$$\left.\begin{array}{r} x = x_1 e^{m_1 t} + x_2 e^{m_2 t} + \text{etc.} \\ y = y_1 e^{m_1 t} + y_2 e^{m_2 t} + \text{etc.} \\ \text{etc.} = \text{etc.} \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{r} dx/dt = x_1' e^{m_1 t} + x_2' e^{m_2 t} + \text{etc.} \\ dy/dt = y_1' e^{m_1 t} + y_2' e^{m_2 t} + \text{etc.} \\ \text{etc.} = \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

Darin enthalten $x_1, y_1, z_1$, etc., $x_1', y_1', z_1'$, etc. eine Integrationsconstante als gemeinschaftlichen Factor, $x_2$, $y_2$, etc., $x_2'$, $y_2'$, etc. eine andre Constante u. s. w. Es sind dies die Constanten, die in den §§ 261, 264 etc. $L_1$, $L_2$, etc. genannt wurden. Auch ist $x_1' = x_1 m_1$, $y_1' = y_1 m_1$ u. s. w.

§ 378. Ist in der Fundamentaldeterminante ein Paar complexer Wurzeln von der Form $m_1 = r + p\sqrt{-1}$, $m_2 = r - p\sqrt{-1}$ vorhanden, so nimmt die vorstehende Lösung die Form

$$\left.\begin{aligned} x &= X_1 e^{rt}\cos pt + X_2 e^{rt}\sin pt + x_3 e^{m_3 t} + \text{etc.}\\ y &= Y_1 e^{rt}\cos pt + Y_2 e^{rt}\sin pt + y_3 e^{m_3 t} + \text{etc.}\\ \text{etc.} &= \text{etc.}\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} dx/dt &= X_1' e^{rt}\cos pt + X_2' e^{rt}\sin pt + x_3' e^{m_3 t} + \text{etc.}\\ dy/dt &= Y_1' e^{rt}\cos pt + Y_2' e^{rt}\sin pt + y_3' e^{m_3 t} + \text{etc.}\\ \text{etc.} &= \text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

an, worin $X_1 = x_1 + x_2$, $X_2 = (x_1 - x_2)\sqrt{-1}$ und $X_1' = rX_2 + pX_1$, $X_2' = -pX_1 + rX_2$ ist. Für die $Y$, etc. gelten natürlich ähnliche Ausdrücke. Wir beachten dabei, dass alle Coefficienten in den beiden ersten Verticalreihen lineare Functionen zweier Integrationsconstanten sind, die Coefficienten der dritten Verticalreihe Vielfache einer dritten Constante u. s. w.

§ 379. Prüft man die Form der Lösung in dem letzten Paragraphen, so erkennt man, dass die Verticalreihen nach den Wurzeln der Fundamentaldeterminante geordnet sind. Jede Verticalreihe enthält eine oder zwei willkürliche Constanten, welche aus den Anfangswerthen von $x$, $y$, etc. zu bestimmen sind. Wenn die ganze Lösung bekannt ist, so lassen sich daher die Constanten mit Hülfe der gewöhnlichen Algebra ermitteln, wobei freilich das Verfahren sehr langwierig werden kann, wenn viele unbekannte Constanten vorhanden sind. Ist dagegen die ganze Lösung nicht bekannt, so lassen uns die Mittel der gewöhnlichen Algebra im Stich.

§ 380. Nimmt man z. B. an, man hätte nur eine Wurzel der Fundamentalgleichung gefunden, so kennt man nur die Glieder, die in einer einzigen Verticalreihe stehen. Die übrigen Verticalreihen hängen von den anderen Wurzeln ab, die noch nicht ermittelt sind. *Man kann aber den Werth der Constanten, die in dieser Verticalreihe vorkommt, durch die Anfangswerthe der Variabelen ausdrücken wollen.* Man muss dann im Stande sein, die Grösse irgend einer Schwingung zu finden, ohne die der übrigen zu ermitteln.

Zu diesem Zweck benutzen wir *die Methode der Multiplicatoren*, die darin besteht, gewisse Multiplicatoren für die Gleichungen aufzusuchen, welche den Werthen von $x$, $y$, etc., $dx/dt$, $dy/dt$, etc. eine solche Gestalt geben, dass, wenn man die Producte addirt, alle Verticalreihen mit Ausnahme der einen verschwinden, die wir zurückzubehalten wünschen. Ist dies geschehen, so haben wir eine Gleichung, welche die zu ermittelnde Constante und die Anfangswerthe von $x$, $y$, etc. enthält. Sie reicht zur Bestimmung des Werthes der Constanten hin.

Zwischen den Methoden der Isolirung und der Multiplicatoren besteht der folgende Unterschied. Bei der ersteren wird die mit irgend einem Glied in irgend einer Verticalreihe verbundene Constante gefunden, ohne dass man sich um die

übrigen Glieder in dieser oder irgend einer andern Verticalreihe bekümmert. Bei der letzteren benutzen wir dagegen alle Glieder in dieser Verticalreihe zur Ermittlung der einen Constante. *Bei der ersten Methode isoliren wir irgend ein Glied, bei der letzten irgend eine Verticalreihe.*

§ 381. Die richtigen Multiplicatoren kann man aus der Determinante $\Pi(m)$ ableiten. Nimmt man die Form in § 371, welche sich für Gleichungen zweiter Ordnung am besten eignet, so erhält man durch Entwicklung

$$\Pi(m) = Px + Qy + \text{etc.} + P'\delta x + Q'\delta y + \text{etc.},$$

worin $P$, $Q$, etc. die Stelle der Coefficienten in der entwickelten Determinante vertreten. In § 369 wurde nun bewiesen, dass $\Pi(m)$ Null wird, wenn man für $x$, $y$, etc. die Glieder irgend einer Verticalreihe der Lösung in § 377 setzt, die von einer andern Wurzel als $m$ abhängt. Daraus folgt sofort, dass die richtigen Multiplicatoren zur Trennung der von der Wurzel $m$ abhängigen Verticalreihe von den übrigen Verticalreihen $P$, $Q$, etc., $P'$, $Q'$, etc. sind.

Diese Multiplicatoren sind in Wirklichkeit Determinanten und wenn viele Coordinaten existiren, so mag es umständlich werden, ihre Werthe auszurechnen. Auch die Coefficienten der Verticalreihe, welche von den übrigen getrennt werden soll, sind Determinanten. Diese beiden Gruppen von Determinanten sind mit den Minoren der Fundamentaldeterminante verbunden; die erste mit den Minoren einer Verticalreihe, die letzte mit denen einer Horizontalreihe. Wenn die Differentialgleichungen von der einfacheren Art sind, welche in der Dynamik vorkommt (§ 377), so hat die Fundamentaldeterminante eine gewisse Symmetrie um die Hauptdiagonale. In diesem Fall sind die beiden Determinantengruppen so miteinander verbunden, dass sich die gesuchten Multiplicatoren als einfache Functionen der Coefficienten derjenigen Verticalreihe ausdrücken lassen, die wir abzusondern wünschen.

Anstatt die Transformation von einer Determinantengruppe zu der andern zu machen, verfährt man einfacher unabhängig davon. Die gesuchten Multiplicatoren folgen sofort aus den beiden Gleichungen, die den Sätzen in dem ersten Abschnitt des Kap. 7 (siehe § 316) zu Grund gelegt wurden. Da die hier in Betracht kommenden Gleichungen einfacher als die in dem erwähnten Abschnitt sind, so werden die Beweise dieser beiden Theoreme in dem nächsten Paragraphen kurz zusammengefasst. Die Definitionen der Functionen $A$, $B$, $C$ (§ 311) werden ebenfalls dem speciellen Gebrauch, den wir jetzt von ihnen machen wollen, angepasst.

§ 382. Substituirt man die Glieder in der ersten Verticalreihe der Ausdrücke für $x$, $y$, etc. in § 377 in die Differentialgleichungen, so erhält man eine Gruppe von Gleichungen, welche sich von den Differentialgleichungen nur dadurch unterscheidet, dass $m_1$ an der Stelle von $\delta$ und $x_1$, $y_1$, etc. an der Stelle von $x$, $y$, etc. steht. Zuerst multiplicire man sie bezüglich mit $x_1, y_1$, etc. und addire die Resultate; die Summe lässt sich, wie in § 314, kurz so schreiben

$$A(x_1x_1)m_1^2 + B(x_1x_1)m_1 + C(x_1x_1) = 0.$$

Alsdann multiplicire man diese letzteren bezüglich mit $x_2$, $y_2$, etc. und addire die Resultate. Der Summe kann man, wie in § 316, der Kürze wegen die Form geben

$$A(x_1x_2)m_1^2 + B(x_1x_2)m_1 + C(x_1x_2) = E(x_1y_2)m_1.$$

Die Functionssymbole $A$, $B$, $C$ bezeichnen, wenn auf das Symbol das Argument der Function nicht folgt, Functionen der Coordinaten $x$, $y$, $z$, etc. und wurden in § 311 definirt. So ist

$$A = \frac{1}{2} A_{11} x^2 + A_{12} xy + \frac{1}{2} A_{22} y^2 + \cdots,$$

$$B = \frac{1}{2} B_{11} x^2 + B_{12} xy + \frac{1}{2} B_{22} y^2 + \cdots,$$

$$C = \frac{1}{2} C_{11} x^2 + C_{12} xy + \frac{1}{2} C_{22} y^2 + \cdots.$$

Sind die Differentialgeichungen gegeben, so empfiehlt sich die folgende Regel zur Ermittelung von $A$, $B$, $C$: *Man multiplicire die Gleichungen mit $x$, $y$, $z$, etc. und addire die Producte, indem man den Operator $\delta$ wie einen algebraischen Factor behandelt. Die halben Coefficienten der Potenzen von $\delta$ sind die Functionen $A$, $B$, $C$.*

Wenn man für die Variablen $x$ $y$, $z$, etc. irgend welche Grössen zu substituiren wünscht, so setzt man wie gewöhnlich diese Grössen in Klammern hinter das Functionssymbol und schreibt also

$$A(x_1 x_1) = \frac{1}{2} A_{11} x_1{}^2 + A_{12} x_1 y_1 + \frac{1}{2} A_{22} y_1{}^2 + \cdots$$

und ähnlich für $B(x_1 x_1)$ und $C(x_1 x_1)$.

Wir verallgemeinern dann diese Ausdrücke und setzen der Kürze wegen (§ 316)

$$A(x_1 x_2) = \frac{1}{2} A_{11} x_1 x_2 + \frac{1}{2} A_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \frac{1}{2} A_{22} y_1 y_2 + \cdots.$$

§ 383. **Satz A.** *Die Multiplicatoren zu bestimmen, wenn die Fundamentaldeterminante symmetrisch ist und die Widerstandskräfte nicht fehlen.*

$m_1$, $m_2$ seien irgend zwei Wurzeln dieser Determinante. Nach § 382 ist dann, da die von $E$ abhängigen Glieder nicht auftreten,

$$\left.\begin{aligned} A(x_1 x_2) m_1{}^2 + B(x_1 x_2) m_1 + C(x_1 x_2) = 0 \\ A(x_1 x_2) m_2{}^2 + B(x_1 x_2) m_2 + C(x_1 x_2) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (1).$$

Eliminirt man $B$ und $C$ nacheinander aus diesen Gleichungen, so wird

$$\left.\begin{aligned} A(x_1 x_2) m_1 m_2 = C(x_1 x_2) \\ -A(x_1 x_2)(m_1 + m_2) = B(x_1 x_2) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

es sei denn, dass $m_1$ und $m_2$ dieselbe Wurzel wären.

Jede dieser Gleichungen unter (2) kann zur Ermittlung der gesuchten Multiplicatoren benutzt werden. *Man erhält so zwei Gruppen von Multiplicatoren.* Wir wollen die erste Gleichung wählen, da sie einfachere Resultate liefert.

Wenn in der Fundamentaldeterminante ein Paar complexer Wurzeln vorkommt, z. B. $m_1 = r + p\sqrt{-1}$, $m_2 = r - p\sqrt{-1}$, und wenn $m_3$ irgend eine andre Wurzel ist, so liefert die erste Gleichung (2)

$$\left.\begin{aligned} A(x_1 x_3)\left(r + p\sqrt{-1}\right)m_3 &= C(x_1 x_3) \\ A(x_2 x_3)\left(r - p\sqrt{-1}\right)m_3 &= C(x_2 x_3) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Erinnert man sich, dass $A$ und $C$ lineare Functionen sind, so findet man durch Addition und Subtraction

$$\left.\begin{aligned} A(X_1' x_3)m_3 &= C(X_1 x_3) \\ A(X_2' x_3)m_3 &= C(X_2 x_3) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

worin $X_1$, $X_1'$; $X_2$, $X_2'$ die ihnen in § 378 gegebene Bedeutung haben.

Die Function $A(x_1 x_2)$ lässt sich offenbar aus dem Potential $A(x_1 x_1)$ auf die folgende Art ableiten

$$2A(x_1 x_2) = x_2 \frac{\partial A(x_1 x_1)}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial A(x_1 x_1)}{\partial y_1} + \cdots,$$

worin selbstverständlich $A(x_1 x_1)$ (§ 382) den Werth von $A(xx)$ oder von $A$ darstellt, wenn man $x_1$, $y_1$, etc. statt $x$, $y$, etc. setzt. Die Functionen $B$ und $C$ können auf dieselbe Art behandelt werden.

Die richtigen Multiplicatoren lassen sich nun unmittelbar ableiten.

In den Lösungen, die in § 377 gegeben wurden, multiplicire man die Ausdrücke für $x$, $y$, etc. mit $-\partial C/\partial x$, $-\partial C/\partial y$, etc., nachdem man in diesen Multiplicatoren $x_1$, $y_1$, etc. statt $x$, $y$, etc. geschrieben hat; ebenso multiplicire man die Ausdrücke für $dx/dt$, etc. mit $\partial A/\partial x$, etc., nachdem man $x_1'$, $y_1'$, etc. für $x$, $y$, etc. in diesen Multiplicatoren gesetzt hat. Schliesslich addire man die Producte; alsdann ist in Folge der ersten der Gleichungen (2), da $x_1' = m_1 x_1$, $y_1' = m_1 y_1$, etc. ist, die Summe jeder Verticalreihe mit Ausnahme der ersten Null.

Haben wir complexe Wurzeln in der Fundamentaldeterminante, so nehmen wir die Lösung in § 378. Behandelt man sie auf dieselbe Art, so ergibt sich aus den Gleichungen (4), dass alle Verticalreihen mit Ausnahme der beiden ersten verschwinden. Wiederholt man das Verfahren für die zweite Verticalreihe, so verschwinden wieder alle Verticalreihen mit Ausmahme der beiden ersten.

§ 384. *Die Regel lässt sich zusammenfassen, wie folgt:*

Die Fundamentaldeterminante möge symmetrisch sein und die Widerstandskräfte nicht fehlen. Es werde verlangt, nach der Methode der Multiplicatoren irgend eine gegebene Verticalreihe von den übrigen zu trennen. *Die richtigen Multiplicatoren für die Coordinaten sind die Werthe von $\partial C/\partial x$, $\partial C/\partial y$, etc., nachdem man statt $x$, $y$, etc. in diese Multiplicatoren die entsprechenden Coefficienten der Verticalreihe, die man beizubehalten wünscht, substituirt hat. Die richtigen Multiplicatoren für die Geschwindigkeiten sind die Werthe von $-\partial A/\partial x$, $-\partial A/\partial y$, etc.,*

*nachdem man statt $x$, $y$, etc. in diese Multiplicatoren die entsprechenden Coefficienten der Verticalreihe der Geschwindigkeiten, welche man beizubehalten wünscht, eingesetzt hat. Schliesslich addire man die Producte.*

Auf diese Weise erhält man eine Gleichung, welche die Anfangswerthe der Coordinaten mit der Constanten verbindet, die zu irgend einer Verticalcolumne gehört. Da die Anfangswerthe willkürlich sind, so kann keine der beiden Seiten der Gleichung vollständig verschwinden, wenn die sämmtlichen Multiplicatoren nicht selbst verschwinden. Der Coefficient der Exponentialgrösse auf der rechten Seite kann daher nur in diesem einen Fall Null werden.

Die Multiplicatoren ferner können nur dann sämmtlich verschwinden, wenn die quadratischen Formen $C$ und $A$ ebenfalls für gewisse *endliche Werthe* der Coordinaten verschwinden. In der Dynamik ist aber die Function $A$ dieselbe Function der Coordinaten, wie die lebendige Kraft eine solche der Geschwindigkeiten ist. Es ist daher unmöglich, dass $A$ für irgend welche endliche Werthe der Coordinaten verschwindet.

§ 385. **Beispiel.** Wir wollen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(\delta^2+\delta+1)x+\tfrac{1}{2}\left(\delta-\tfrac{3}{2}\right)y&=0\\ \tfrac{1}{2}\left(\delta-\tfrac{3}{2}\right)x+\left(\delta^2-\delta+\tfrac{1}{4}\right)y&=0\end{aligned}\right\}$$

betrachten. Die Determinante der Lösung reducirt sich, wie man leicht sieht, auf $m^4-\frac{5}{16}=0$.

Man hat daher, wenn man $m$ für $\frac{1}{2}\sqrt[4]{5}$ setzt,

$$\left.\begin{aligned}x&=x_1e^{mt}+x_2e^{-mt}+X_3\cos mt+X_4\sin mt\\ y&=y_1e^{mt}+y_2e^{-mt}+Y_3\cos mt+Y_4\sin mt\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}dx/dt&=mx_1e^{mt}-mx_2e^{-mt}+mX_4\cos mt-mX_3\sin mt\\ dy/dt&=my_1e^{mt}-my_2e^{-mt}+mY_4\cos mt-mY_3\sin mt\end{aligned}\right\}.$$

Multiplicirt man ferner die Gleichungen mit $x$ und $y$ und nimmt die halben Coefficienten der Potenzen von $\delta$, so erhält man

$$A=\tfrac{1}{2}(x^2+y^2),\quad C=\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{3}{4}xy+\tfrac{1}{8}y^2.$$

Wir wollen nun die Coefficienten $x_1$, $y_1$ durch die Anfangsbedingungen ausdrücken. Der Regel folgend, multipliciren wir $x$ und $y$ mit den Differentialquotienten von $C$, nachdem wir $x_1$, $y_1$ für $x$, $y$ in den Multiplicatoren gesetzt haben. Die Geschwindigkeiten multipliciren wir mit den negativen Differentialquotienten von $A$, indem wir in den Multiplicatoren $mx_1$ und $my_1$ für $x$ und $y$ setzen. Schliesslich addiren wir die Resultate. Man erhält so

$$\left.\begin{aligned}x\left(x_1-\tfrac{3}{4}y_1\right)+y\left(-\tfrac{3}{4}x_1+\tfrac{1}{4}y_1\right)-\\ -\frac{dx}{dt}mx_1-\frac{dy}{dt}my_1\end{aligned}\right\}=\left\{\begin{aligned}x_1^2-\tfrac{3}{2}x_1y_1+\tfrac{1}{4}y_1^2-\\ -m^2(x_1^2+y_1^2)\end{aligned}\right\}e^{mt}.$$

Setzt man $t=0$, und gibt $x$, $y$ und ihren Geschwindigkeiten ihre bekannten Anfangswerthe, so erhält man eine Gleichung zur Ermittlung der Constanten $x_1$, $y_1$. Da ihr Verhältniss

$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{m^2 + m + 1}{\frac{1}{2}\left(m - \frac{3}{2}\right)}, \quad m = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{5}$$

aus der ersten Gleichung bekannt ist, sò ergibt sich $x_1$, $y_1$ leicht.

Wünscht man die Coefficienten der trigonometrischen Glieder zu finden, so benutze man entweder zwei Gruppen von Multiplicatoren, weil die beiden imaginären Exponentialgrössen sich in dem trigonometrischen Glied vermischt haben; oder ersetze die trigonometrischen Glieder durch ihre imaginären Exponentialgrössen und suche die Coefficienten einer jeden mittelst eines einzigen Systems von Multiplicatoren. In dem ersten Fall ist das eine System von Multiplicatoren

$$X_3 - \tfrac{3}{4} Y_3, \quad -\tfrac{3}{4} X_3 + \tfrac{1}{4} Y_3, \quad -m X_4, \quad -m Y_4$$

und das andre

$$X_4 - \tfrac{3}{4} Y_4, \quad -\tfrac{3}{4} X_4 + \tfrac{1}{4} Y_4, \quad +m X_3, \quad +m Y_3.$$

§ 386. **Satz B.** *Die Multiplicatoren zu bestimmen, wenn die Fundamentaldeterminante symmetrisch ist und die Widerstandskräfte fehlen.*

Dieser Satz ist zwar eigentlich in dem letzten enthalten, da aber das Fehlen der Function $B$ eine bedeutende Vereinfachung zur Folge hat, so ist es der Mühe Werth, den Fall gesondert zu untersuchen.

Weil die Widerstandskräfte fehlen, so treten nur grade Potenzen von $\delta$ in den Gleichungen auf. Für jede Wurzel der Fundamentaldeterminante existirt daher eine andere, welche der Grösse nach ihr gleich ist, aber ein anderes Vorzeichen hat. Sind $A$ und $C$ definite Functionen und haben sie dasselbe Vorzeichen, so sind diese Wurzeln von der Form $\pm p\sqrt{-1}$. Wählt man diesen Typus, so kann man die Gleichungen in § 378 schreiben

$$x = X_1 \cos pt + X_2 \sin pt + x_3 e^{m_3 t} + \cdots, \text{ etc.} = \text{etc.},$$

$$dx/dt = X_1' \cos pt + X_2' \sin pt + x_3' e^{m_3 t} + \cdots, \text{ etc.} = \text{etc.}$$

Dabei ist mit Ausnahme des Falles, in welchem gleiche Wurzeln vorkommen,

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \text{etc.} = \frac{X_1'}{-X_2'} = \frac{Y_1'}{-Y_2'} = \text{etc.} = H,$$

weil die Verhältnisse der Coefficienten einer Exponentialgrösse durch die Minoren der Fundamentaldeterminante ausgedrückt wurden und diese, da sie nur grade Potenzen von $m$ enthalten, sich nicht ändern, wenn die Exponenten der Grösse nach gleich, aber von verschiedenem Vorzeichen sind.

Hier steht $H$ für die Constante in der zweiten Verticalreihe auf der rechten Seite der Gleichungen, während die Constante in der ersten Verticalreihe als Factor in $X_1$, $Y_1$, etc., $X_1'$, $Y_1'$, etc. enthalten ist.

Da die Function $B$ Null ist, so reduciren sich die Gleichungen (2) des § 383 auf $A(x_1 x_2) = 0$, $C(x_1 x_2) = 0$, ausgenommen, wenn $m_1 = \pm m_2$ ist. Bei einem Paar complexer Wurzeln, wie z. B.

$m_1 = r + p\sqrt{-1}$, $m_2 = r - p\sqrt{-1}$, combinirt mit einer dritten Wurzel $m_3$, hat man genau, wie in jenem Paragraphen,

$$\left.\begin{array}{l} A(X_1 x_3) = 0 \\ A(X_2 x_3) = 0 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} C(X_1 x_3) = 0 \\ C(X_2 x_3) = 0 \end{array}\right\}.$$

§ 387. Zur Ableitung der richtigen Multiplicatoren kann sowohl die Function $A$ als $C$ dienen. *Wir erhalten so zwei Gruppen von Multiplicatoren. Welche die geeignetste ist, hängt von der Form von $A$ und $C$ ab.*

Enthält eine dieser Functionen nur die Quadrate der Coordinaten, d. h. hat sie die Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \cdots,$$

so sind offenbar ihre Differentialquotienten viel einfacher, als wenn auch Glieder mit den Producten der Coordinaten auftreten. Die Multiplicatoren ergeben sich aus diesen Differentialquotienten und sind daher auch einfacher. Diejenige Function wird mithin zu wählen sein, welche die wenigsten Glieder mit Producten der Coordinaten hat.

Wählt man die Function $A$, so dient die folgende Regel zur Ermittlung der Multiplicatoren. Es werde verlangt, von den übrigen eine specielle Schwingung zu trennen, sagen wir, die beiden Verticalreihen, welche die Phase $pt$ enthalten. *Die richtigen Multiplicatoren für die Coordinaten $x, y$, etc. sind die Werthe von $\frac{\partial A}{\partial x}$, $\frac{\partial A}{\partial y}$, etc., nachdem man für $x, y$, etc. in diese Multiplicatoren die Coefficienten einer der beiden Verticalreihen substituirt hat, welche die Phase $pt$ enthalten. Durch Addition dieser Producte erhält man eine Gleichung, aus welcher alle Schwingungen mit Ausnahme der einen, die man beizubehalten wünscht, verschwunden sind. Dieselben Multiplicatoren kann man nun für die Geschwindigkeiten benutzen und kommt so durch eine zweite Addition zu einer weiteren Gleichung derselben Art.*

Die beiden so gefundenen Gleichungen lassen sich schreiben

$$x \frac{\partial A(X_1 X_1)}{\partial X_1} + \text{etc.} = 2A(X_1 X_1)\{\cos pt + H \sin pt\},$$

$$\frac{dx}{dt} \frac{\partial A(X_1 X_1)}{\partial X_1} + \text{etc.} = 2A(X_1 X_1)\{Hp \cos pt - p \sin pt\}.$$

Setzt man entweder vor oder nach der Benutzung der Multiplicatoren $t = 0$, so erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung von $H$ und der zweiten in $X_1$, $Y_1$, etc. enthaltenen Constanten.

§ 388. Eine Regel zur Auffindung der Functionen $A$ und $C$, wenn die Differentialgleichungen bekannt sind, wurde schon in § 382 gegeben. Bei der Benutzung der Lagrange'schen Methode ist es jedoch manchmal vortheilhafter, von dem Ausdruck für die lebendige

Kraft und die Kräftefunction auszugehen, aus welchen diese Gleichungen abgeleitet wurden. Aus Bd. 1 ist ersichtlich, dass die doppelte lebendige Kraft

$$2T = A_{11}x'^2 + 2A_{12}x'y' + \cdots$$

ist. Die Function $A$ entstand daher aus $T$ lediglich durch Weglassen der Accente an den Coordinaten. Die Function $C$ ist selbstverständlich dieselbe, wie die in Bd. 1 definirte Function $U_0 - U$.

§ 389. **Satz C.** *Die Multiplicatoren zu bestimmen, wenn die Widerstandskräfte fehlen, die Determinante aber durch die Centrifugalkräfte zu einer schiefen wird.*

Aus den Bewegungsgleichungen in § 377 bilden wir die Determinante, die wir „Fundamentaldeterminante" genannt haben. Sie aufzuschreiben ist nicht nöthig, da ihre Gestalt sich unmittelbar aus den Gleichungen ergibt. Sie ist überdies ausführlich in § 312 angegeben worden.

Setzt man in dieser Determinante $-\delta$ statt $\delta$, so sind die Horizontalreihen der neuen Determinante dieselben wie die Verticalreihen der alten, die Determinante bleibt also unverändert. Wird sie entwickelt, so enthält sie nur grade Potenzen von $\delta$, ihre Wurzeln treten mithin paarweise auf. Wir nehmen daher als Normalform der Lösung, statt der in § 378, die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} x &= X_1 \cos pt + X_2 \sin pt + x_3 e^{m_3 t} + \cdots \\ y &= Y_1 \cos pt + Y_2 \sin pt + y_3 e^{m_3 t} + \cdots \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1),$$

$$\left.\begin{aligned} dx/dt &= X_1' \cos pt + X_2' \sin pt + x_3' e^{m_3 t} + \cdots \\ dy/dt &= Y_1' \cos pt + Y_2' \sin pt + y_3' e^{m_3 t} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2).$$

Darin stellen die beiden ersten Verticalreihen die gewöhnliche Form einer Hauptschwingung und die dritte irgend eine andre Form vor. Wenn Centrifugalkräfte, d. h. die Glieder, die von $E$ abhängen, auftreten, so enthalten die Minoren der Fundamentaldeterminante nicht lediglich grade Potenzen von $\delta$. Die Folge ist, dass die Coefficienten in der zweiten Verticalreihe nicht nothwendiger Weise in demselben Verhältniss zu denen in der ersten zu stehen brauchen.

Da die Function $B$ fehlt, so bestehen nach § 382 die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A(x_1 x_2) m_1 + C(x_1 x_2) \frac{1}{m_1} &= E(x_1 y_2) \\ A(x_1 x_2) m_2 + C(x_1 x_2) \frac{1}{m_2} &= -E(x_1 y_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3).$$

Addirt man sie, um das Functionssymbol $E$ zu eliminiren, so ergibt sich

$$A(x_1 x_2) m_1 m_2 + C(x_1 x_2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

den Fall ausgenommen, in welchem $m_1 = -m_2$ ist.

Wir bemerken ferner, dass nach § 382

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1x_1)m_1^2 + C(x_1x_1) = 0 \\ A(x_2x_2)m_2^2 + C(x_2x_2) = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ist.

Wir hätten auch statt der Function $E$ die Function $A$ oder $C$ aus den Gleichungen (3) eliminiren können; *in jedem Fall lässt sich eine Regel zur Ermittlung der Multiplicatoren ableiten; die einfachste Regel findet man jedoch durch Elimination der Function $E$.*

Die Formel (4) stimmt mit der in § 383 unter (2) angegebenen bis auf das Vorzeichen von $A$ überein. Verfährt man daher ebenso wie in diesem Paragraphen, so erhält man eine entsprechende Regel für die Ableitung der Multiplicatoren.

Statt der Gleichungen (3) in § 383 haben wir jetzt, da $r = 0$ ist,

$$\left.\begin{array}{r} A(x_1x_3)pm_3\sqrt{-1} + C(x_1x_3) = 0 \\ -A(x_2x_3)pm_3\sqrt{-1} + C(x_2x_3) = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Beachtet man, dass $A$ und $C$ lineare Functionen der Buchstaben mit irgend einem Index sind, so ergeben sie durch Addition und Subtraction

$$\left.\begin{array}{l} A(X_1'x_3)m_3 + C(X_1x_3) = 0 \\ A(X_2'x_3)m_3 + C(X_2x_3) = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

worin, wie früher, $X = x_1 + x_2$, $X_2 = (x_1 - x_2)\sqrt{-1}$, $X_1' = pX_1$, $X_2' = -pX_1$ ist.

Setzt man, in den Gleichungen (5), $m_1 = p\sqrt{-1}$, $m_2 = -p\sqrt{-1}$, so findet man durch Subtraction

$$A(X_1'X_2') + C(X_1X_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

§ 390. Aus diesen Formeln ergibt sich nun die folgende Art der Ableitung der Multiplicatoren.

Die Widerstandskräfte mögen fehlen und die Fundamentaldeterminante sei, aber nur in Folge der Centrifugalkräfte, schief. Man soll irgend eine Hauptschwingung von den anderen trennen. *Wählt man eine der beiden Verticalreihen aus, welche die Schwingung bilden, so sind die richtigen Multiplicatoren für die Coordinaten $x$, $y$, etc. die Werthe von $\frac{\partial C}{\partial x}$, $\frac{\partial C}{\partial y}$, etc., nachdem man in diese Multiplicatoren für $x$, $y$, etc. die entsprechenden Coefficienten in der gewählten Verticalreihe substituirt hat. Die richtigen Multiplicatoren für die Geschwindigkeiten sind die Werthe von $\frac{\partial A}{\partial x}$, $\frac{\partial A}{\partial y}$, etc., nachdem man in diese Multiplicatoren für $x, y$, etc. die entsprechenden Coefficienten dieser Geschwindigkeiten in der gewählten Verticalreihe substituirt hat. Schliesslich werden alle Producte addirt. Alsdann wiederholt man das Verfahren mit den Coefficienten der zweiten der beiden Verticalreihen, welche die Schwingung bilden.*

In Folge der Gleichungen (5) und (8) ergibt sich, dass bei jedem solchen Verfahren alle Verticalreihen *mit Ausnahme einer einzigen* aus der Schlusssumme verschwinden. Ein bemerkenswerther Unterschied besteht jedoch zwischen den Verticalreihen, welche reelle Exponentialgrössen und denen, welche trigonometrische Ausdrücke enthalten. Operirt man mit den in die Multiplicatoren eingesetzten Coefficienten einer der ersteren, so *verschwindet die zugehörige Verticalreihe nicht;* operirt man dagegen mit den Coefficienten einer der letzteren, so ist es *die Verticalreihe selbst, deren Coefficienten benutzt wurden, die nicht verschwindet.*

§ 391. **Beispiel.** Man betrachte die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r}(\delta^2-8)x+\sqrt{6}\,\delta y=0\\ -\sqrt{6}\,\delta x+(\delta^2+2)y=0\end{array}\right\}.$$

Wie man leicht sieht, reducirt sich die Fundamentaldeterminante auf $m^4-16=0$. Man hat daher

$$\left.\begin{array}{l}x=X_1\cos 2t+X_2\sin 2t+x_3e^{2t}+x_4e^{-2t}\\ y=Y_1\cos 2t+Y_2\sin 2t+y_3e^{2t}+y_4e^{-2t}\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}dx/dt=2X_2\cos 2t-2X_1\sin 2t+2x_3e^{2t}-2x_4e^{-2t}\\ dy/dt=2Y_2\cos 2t-2Y_1\sin 2t+2y_3e^{2t}-2y_4e^{-2t}\end{array}\right\},$$

worin

$$\left.\begin{array}{l}2x_3=\sqrt{6}\,y_3\\ 2x_4=-\sqrt{6}\,y_4\end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l}Y_1=-\sqrt{6}\,X_2\\ Y_2=\sqrt{6}\,X_1\end{array}\right\}$$

ist.

Multiplicirt man ferner die Gleichungen (§ 882) mit $x$, $y$, addirt und nimmt die Hälfte der Coefficienten der Potenzen von $\delta$, so erhält man

$$A=\tfrac{1}{2}(x^2+y^2),\qquad C=\tfrac{1}{2}(-8x^2+2y^2).$$

Die richtigen Multiplicatoren ergeben sich nach § 390 aus der Formel

$$x\frac{\partial C}{\partial x}+y\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{dx}{dt}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial A}{\partial y}.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial C}{\partial x}=-8x,\quad \frac{\partial C}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial A}{\partial x}=x,\quad \frac{\partial A}{\partial y}=y.$$

Hat man nun die Verticalreihe gewählt, deren Coefficienten in den Multiplicatoren benutzt werden sollen, so ergibt sich aus § 390, dass der richtige Multiplicator für die erste Gleichung minus acht mal der Coefficient der Verticalreihe in dieser Gleichung ist; der richtige Multiplicator für die zweite Gleichung zweimal der Coefficient in dieser Gleichung und die richtigen Multiplicatoren für die dritte und vierte Gleichung die Coefficienten selbst in diesen Gleichungen sind.

Wir wollen zuerst $x_4$, $y_4$ suchen. Weil die vierte Verticalreihe eine *reelle* Exponentialgrösse enthält, so operiren wir mit den Coefficienten der zugehörigen Verticalreihe. Die Multiplicatoren sind daher $\frac{\partial C}{\partial x}=-8x_3$, $\frac{\partial C}{\partial y}=2y_3$, $\frac{\partial A}{\partial x}=2x_3$, $\frac{\partial A}{\partial y}=2y_3$. Daraus findet man

$$-8x_3x+2y_3y+2x_3\frac{dx}{dt}+2y_3\frac{dy}{dt}=16y_3y_4e^{-2t};$$

drückt man $x_3$ durch $y_3$ aus und setzt $t = 0$, so ergibt sich

$$-4\sqrt{6}x + 2y + \sqrt{6}\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = 16y_4,$$

woraus man $y_4$ als Function der Anfangswerthe der Coordinaten und ihrer Anfangsgeschwindigkeiten erhält.

Alsdann suchen wir $X_1$, $X_2$. Nimmt man die Coefficienten der ersten Verticalreihe, so sind die Multiplicatoren

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -8X_1, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 2Y_1, \quad \frac{\partial A}{\partial x} = 2X_2, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = 2Y_2.$$

Da diese Verticalreihen trigonometrische Ausdrücke enthalten, so verschwindet, wie wir wissen, wenn wir mit den Coefficienten der einen Verticalreihe in den Multiplicatoren operiren, die andere Verticalreihe. Berücksichtigt man daher keine andere Verticalreihe ausser der ersten, so hat man

$$-8X_1 x + 2Y_1 y + 2X_2\, dx/dt + 2Y_2\, dy/dt = 16(X_1^2 + X_2^2)\cos 2t;$$

substituirt man für $Y_1$ und $Y_2$ und setzt $t = 0$, so ergibt sich

$$-8X_1 x - 2\sqrt{6}X_2 y + 2X_2\, dx/dt + 2\sqrt{6}X_1\, dy/dt = 16(X_1^2 + X_2^2).$$

Verfährt man auf dieselbe Art mit den Coefficienten der zweiten Verticalreihe, so erhält man

$$-8X_2 x + 2Y_2 y - 2X_1\, dx/dt - 2Y_1\, dy/dt = 16(X_1^2 + X_2^2)\sin 2t;$$

und, setzt man ein, wie zuvor,

$$-8X_2 x + 2\sqrt{6}\,X_1 y - 2X_1\, dx/dt + 2\sqrt{6}\,X_2\, dy/dt = 0.$$

Die Gleichungen bestimmen $X_1$ und $X_2$ als Functionen der Anfangswerthe von $x$, $y$ und ihrer Differentialquotienten.

§ 392. **Satz D.** *Welche Wirkung haben gleiche Wurzeln auf die gegebenen Regeln?*

Wenn gleiche Wurzeln in der Fundamentaldeterminante vorkommen, so bedarf es nur einer geringen Abänderung unserer Sätze. Wir wollen uns auf die allgemeine Lösung in § 377 beziehen und annehmen, es seien z. B. drei Wurzeln gleich $m_1$ vorhanden. Betrachtet man sie als Grenzen der ungleichen Wurzeln $m_1$, $m_1 + h$, $m_1 + k$, so kann man die genannte Lösung in der Form

$$x = x_1 e^{m_1 t} + G\frac{\partial}{\partial m_1}(x_1 e^{m_1 t}) + H\frac{\partial^2}{\partial m_1^2}(x_1 e^{m_1 t}) + x_4 e^{m_4 t} + \cdots,$$

$$y = y_1 e^{m_1 t} + G\frac{\partial}{\partial m_1}(y_1 e^{m_1 t}) + H\frac{\partial^2}{\partial m_1^2}(y_1 e^{m_1 t}) + y_4 e^{m_4 t} + \cdots,$$

etc. = etc.,

$$\frac{dx}{dt} = x_1' e^{m_1 t} + \frac{\partial}{\partial m_1}(x_1' e^{m_1 t}) + \frac{\partial^2}{\partial m_1^2}(x_1' e^{m_1 t}) + x_4' e^{m_4 t} + \cdots,$$

etc. = etc.

schreiben, worin $x_1' = x_1 m_1$, $x_4' = x_4 m_4$, etc. und $G$, $H$ zwei Constanten sind, die noch zu der einen in $x_1$, $y_1$, etc. enthaltenen hinzukommen.

Zwei Fragen lassen sich jetzt stellen: (1) Wenn wir gewisse Multiplicatoren benutzen, um eine Verticalreihe auszusondern, die von

einer einzelnen Wurzel, wie z. B. $m_4$ abhängt, werden dann auch jetzt noch die Verticalreihen, welche von anderen gleichen Wurzeln wie z. B. $m_1$ abhängen und daher Potenzen von $t$ als Factoren enthalten, verschwinden?

(2) Was für Multiplicatoren muss man benutzen, um die drei Verticalreihen, welche zu den drei gleichen Wurzeln gehören, von den übrigen zu sondern?

§ 393. Was die erste Frage angeht, wollen wir annehmen, es solle die vierte Verticalreihe der Gleichungen in § 392 von den übrigen getrennt werden und wollen die nämlichen Multiplicatoren gebrauchen, wie früher, als keine gleichen Wurzeln vorhanden waren. Da die drei ersten Verticalreihen in dem allgemeinen Fall, wenn $h$ und $k$ beliebige Werthe haben, verschwinden, so müssen sie offenbar auch dann verschwinden, wenn $h$ und $k$ unbegrenzt klein sind. *Daraus schliessen wir, dass jede Verticalreihe, welche von einer einzelnen Wurzel abhängt, sich nach den früheren Regeln absondern lässt.*

Man nehme z. B. die in Satz A, § 383 gegebene Regel. Um die vierte Verticalreihe abzutrennen, multipliciren wir die Gleichungen mit

$$\partial C(x_4 x_4)/\partial x_4, \text{ etc.}, \quad -\partial A(x_4' x_4')/\partial x_4', \text{ etc.}$$

und addiren die Producte. Da die drei ersten Verticalreihen verschwinden müssen, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} C(x_1 x_4) - A(x_1' x_4') &= 0 \\ C\left(\frac{\partial x_1}{\partial m_1} x_4\right) - A\left(\frac{\partial x_1'}{\partial m_1} x_4'\right) &= 0 \\ C\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial m_1^2} x_4\right) - A\left(\frac{\partial^2 x_1'}{\partial m_1^2} x_4'\right) &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Die beiden letzten Gleichungen folgen offenbar auch durch ein einfaches Verfahren aus der ersten.

§ 394. Bei der zweiten Frage handelt es sich um die Multiplicatoren, welche die drei ersten Verticalreihen von den übrigen trennen sollen. Man erhält sie mit Hülfe der obigen Gleichungen. Da nämlich $m_4$ irgend eine andre Wurzel und

$$2C(x_1 x_4) = \frac{\partial C}{\partial x_1} x_4 + \frac{\partial C}{\partial y_1} y_4 + \cdots$$

ist, so braucht man nur die durch die Coefficienten von $x_4$, $y_4$, etc. in diesen Gleichungen angegebenen Multiplicatoren zu benutzen. Die Regel lässt sich so fassen:

*Man multiplicire die Gleichungen mit den richtigen Factoren für die erste Verticalreihe, indem man $x_1$, $y_1$, etc., $x_1'$, $y_1'$, etc. als Coefficienten behandelt und addire die Producte. Auf diese Art bekommt man eine der drei gesuchten Gleichungen. Man multiplicire die Gleichungen mit*

*den richtigen Factoren für die zweite Verticalreihe, als ob* $\frac{\partial x_1}{\partial m_1}$, $\frac{\partial y_1}{\partial m_1}$, *etc.,* $\frac{\partial x_1'}{\partial m_1'}$, *etc. die Coefficienten wären und addire die Producte. Man erhält so die zweite Gleichung. Schliesslich multiplicire man die Gleichungen mit den richtigen Factoren für die dritte Verticalreihe, als ob* $\frac{\partial^2 x_1}{\partial m_1^2}$, *etc.,* $\frac{\partial^2 x_1'}{\partial m_1'^2}$, *etc. die Coefficienten wären und addire die Producte. Man kommt auf diese Art im Ganzen zu drei Gleichungen für die drei Constanten, welche in den drei ersten Verticalreihen auftreten.*

Die eben erwähnten richtigen Factoren werden aus den Coefficienten nach den Regeln in Satz A oder C berechnet.

§ 395. Bei gleichen Wurzeln kommt es bekanntlich manchmal vor, dass einige der Glieder, welche $t$ als Factor enthalten, in der Lösung nicht auftreten. Die Anzahl der Constanten wird dann durch grössere Unbestimmtheit der Coefficienten, welche die Exponentialgrösse begleiten, ausgeglichen. Betrachtet man diese gleichen Wurzeln als Grenze ungleicher Wurzeln, wie in § 393, so ergibt sich, dass man wieder dieselben Regeln zur Ableitung der Multiplicatoren benutzen kann. Wir ordnen die Lösung in Verticalreihen mit einer Constante in jeder derselben. Unter Benutzung der richtigen Multiplicatoren lässt sich, wie oben beschrieben, dann irgend eine einzelne Wurzel sofort abtrennen. Zur Bestimmung der Constanten, welche die gleichen Wurzeln begleiten, haben wir ebensoviele Systeme von Multiplicatoren nöthig, als Verticalreihen mit dieser Wurzel oder der zu ihr gehörigen Wurzel vorhanden sind.

§ 396. **Beispiel.** Man betrachte die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(\delta^2-1)x+y+z&=0\\ x+(\delta^2-1)y+z&=0\\ x+y+(\delta^2-1)z&=0\end{aligned}\right\}.$$

Man findet leicht, dass die Fundamentaldeterminante sich auf

$$(m^2-2)^2(m^2+1)=0$$

reducirt. Man setze $\alpha=\sqrt{2}$ und schreibe die Lösung in der Form

$$\left.\begin{aligned}x&=Ee^{\alpha t}\qquad\qquad+Ge^{-\alpha t}\qquad\qquad+K\sin t+L\cos t\\ y&=\qquad\quad+Fe^{\alpha t}\qquad\qquad+He^{-\alpha t}+K\sin t+L\cos t\\ z&=-Ee^{\alpha t}-Fe^{\alpha t}-Ge^{-\alpha t}-He^{-\alpha t}+K\sin t+L\cos t\end{aligned}\right\},$$

worin $E$, $F$, $G$, $H$, $K$, $L$ die sechs zu bestimmenden Constanten sind.

Aus den Gleichungen, die aufzulösen sind, ist ersichtlich, dass die Potentialfunctionen $A$ und $C$ durch

$$\left.\begin{aligned}2C&=-x^2-y^2-z^2+2xy+2yz+2zx\\ 2A&=x^2+y^2+z^2\end{aligned}\right\}$$

gegeben sind. Der Regel in § 387 entsprechend, wählen wir zum Operiren die

Function $A$, weil sie die einfachsten Multiplicatoren liefert. Die richtigen Multiplicatoren sind danach $\partial A/\partial x = x$, $\partial A/\partial y = y$, $\partial A/\partial z = z$, worin wir statt $x$, $y$, $z$ die Coefficienten der betreffenden Verticalreihe setzen. Die richtigen Multiplicatoren sind daher der Reihe nach die Coefficienten der Verticalreihen.

Man soll z. B. $K$ und $L$ finden. Sämmtliche Coefficienten in jeder dieser beiden Verticalreihen sind gleich. Die Multiplicatoren sind daher gleich, und man erhält durch Addition der Gleichungen, wenn man $t = 0$ setzt,

$$x + y + z = 3L.$$

Behandelt man die Differentialquotienten auf dieselbe Art (§ 387), so wird

$$\delta x + \delta y + \delta z = 3K.$$

Will man die vier Constanten $E$, $F$, $G$, $H$ finden, die sämmtlich mit den zusammengehörigen Wurzeln $\pm\alpha$ verbunden sind, so müssen vier Gleichungen aufgestellt werden. Der Regel zufolge sind die Multiplicatoren die Coefficienten der verschiedenen Verticalreihen. Man erhält so für $t = 0$

$$\left.\begin{aligned} Ex + 0y - Ez &= E(2E + 2G + F + H) \\ 0x + Fy - Fz &= F(E + G + 2F + 2H) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} E\delta x + 0\delta y - E\delta z &= E\alpha(2E - 2G + F - H) \\ 0\delta x + F\delta y - F\delta z &= F\alpha(E - G + 2F - 2H) \end{aligned}\right\}.$$

Dieses einfache und durchsichtige Beispiel erläutert wohl hinlänglich das Verfahren, welches einzuschlagen ist, wenn die richtigen Multiplicatoren nicht anders zu ermitteln sind.

§ 397. Beisp. Wenn die Differentialgleichungen so beschaffen sind, dass die Fundamentaldeterminante um die Hauptdiagonale symmetrisch ist, mögen nun die Widerstandskräfte vorhanden sein oder nicht, so ist dem § 262 entsprechend $x_1/I_{11}(m_1) = y_1/I_{12}(m_1) = \text{etc.} = G$, worin $G$ eine willkürliche Constante bedeutet. Aehnliche Gleichungen existiren für die übrigen Wurzeln der Fundamentaldeterminante. Man leite daraus ab, dass der Operator $\Pi(m)$, wenn er entwickelt wird, die Form annimmt:

$$G\Pi(m) = \frac{\partial A(x_1 x_1)}{\partial x_1}\delta x + \frac{\partial A(x_1 x_1)}{\partial y_1}\delta y + \text{etc.} - \frac{1}{m_1}\frac{\partial C(x_1 x_1)}{\partial x_1}x - \\ - \frac{1}{m_1}\frac{\partial C(x_1 x_1)}{\partial y_1}y - \text{etc.}$$

Daraus folgere man die Formeln für die Multiplicatoren in Satz A, § 383.

## Die Fourier'sche Regel.

§ 398. Von den beiden wichtigen Problemen, welche in der Dynamik vorkommen (§ 376), trifft man dasjenige am häufigsten an, bei welchem das System um eine Gleichgewichtslage frei von allen Widerstandskräften schwingt. Es ist dies bekanntlich das Lagrange'sche Problem und seine Lösung wurde in Kap. II besprochen.

Der Fall tritt nun oft ein, dass die gewählten Coordinaten es erlauben, der doppelten lebendigen Kraft $2T$ die Form

$$2T = x'^2 + y'^2 + \cdots$$

zu geben, in welcher keine Glieder mit den Producten der Geschwindig-

keit auftreten. Wenn dagegen die lebendige Kraft solche Producte enthält, ereignet es sich wohl, dass die Kräftefunction $U$ die Gestalt

$$2U = x^2 + y^2 + \cdots$$

hat, ohne Glieder mit den Producten der Coordinaten.

In diesen beiden Fällen kommt man zu einer einfachen Regel, wenn man so vorgeht, wie in § 386. In dem ersten Fall sind die Lagrange'schen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 x + C_{11}x + C_{12}y + \cdots &= 0 \\ \delta^2 y + C_{12}x + C_{22}y + \cdots &= 0 \\ \text{etc.} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \cdots \quad (1).$$

Der in § 262 zur Auflösung linearer Differentialgleichungen gegebenen Regel entsprechend hat man

$$\left.\begin{aligned} x &= X_1 \cos pt + X_2 \sin pt + X_3 \cos qt + X_4 \sin qt + \text{etc.} \\ y &= Y_1 \cos pt + Y_2 \sin pt + Y_3 \cos qt + Y_4 \sin qt + \text{etc.} \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \quad (2).$$

Aus Bd. 1, § 457 ist ersichtlich, dass die Coefficienten $X_1$, etc., $Y_1$, etc., ausführlich geschrieben, die Gestalt haben

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= F_1 I_1(p), \quad X_2 = F_2 I_1(p), \quad X_3 = F_3 I_1(q), \quad \text{etc.} \\ Y_1 &= F_1 I_2(p), \quad Y_2 = F_2 I_2(p), \quad Y_3 = F_3 I_2(q), \quad \text{etc.} \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned}\right\} \cdot \quad (3),$$

worin $F_1, F_2, F_3$, etc. die $2n$ Integrationsconstanten sind, die in dem angezogenen Paragraphen $L_1 \cos \varepsilon_1$, $L_1 \sin \varepsilon_1$, $L_2 \cos \varepsilon_2$, etc. genannt wurden, und $I_1, I_2$, etc. die Minoren der Lagrange'schen Determinante bezeichnen. Diese Werthe von $X_1$, etc. ergeben sich auch aus § 53 in diesem Band; nur ist die Bezeichnung der Minoren etwas anders. Siehe auch § 386.

Man beachte, dass jede Verticalreihe der Lösung (2) ihre eigene unbestimmte Constante hat. Unsre Absicht ist, diese Constanten durch die Anfangscoordinaten und -Geschwindigkeiten auszudrücken.

Da den Gleichungen (1) analytisch durch die in irgend einer Verticalreihe stehenden Werthe von $x$, $y$, etc. genügt wird, so wollen wir für $x$, $y$, etc. die Glieder der ersten Verticalreihe substituiren und die sich ergebenden Gleichungen bez. mit $X_3$, $Y_3$, etc. multipliciren. Addirt man die Resultate, so ergibt sich nach der Division mit $\cos pt$

$$p^2(X_1X_3 + Y_1Y_3 + \cdots) = C_{11}X_1X_3 + C_{12}(X_1Y_3 + X_3Y_1) + \text{etc.}$$

Da die rechte Seite eine symmetrische Function der Coefficienten der ersten und dritten Verticalreihe ist, so hat man

$$p^2(X_1X_3 + \text{etc.}) = q^2(X_1X_3 + \text{etc.}).$$

Daraus folgt unmittelbar, dass mit Ausnahme des Falles, wenn $p = \pm q$ ist,

$$X_1 X_3 + Y_1 Y_3 + \text{etc.} = 0 \quad \dots \dots \quad (4)$$

sein muss. *Genau derselbe Beweis gilt auch dann, wenn die Producte in der Kräftefunction fehlen.*

Man beachte die Aehnlichkeit zwischen diesem Beweis und dem, welchen Laplace bei der Ableitung der Fundamentaleigenschaft seiner Functionen durch Integration aus seiner Differentialgleichung gibt.

In den beiden genannten Fällen lässt sich jede Verticalreihe, z. B. die erste, durch die Benutzung der Coefficienten $X_1$, $Y_1$, etc. dieser Verticalreihe als Multiplicatoren abtrennen. Setzt man $t = 0$, so nehmen die Coordinaten $x$, $y$, etc. ihre Anfangswerthe an und die zweite, vierte und alle übrigen graden Verticalreihen verschwinden aus (2). Durch Multiplication mit $X_1$, $Y_1$, etc. erhält man dann

$$x X_1 + y Y_1 + \text{etc.} = X_1^2 + Y_1^2 + \text{etc.} \quad \dots \dots \quad (5).$$

Ebenso verwandelt man durch Differentiation der Gleichungen (2) die Sinusse in Cosinusse, worauf die erste, dritte und alle ungraden Verticalreihen für $t = 0$ verschwinden. Durch Multiplication mit $X_2$, $Y_2$, etc. wird

$$(dx/dt) X_2 + (dy/dt) Y_2 + \text{etc.} = p(X_2^2 + Y_2^2 + \text{etc.}) \quad . \quad . \quad (6).$$

Substituirt man für $X_1$, $Y_1$, etc. ihre Werthe aus (3), *so erhält man zwei Gleichungen zur Ermittlung der beiden Constanten $F_1$, $F_2$, welche zu der Schwingung gehören, deren Periode $2\pi/p$ ist.* Diese Gleichungen lassen sich als Regel auf folgende Art aussprechen: *Man multiplicire jede Coordinate mit dem Coefficienten des Cosinus in der Verticalreihe, welche wir abtrennen wollen, addire die Resultate und setze $t = 0$. Alle anderen Verticalreihen verschwinden dann aus der Summe und lassen eine Gleichung zur Ermittlung der Integrationsconstanten, welche den Cosinus begleitet, zurück.*

*Um die Integrationsconstante zu finden, welche zu dem Sinus gehört, der in irgend einer Verticalreihe vorkommt, differenzire man die Coordinaten und verwandle so die Sinusse in Cosinusse. Verfährt man dann ebenso wie zuvor, so erhält man eine Gleichung zur Ermittlung der Constante.* Diese Regeln sind einfache Zusätze zu denen in § 387.

§ 399. Es kommt zuweilen vor, dass man die lebendige Kraft $T$ in der Form

$$2T = m_1 x'^2 + m_2 y'^2 + \cdots \quad \dots \dots \quad (7)$$

schreiben kann, worin $m_1$, $m_2$, etc. die mit den Coordinaten $x$, $y$, etc. verbundenen Constanten sind. In einem solchen Fall bedarf die Regel nur einer geringen Abänderung. Wir zeigen auf dieselbe Art, wie vorher, dass

$$m_1 X_1 X_3 + m_2 Y_1 Y_3 + \cdots = 0 \quad \dots \dots \quad (8)$$

ist. Daher sind die zur Trennung der ersten Verticalreihe der Werthe von $x$, $y$, etc. von den übrigen Verticalreihen nöthigen Multiplicatoren

$m_1 X_1$, $m_2 Y_1$, etc. Es wird oft vorkommen, dass die Coefficienten $m_1$, $m_2$, etc. die Massen von Punkten sind, die in Verbindung mit den Coordinaten $x$, $y$, etc. stehen. Gebraucht man diese Ausdrucksweise, so erhält man die folgende Regel: *Um irgend eine Verticalreihe abzutrennen, multiplicire man die Coordinaten der verschiedenen Massenpunkte wie zuvor mit den Coefficienten in dieser Verticalreihe und mit den Massen der verschiedenen Punkte. Man addire dann die Resultate und verfahre, wie vorher.*

Wenn die Anzahl der Coordinaten des Systems unendlich gross ist wie bei einem schwingenden Faden, so werden die Summen Integrale. $m du$ und $x$ seien die Masse und die Verschiebung eines Elementes des Fadens in dem Abstand $u$ von dem einen Ende. Man kann dann allen Gleichungen (2) die typische Form geben

$$x = F_1 U_1 \cos pt + F_2 U_2 \sin pt + F_3 U_3 \cos qt + \text{etc.},$$

worin $U_1$, $U_2$, etc. bekannte Functionen von $u$ sind. Nimmt man die Integrationsgrenzen von dem einen Ende des Fadens bis zum andern, so erhält man aus (7) und (8)

$$2T = \int x'^2 m du, \quad \int U_1 U_3 m du = 0.$$

Die Gleichungen (5) und (6) werden

$$\int x U_1 m du = F_1 \int U_1^2 m du, \quad \int x' U_2 m du = F_2 p \int U_2^2 m du.$$

Diese Gleichungen bestimmen die typischen Constanten $F_1$, $F_2$, welche zu irgend einer Schwingung gehören *und drücken das aus, was man gewöhnlich die Fourier'sche Regel nennt.*

§ 400. *Die hier gegebene Entwicklung der Fourier'schen Regel ist rein analytisch. Die einzige Voraussetzung, die gemacht wurde, war, dass die Werthe von $x$, $y$, etc. gewissen Differentialgleichungen genügen müssen. Man kann dem Verfahren aber auch einen physikalischen Sinn unterlegen und nachweisen, dass eigentlich das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gebraucht wurde.*

In dem ersten Band ist gezeigt worden, dass dieses allgemeine Princip sich analytisch durch die Gleichung

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'} - \frac{\partial U}{\partial x}\right)\xi + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y'} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\eta + \text{etc.} = 0$$

darstellen lässt, in welcher $\xi$, $\eta$, etc. beliebige kleine Variationen der Coordinaten $x$, $y$, etc. bezeichnen, die mit den geometrischen Bedingungen vereinbar sind.

Wir wollen annehmen, das System führe irgend eine Hauptschwingung aus, z. B. diejenige, welche durch die erste Verticalreihe in den Werthen von $x$, $y$, etc. dargestellt wird. Die willkürliche Variation der Coordinaten sei eine Verschiebung längs einer andern Hauptschwingung, z. B. der durch die dritte Verticalreihe in den Ausdrücken für $x$, $y$, etc. dargestellten. Diese Variation verträgt sich mit

den geometrischen Bedingungen, weil die beiden Schwingungen in derselben Bewegung zugleich existiren können.

In diesem Fall ist $\xi$, $\eta$, etc. proportional zu $X_3$, $Y_3$, etc. Substituirt man für $x$, $y$, etc. ihre durch die Glieder in der ersten Verticalreihe gegebenen Werthe und dividirt durch $\cos pt$, so wird die Gleichung

$$-p^2(X_1 X_3 + Y_1 Y_3 + \cdots) = C_{11} X_1 X_3 + C_{12}(X_1 Y_3 + X_3 Y_1) + \text{etc.}$$

Da die rechte Seite eine symmetrische Function der Coefficienten der ersten und dritten Verticalreihe ist, so erhält man unmittelbar, wie früher, $X_1 X_3 + Y_1 Y_3 + \cdots = 0$, wobei nur der Fall eine Ausnahme macht, in dem $p$ und $q$ numerisch gleich sind.

Lagrange zeigt, wie man in gewissen Fällen die Integrationsconstanten finden kann, in Sect. 6, Theil 2 seiner *Mécanique Analytique*. Poisson widmet die Kap. 7 und 8 seiner *Théorie de la Chaleur* der Erklärung der Methode, nach welcher willkürliche Functionen sich in einer Reihe von Sinussen und Cosinussen ausdrücken lassen. Ferner findet man eine Besprechung der Fourier'schen Regel in den §§ 93 und 94 von Lord Rayleigh's *Theory of Sound*.

Schliesslich verweisen wir noch auf zwei Abhandlungen des Verfassers, die sich mit den in diesem Kapitel behandelten verschiedenen Gegenständen beschäftigen. Die erste befindet sich in Nr. 75 des *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1883; die zweite in den *Proceedings of the London Mathematical Society* desselben Jahres. Die beiden Abhandlungen enthalten auch die Auflösung vieler in diesem Kapitel gegebener Beispiele.

## Kapitel IX.

# Anwendung der Rechnung mit endlichen Differenzen.

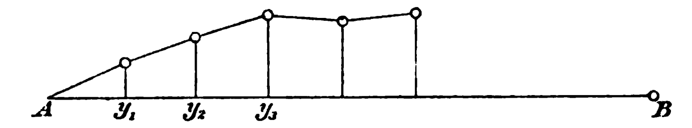
## Auflösung von Problemen.

§ 401. In dem ersten Abschnitt dieses Kapitels beabsichtigen wir an einigen Beispielen zu zeigen, wie sich die Rechnung mit endlichen Differenzen auf die Lösung dynamischer Probleme anwenden lässt. In dem zweiten Abschnitt werden wir einige bemerkenswerthe Punkte in der Theorie solcher Schwingungen untersuchen.

Die Rechnung mit endlichen Differenzen lässt sich benutzen, wenn das System eine grosse Menge schwingender Körper enthält, die nach irgend einem Gesetz geordnet sind. Es können ihrer vielleicht so viele sein, dass es unmöglich wäre, ihre sämmtlichen Bewegungsgleichungen einzeln aufzustellen. Ist dagegen hinreichend grosse Aehnlichkeit zwischen den Bewegungen der in gegebener Ordnung sich folgenden Körper vorhanden, so wird es unter Umständen möglich, in wenige Differenzengleichungen alle Bewegungsgleichungen einzuschliessen. Um zu zeigen, wie dies geschehen kann, machen wir mit dem folgenden Problem den Anfang.

§ 402. **Schwingungen einer Kette von Massenpunkten, die durch Fäden verbunden sind.** Beisp. *Eine Kette von der Länge* $(n+1)l$ *und unmerkbarer Masse ist zwischen zwei festen Punkten mit der Kraft* $T$ *ausgespannt und wird in Intervallen* $l$ *mit* $n$ *gleichen Massen* $m$, *die nicht unter dem Einfluss der Schwere stehen, belastet und leicht gestört; wenn* $T/lm = c^2$ *ist, zu beweisen, dass die Perioden der einfachen seitlichen Schwingungen, welche im Allgemeinen zu gleicher Zeit existiren, durch die Formel* $(\pi/c) \operatorname{cosec} i\pi/2(n+1)$ *gegeben sind, wenn man der Reihe nach* $i = 1, 2, 3 \cdots n$ *setzt.*

$A$ und $B$ seien die festliegenden Punkte; $y_1, y_2, \cdots, y_n$ die Ordi-




naten der $n$ Massenpunkte zur Zeit $t$. Die Bewegung der Massenpunkte parallel zu $AB$ ist von der zweiten Ordnung; die Spannung aller

Fäden ist daher gleich und in den kleinen Gliedern kann man diese Spannung gleich $T$ setzen. Wir wollen die Bewegung des Massenpunktes betrachten, dessen Ordinate $y_k$ ist. Die Bewegungsgleichung ist[1])

$$m\frac{d^2y_k}{dt^2}=\frac{y_{k+1}-y_k}{l}T-\frac{y_k-y_{k-1}}{l}T;$$

daher

$$\frac{d^2y_k}{dt^2}=c^2(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}) \quad \cdots\cdots \quad (1).$$

Jeder Massenpunkt hat nun eine schwingende Bewegung; man kann daher $y_k$ in eine Reihe von der Form

$$y_k=\Sigma L\sin(pt+\omega) \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

entwickeln, worin $\Sigma$ die Summirung für alle Werthe von $p$ angibt.

Da ein Glied des Argumentes $pt$ in jedem $y$ vorkommen kann, so seien $L_1, L_2, \ldots$ ihre bezüglichen Coefficienten. Substituirt man dann, so wird

$$L_{k+1}-2L_k+L_{k-1}=-\frac{p^2}{c^2}L_k \quad \cdots\cdots \quad (3).$$

Zur Lösung dieser linearen Differenzengleichung benutzen wir die gewöhnliche Regel. Setzt man $L_k=Aa^k$, worin $A$ und $a$ zwei Constanten sind, substituirt und reducirt, so erhält man

$$a-2+1/a=-(p/c)^2$$

oder

$$\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{p}{c}\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=\pm 2\left\{1-\left(\frac{p}{2c}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

daher

$$\sqrt{a}=\pm\left\{1-\left(\frac{p}{2c}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\frac{p}{2c}\sqrt{-1}.$$

Bezeichnet man diese Werthe von $a$ mit $\alpha$ und $\beta$, so ist

$$L_k=A\alpha^k+B\beta^k$$

---

1) Die obige Gleichung lässt sich auch aus den Lagrange'schen allgemeinen Bewegungsgleichungen ableiten. Wenn $U$ die Kräftefunction und die Gleichgewichtslage die Bezugslage ist, so hat man

$$2U=-\frac{T}{l}y_1{}^2-\frac{T}{l}(y_2-y_1)^2-\text{etc.}-\frac{T}{l}(y_n-y_{n-1})^2-\frac{T}{l}y_n{}^2.$$

Die doppelte lebendige Kraft ist offenbar $my_1'^2+my_2'^2+\cdots+my_n'^2$. Substituirt man die beiden Ausdrücke in die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen, so erhält man die Gleichungen unter (1).

Dieses Problem hat Lagrange in seiner *Mécanique Analytique* discutirt. Er leitet die Lösung aus seinen eignen Bewegungsgleichungen ab und bestimmt die Schwingungen eines unausdehnbaren Fadens, der mit einer beliebigen Anzahl von Gewichten belastet ist und entweder an beiden oder nur an einem Ende aufgehängt wird. Zwar wurden verschiedene Lösungen dieser Probleme schon vor seiner Zeit gefunden, doch sind sie seiner Ansicht nach sämmtlich mehr oder weniger unvollständig gewesen.

eine Lösung und da sie zwei willkürliche Constanten enthält, die allgemeine Lösung.

Die Constanten $A$, $B$, $\alpha$, $\beta$ sind zwar für alle Massenpunkte dieselben, aber nicht nothwendiger Weise für alle trigonometrischen Glieder, die durch die verschiedenen Werthe von $p$ definirt werden. Wenn wir die Eigenschaften eines speciellen $A$ oder $B$ besprechen wollen, werden wir ihm als Index den Werth von $p$ geben, durch welchen sie sich unterscheiden.

Das durch $p = 0$ definirte Glied erfordert besondere Untersuchung. In diesem Glied sind die beiden Werthe von $a$, nämlich $\alpha$ und $\beta$, der Einheit gleich und die Lösung der Gleichung (3) verliert eine ihrer willkürlichen Constanten. Diesem Mangel ist aber leicht abzuhelfen, wenn man die Differenzengleichungen nach den gewöhnlichen Regeln behandelt. Grade wie bei Differentialgleichungen, wenn $t$ die unabhängige Variabele ist, das Auftreten gleicher Wurzeln anzeigt, dass Potenzen von $t$ in der Lösung vorkommen (§ 266), so erscheinen in den Differenzengleichungen Potenzen der unabhängigen Variablen $k$ unter ähnlichen Umständen. Man hat daher

$$L_k = A_0 + B_0 k.$$

Auch das durch $p = 2c$ definirte Glied weist Besonderheiten auf. In diesem Glied sind die beiden Werthe von $a$ gleich $-1$. Man hat mithin

$$L_k = (A_{2c} + B_{2c} k)(-1)^k.$$

Fasst man zusammen, so lässt sich die Lösung der Gleichung (1) ausführlich so schreiben

$$y_k = A_0 + B_0 k + (A_{2c} + B_{2c} k)(-1)^k \sin(2ct + \omega_{2c}) + \\ + \Sigma(A_p \alpha^k + B_p \beta^k) \sin(pt + \omega_p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

worin das Symbol $\Sigma$ die Summirung für alle existirenden Werthe von $p$ angibt. Aus der Theorie der Differenzengleichungen ist bekannt, dass die ersten vier Glieder in diesem Ausdruck eigentlich in dem letzten als Grenzfall der durch $p = 0$ und $p = 2c$ bestimmten Glieder enthalten sind. Wenn man daher nicht besonders auf sie aufmerksam machen will, kann man sie in dem Ausdruck für $y_k$ weglassen.

§ 403. Die Gleichung (1) stellt die Bewegung eines jeden Massenpunktes mit Ausnahme des ersten und letzten dar. Soll sie auch diese darstellen, so muss man annehmen $y_0$ sowohl als $y_{n+1}$ wären Null, obwohl keine Massenpunkte vorhanden sind, die den Werthen von $k = 0$ und $k = n + 1$ entsprächen. Unter dieser Voraussetzung enthält die Lösung (4) die Bewegung eines jeden Massenpunktes von $k = 1$ bis $k = n$.

§ 404. Da, wenn $k = 0$ ist, $y = 0$ wird für *alle* Werthe von $t$, so muss jedes Glied in der Reihe (4) verschwinden; es ist daher $A_0 = 0$, $A_{2c} = 0$ und $A_p + B_p = 0$. Ebenso wird, wenn $k = n + 1$ ist, $y = 0$ für alle Werthe von $t$, daher ist $B_0 = 0$, $B_{2c} = 0$ und $A_p \alpha^{n+1} + B_p \beta^{n+1} = 0$. Aus diesen Gleichungen folgt $\alpha^{n+1} = \beta^{n+1}$. Ist $p$ grösser als $2c$, so ist das Verhältniss von $\alpha$ zu $\beta$ reell und von der Einheit verschieden. Es muss daher $p$ kleiner als $2c$ sein. Es sei also

$$p/2c = \sin\theta, \quad \text{daher} \quad a = \cos 2\theta \pm \sin 2\theta \sqrt{-1}.$$

Mithin ist, wie eben bewiesen wurde,

$$(\cos 2\theta + \sin 2\theta\sqrt{-1})^{n+1} = (\cos 2\theta - \sin 2\theta\sqrt{-1})^{n+1};$$

daher $\sin 2(n+1)\theta = 0$, $\theta = i\pi/2(n+1)$ und die vollständige Periode irgend eines Gliedes $P = 2\pi/p = \pi c/\sin\theta$. Der Buchstabe $i$ bezeichnet eine beliebige ganze Zahl; da aber $p = 2c \sin\theta$ ist, so braucht man nur die ganzen Zahlen von $i = 1$ bis $i = n$ in Betracht zu ziehen. Die Werthe $i = 0$ und $i = n + 1$ können ausser Acht bleiben, da sie $p = 0$ und $p = 2c$ machen und diese Werthe schon berücksichtigt wurden.

Die so bestimmten Perioden sind die der Hauptschwingungen. Für irgend einen der Werthe von $p^2$ ergeben sich die entsprechenden Werthe von $y_1, y_2, \cdots, y_n$ aus der Gleichung (4), die sich auf

$$y_k = C \sin 2k\theta \sin(pt + \omega)$$

reducirt.

Die durch die verschiedenen Werthe von $p$ angezeigten Schwingungen sind sehr verschieden von einander. Hat $\theta$ seinen geringsten Werth, so ist das Vorzeichen von $\sin 2k\theta$ für alle Werthe der $k$ von $k = 1$ bis $k = n$ das nämliche; die Kette schwingt also mit einem einzigen Bauch. Erhält alsdann $\theta$ seinen nächst grösseren Werth, so hat die erste Hälfte der Glieder $y_1, y_2, \cdots$ das nämliche und dem der zweiten Hälfte entgegengesetzte Vorzeichen. Die Kette schwingt daher stets mit einem doppelten Bauch. Erhält dann $\theta$ seinen nächsten Werth, so schwingt die Kette mit drei Bäuchen u. s. w. Die verschiedenen Arten der Bewegung lassen sich leicht von einander unterscheiden, wenn man die Curven aufzeichnet, deren Ordinate $y_k$ und Abscisse $k$ ist, wobei die Zeit $t$ irgend einen gegebenen Werth hat. Sie folgen auch sofort aus Sturm's Theoremen, die wir weiter unten besprechen und bei denen wir beweisen werden, dass ähnliche Unterscheidungen immer dann auftreten, wenn das System der miteinander verbundenen Massenpunkte so beschaffen ist, dass die Differenzengleichung eine gewisse Normalform annimmt.

§ 405. Bei Aufstellung der Differentialgleichungen (1) haben wir vorausgesetzt, der Abstand $l$ zwischen zwei aufeinander folgenden Massen-

punkten bleibe bei der Bewegung unverändert. Dieser Fall wird in der That eintreten, wenn $y_k - y_{k-1}$ im Vergleich mit dem Abstand $l$ klein ist. Eine solche Annahme hindert uns jedoch nicht, zu untersuchen, welche Wirkung eintreten wird, wenn man die Massen aller materiellen Punkte reducirt und sie derart verhältnissmässig näher aneinander bringt, dass die totale Masse pro Längeneinheit unverändert bleibt. Die Einschränkung besteht darin, dass die Neigungen der Fäden gegen $AB$ so klein sein müssen, dass man ihre Quadrate vernachlässigen kann. Die Aenderung ist insofern von Interesse, als das System, je dichter man die Punkte aneinander bringt, sich um so mehr dem System eines gleichförmigen, zwischen den beiden festen Punkten $A$ und $B$ ausgestreckten Fadens nähert.

Stellt $\varrho$ die Masse pro Längeneinheit dar, so ist $c^2 l^2 = Tl/m = T/\varrho$. Setzt man ferner $a = cl$, so ist $a$ der Quadratwurzel aus dem Verhältniss der Spannung zur Masse einer Längeneinheit gleich. $a$ wird mithin durch eine solche Aenderung der Massenpunkte nicht beeinflusst.

Wenn die Länge des Fadens $AB$ mit $L$ bezeichnet wird, so ist $L = (n+1)\,l$. Ist $n$ sehr gross, so hat man $p = 2c \sin\theta = ai\pi/L$ nahezu.

So werden die Perioden der Töne, welche ein mit kleinen Massenpunkten in kurzen Intervallen belasteter Faden hervorbringt, durch $P = 2L/ai$ angegeben. Der durch $i = 1$ gegebene Ton heisst der *Grundton;* bedeutet $i$ eine höhere ganze Zahl, so erhält man sogenannte *harmonische Obertöne.*

§ 406. **Die Bestimmung der Constanten.** Drückt man $\alpha$ und $\beta$ durch $\theta$ aus und setzt die Werthe in Gleichung (4) ein, so ergibt sich die typische Gleichung

$$y_k = \Sigma E_i \sin 2k\theta \cos(2ct \sin\theta) + \Sigma F_i \sin 2k\theta \sin(2ct\sin\theta) \quad . \quad . \quad (5),$$

worin $E_i$ und $F_i$ statt $2A_p \sin\omega_p\sqrt{-1}$ und $2A_p\cos\omega_p\sqrt{-1}$ gesetzt wurde. Wie früher ist $\theta = 2\pi/2(n+1)$ und gibt das Symbol $\Sigma$ die Summirung für alle Werthe der $i$ von $i=1$ bis $i=n$ an. Die Gleichung hat $n$ Glieder und wir haben daher $2n$ willkürliche Constante, nämlich $E_1, E_2, \ldots, E_n$ und $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Sie sind durch die bekannten Anfangswerthe der $n$ Coordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und ihre Anfangsgeschwindigkeiten $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ zu bestimmen.

Da $k$ jeden Werth von $k=1$ bis $k=n$ annehmen kann, so stellt die typische Gleichung (5) so viele Gleichungen dar, als Massenpunkte vorhanden sind. Man kann sich denken, sie seien eine unter die andere genau so niedergeschrieben, wie in Kap. 8, § 379 oder § 398 erklärt wurde. Um die Constante $E_i$ zu bestimmen, die allen Gliedern in irgend einer Verticalreihe gemeinschaftlich ist, benutze man den Multiplicator zur Trennung dieser Verticalreihe von den übrigen. Um den Multiplicator zu erhalten, schreibe man die lebendige Kraft des Systems nieder, in unserem Fall also $2T = \Sigma m y_k'^2$. Der in Kap. 8, § 387 oder 399 gegebenen Regel zu Folge findet man den richtigen Multiplicator für die Gleichung, die $y_k$ liefert, durch Differentiation von $T$ nach $y_k'$ und Substitution des Coefficienten der Schwingung, die wir abtrennen wollen, für $y_k'$. Die Differentiation ergibt in unserem Fall $my_k'$. Die richtigen Multiplicatoren zur Abtrennung der

beiden durch irgend einen Werth von $i$ bestimmten Verticalreihen sind daher $mE_i \sin 2k\theta$ und $mF_i \sin 2k\theta$. Man erhält so, nachdem man durch gemeinschaftliche Factoren dividirt hat,

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\{y_k \sin 2k\theta\} &= \tfrac{1}{2}\, E_i(n+1)\\ \Sigma\{y'_k \sin 2k\theta\} &= \tfrac{1}{2}\, F_i(n+1)\, 2c \sin\theta\end{aligned}\right\}.$$

Darin haben wir auf der rechten Seite für $\Sigma(\sin 2k\theta)^2$ seinen Werth $\frac{1}{2}(n+1)$ gesetzt, den man auf gewöhnlichem trigonometrischen Weg leicht findet.

Diese Gleichungen bestimmen die Werthe von $E_i$ und $F_i$ für jeden speciellen Werth von $i$. Vorausgesetzt wird, dass die Coordinaten $y_1$, $y_2$, etc. und die Geschwindigkeiten $y'_1$, $y'_2$, etc. auf der linken Seite ihre Anfangswerthe haben. Das Symbol $\Sigma$ gibt die Summe für alle Werthe der $k$ von $k=1$ bis $k=n$ an, während der in $\theta$ enthaltene Werth von $i$ gegeben ist.

§ 407. Beisp. 1. Ein Faden von der Länge $2(n+1)l$ wird, wie zuvor, zwischen zwei festen Punkten $A$ und $B$ ausgespannt und mit $2n+1$ Massenpunkten in den gleichen Abständen $l$ belastet. Den Coordinatenanfang nehme man im mittleren Massenpunkt an und die Massenpunkte von $k=-\varepsilon$ bis $k=+\varepsilon$ mögen Anfangs so verschoben werden, dass $y_k = C \sin k\pi/\varepsilon$ ist. Alle übrigen Massenpunkte mögen in ihrer ungestörten Lage in der graden Linie $AB$ so liegen, dass $y_k = 0$ ist für alle Werthe von $k$, die nicht zwischen den Grenzen $\pm\varepsilon$ enthalten sind. Das System gehe ferner von der Ruhe aus. Verfährt man nun, wie in dem letzten Paragraphen erklärt wurde, so findet man, dass die Bewegung durch

$$y_k = \Sigma E_i \sin 2k\theta \cos(2ct \sin\theta)$$

dargestellt wird, worin

$$\theta = \frac{i\pi}{2(n+1)}, \quad E_i = \frac{C \cos i\pi}{2(n+1)} \frac{\sin 2\varepsilon\theta \sin \pi/\varepsilon}{\sin^2 \pi/2\varepsilon - \sin^2\theta}$$

ist.

Beisp. 2. Ein Faden von der Länge $(n+1)l$ ist zwischen zwei festen Punkten $A$ und $B$ ausgespannt und mit $n$ Massenpunkten in Abständen belastet, von denen jeder gleich $l$ ist. Das Ende $A$, das durch $k=0$ bestimmt ist, wird plötzlich um eine kleine Strecke gleich $y_0$ rechtwinklig zur ursprünglichen Lage des Fadens fortbewegt und dort festgehalten. Die Bewegung des $k$-ten Massenpunktes ist durch

$$y_k = y_0\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) - \sum \frac{y_0}{n+1} \operatorname{cotg}\theta \sin 2k\theta \cos(2ct\sin\theta)$$

gegeben, worin $\theta = i\pi/2(n+1)$ ist und das Symbol $\Sigma$ die Summen für alle Werthe der $i$ von $i=1$ bis $i=n$ verlangt.

Für den Beweis benutze man die folgenden Bedingungen: (1) für *alle* Werthe von $t$ ist $y_k = y_0$, wenn $k=0$ ist, und $y_k = 0$, wenn $k = n+1$ ist. Daraus folgt $B_0 = y_0$ und $A_0(n+1) = -y_0$; (2) wenn $t=0$ ist, so hat man $y_k = 0$ für alle Werthe von $k$ mit Ausnahme von $k=0$.

§ 408. **Erschütterung des einen Endes.** Wird das eine Ende des Fadens irgend einem gegebenen Gesetz entsprechend erschüttert; so setzt uns eine kleine Abänderung der Lösung in § 402 in den Stand, die Bewegung zu finden. *Wir wollen annehmen, das durch $k=0$ definirte Ende $A$ werde so erschüttert, dass seine Bewegung fortgesetzt*

*durch* $y_0 = C \sin \mu t$ *gegeben ist; man soll die Bewegung der Massenpunkte finden.*

Man beachte, dass es für unseren vorliegenden Zweck ausreicht, wenn sich das Gesetz, dem die Erschütterung folgt, so complicirt es auch sei, durch eine endliche Reihe von Gliedern dieser Form darstellen lässt. Die resultirende Bewegung eines jeden Massenpunktes ergibt sich dann aus der Zusammensetzung der Bewegungen, welche die Folge der verschiedenen Glieder der Reihe sind.

Man kann sich vorstellen, die Bewegung der Kette von Massenpunkten bestände aus zwei verschiedenen Arten von Schwingungen. Es sind dieses (1) die erzwungene Schwingung, deren Periode dieselbe ist, wie die der erschütternden Kraft und (2) die freien Schwingungen, deren Perioden die nämlichen sind, wie die, welche in § 404 für den Fall gefunden wurden, in dem die beiden Enden festliegen. Wir wollen jetzt die erstere zu ermitteln suchen.

Verfährt man, wie zuvor, so hat man aus Gleichung (4)

$$y_k = A_0 + B_0 k + (A_{2c} + B_{2c} k)(-1)^k \sin(2ct + \omega_{2c}) + \\ + \Sigma(A_p \alpha^k + B_p \beta^k) \sin(pt + \omega_p).$$

Da $y_k = C \sin \mu t$ ist für $k = 0$, so erhält man $p = \mu$, $\omega_p = 0$ für die erzwungene Schwingung. Ferner ist mit Ausnahme der Fälle $\mu = 0$ oder $\mu = 2c$, $A_0 = 0$, $A_{2c} = 0$. Für $k = n + 1$ ist weiter $y_k = 0$, daher $B_0 = 0$, $B_{2c} = 0$. Die erzwungene Schwingung wird daher durch

$$A_\mu + B_\mu = C, \quad A_\mu \alpha^{n+1} + B_\mu \beta^{n+1} = 0$$

dargestellt, worin $\alpha$ und $\beta$ die beiden Werthe von $a$ sind, welche die Gleichung $\sqrt{a} = \pm \left\{1 - \left(\frac{\mu}{2c}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu}{2c}\sqrt{-1}$ liefert.

§ 409. *Ist* $\mu$ *grösser als* $2c$, so kann man annehmen, es sei $\mu = 2c/\sin\varphi$, und alle möglichen Fälle sind eingeschlossen, wenn man voraussetzt, $\varphi$ liege zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, so dass also $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ kleiner als die Einheit ist. Macht man die nöthigen Substitutionen, so erhält man für die erzwungene Schwingung

$$y_k = \frac{(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi)^{2(n+1-k)} - (\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi)^{2(n+1-k)}}{(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi)^{2(n+1)} - (\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi)^{2(n+1)}} \cdot (-1)^k C \sin\mu t \quad \cdot \quad (1).$$

Wenn der Faden sehr lang ist, so wird $n$ unendlich gross und der vorstehende Ausdruck nimmt die einfachere Gestalt an

$$y_k = (\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi)^{2k}(-1)^k C \sin\mu t \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2).$$

Der erste der beiden Ausdrücke gilt für eine endliche Kette von Massenpunkten und besteht offenbar aus zwei Ausdrücken, die dem letzteren gleichen, wobei die Coefficienten so beschaffen sind, dass die Ver-

schiebungen von $A$ und $B$ bez. $C \sin \mu t$ und Null werden. Die Bewegung ist demzufolge die Resultante zweier Bewegungen, von denen jede durch Gleichung (2) dargestellt wird.

§ 410. *Ist $\mu$ kleiner als $2c$* und setzt man $\mu = 2c \sin \psi$, so wird die erzwungene Schwingung

$$y_k = \frac{\sin 2(n+1-k)\psi}{\sin 2(n+1)\psi} C \sin \mu t \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (3).$$

Dieser Gleichung kann man die Form geben

$$y_k = \frac{C \cos [\mu t - 2(n+1-k)\psi]}{2 \sin 2(n+1)\psi} - \frac{C \cos [\mu t + 2(n+1-k)\psi]}{2 \sin 2(n+1)\psi} \quad \cdot \quad (4).$$

Das erste der beiden Glieder nimmt, wie man sieht, wenn man es für sich allein betrachtet, nach einer durch $\mu T = 2\psi$ gegebenen Zeit $T$ wieder denselben Werth, wie vorher, an, falls man $k-1$ statt $k$ setzt. Es stellt daher eine Welle dar, welche die Strecke zwischen einem Massenpunkt und dem nächsten in der Zeit $T$ zurücklegt. Ebenso stellt das zweite Glied eine Welle dar, welche mit derselben Geschwindigkeit die entgegengesetzte Richtung verfolgt.

Man beachte, dass der Nenner der beiden Glieder in (4) sehr klein wird, wenn $\mu$ nahezu $2c \sin i\pi/2(n+1)$ gleich kommt; d.h. die erzwungene Schwingung wird vergrössert, wenn die Periode der erschütternden Kraft nahezu einer der Perioden der freien Schwingungen des Fadens bei festliegenden Ende gleich ist.

§ 411. **Zwei Arten möglicher Bewegung.** Besondere Beachtung verdient der grosse Unterschied zwischen den beiden Arten schwingender Bewegung. Wenn die Periode der erschütternden Kraft, nämlich $2\pi/\mu$, lang genug ist, um $\mu < 2c$ zu machen, so wird die der Kette von Massenpunkten mitgetheilte erzwungene Schwingung durch die Uebereinanderlagerung zweier Wellen gebildet, welche die entgegengesetzte Richtung ohne Aenderung der Grösse verfolgen. Die Massenpunkte in der Nähe des entfernten Endes $B$ des Fadens können auf diese Art ebenso stark erschüttert werden, wie die, welche in der Nähe des Angriffspunktes der Kraft liegen. Nimmt man an, es sei $\psi = \pi/2q$, worin $q$ irgend eine ganze Zahl bedeutet, so ist nach (3) jeder $q^{te}$ Massenpunkt, von dem entfernten Ende $B$ aus gezählt, dauernd in Ruhe und *bildet einen Knoten.* Die Ketten von Massenpunkten zwischen den aufeinander folgenden Knoten bilden gleiche Bäuche, die sich abwechselnd auf der einen und der andern Seite der Geraden $AB$ befinden.

Wir wollen nun diesen Bewegungszustand mit demjenigen vergleichen, den die erschütternde Kraft hervorbringt, wenn ihre Periode so kurz ist, dass $\mu > 2c$ wird. In diesem Fall wird keine Bewegung, welche den Charakter einer Welle hätte, längs der Kette übermittelt. Legt man den Fall eines sehr langen Fadens zu Grunde, so befinden

sich die Massenpunkte abwechselnd auf entgegengesetzten Seiten von $AB$, während ihre Verschiebungen eine Reihe in geometrischer Progression bilden. Die Verschiebungen der Massenpunkte werden so immer kleiner, je weiter sie von der erschütternden Kraft entfernt sind.

§ 412. Wie der Uebergang von der einen Bewegungsart zur andern stattfindet, ist leicht einzusehen, wenn man sich denkt, die Periode der erschütternden Kraft werde nach und nach kleiner, bis sie zuletzt den kritischen Werth passirt. Offenbar wächst $\sin\psi$, grösser aber als die Einheit kann er nicht werden. Die Anzahl der Massenpunkte, nämlich $q-1$, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knoten nimmt ab und verschwindet schliesslich, wenn $\psi=\frac{1}{2}\pi$ wird. Da aber ein weiteres Abnehmen nicht möglich ist, so ändert die Bewegung ihren Charakter.

Die Ausdrücke (1) und (3) nehmen beide die Gestalt 0/0 an, wenn $\varphi=\psi=\frac{1}{2}\pi$ wird. Die Bewegung in dem Uebergangsstadium kann man nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung aus einem der beiden Ausdrücke ableiten. Aber auch abgesehen davon ergibt sie sich aus § 402; sie wird durch die Gleichung

$$y_k=(A+Bk)(-1)^k\sin 2ct$$

dargestellt. Da für $k=0$, $y_k=C\sin 2ct$ und, für $k=n+1$, $y_k=0$ ist, so findet man leicht $y_k=\{1-k/(n+1)\}(-1)^k C\sin 2ct$.

§ 413. **Discontinuirliche erschütternde Kraft.** Wenn die dem Ende $A$ mitgetheilte Erschütterung nicht continuirlich ist, sondern nur kurze Zeit wirkt, so kann die resultirende Bewegung nach der Methode der Uebereinanderlagerung kleiner Bewegungen gefunden werden.

Wird z. B. das Ende $A$ plötzlich zur Zeit $t=0$ eine kurze Strecke $y_0$ rechtwinklig zu $AB$ fortbewegt, so findet man die resultirende Bewegung wie in Beisp. 2, § 407. Wir wollen diese Bewegung durch $y_k=y_0 f(k, t)$ darstellen. Nachdem eine gewisse Zeit $t=u$ verflossen ist, möge das Ende $A$ eine zweite Verschiebung $Y_0$ erhalten, während der Rest der Kette ungestört bleibt. Lagern wir diese beiden Bewegungen übereinander, so ergibt sich

$$y_k=y_0 f(k, t)+Y_0 f(k, t-u).$$

Zur Zeit $t=0$ verschwindet sowohl die zweite Function wie ihr Differentialquotient nach $t$ für alle Werthe der $k$ von $k=1$ bis $k=n+1$. Die Anfangsbedingungen der Bewegung zu dieser Zeit werden daher durch die erste Function ausgedrückt. Die obige Gleichung stellt daher die Bewegung dar, welche durch die beiden Störungen für die ganze Zeit von $t=u$ bis $t=\infty$ hervorgebracht wird.

Verallgemeinert man diese Betrachtung, so erkennt man, dass, wenn das Ende $A$ irgend einem Gesetz, wie z. B. $y_0=F(t)$, entsprechend eine Zeit hindurch, die sich von $t=0$ bis $t=\gamma$ erstreckt, bewegt wird, die Bewegung des Fadens durch

$$y_k=\int_0^\gamma F'(u)\, f(k, t-u)\, du$$

für die ganze Zeit von $t=\gamma$ bis $t=\infty$ gegeben ist.

Da die erschütternde Kraft nach der Zeit $t = \gamma$ aufhört zu wirken, so besteht offenbar die Bewegung des Fadens nach dieser Zeit aus den freien Schwingungen, die einer Kette von Massenpunkten angehören, deren beide Enden befestigt sind. Substituirt man daher für die Function $f(k, t-u)$ ihren Werth aus § 407, so sieht man, dass der Ausdruck für $y_k$ aus $n$ Schwingungen besteht, deren Perioden die gleichen sind, wie die früher in § 404 gefundenen. Ihre Phasen und Grössen hängen von der Wirkung der erschütternden Kraft ab.

§ 414. Beisp. Das Ende $A$ der oben beschriebenen Kette von Massenpunkten werde so bewegt, dass $y_0 = C \sin \mu t$ während einer Zeit ist, die sich von $t = 0$ bis $t = \pi/\mu$ erstreckt. Wenn man annimmt, die Enden blieben während der ganzen folgenden Zeit in Ruhe, zu beweisen, dass die Bewegung des $k^{ten}$ Massenpunktes durch

$$y_k = \sum \frac{4 C\mu \cos\theta \sin 2k\theta}{n+1} \cdot \frac{\sin\left[2c \sin\theta\left(t - \frac{\pi}{2\mu}\right)\right] \cos\left[\frac{c\pi}{\mu}\sin\theta\right]}{\mu^2 - 4c^2\sin^2\theta}$$

gegeben ist, worin $\theta = i\pi/2(n+1)$ und $\Sigma$ die Summirung für alle Werthe von $i$ verlangt, die ganze Zahlen sind und von $i = 1$ bis $i = n+1$ gehen.

Wenn der Faden sehr lang ist, so wird $n$ unendlich gross und man kann $d\theta = \pi/2(n+1)$ setzen. Der Ausdruck wird alsdann

$$y_k = \frac{8c\mu}{\pi}\int_0^\infty d\theta \cos\theta \sin 2k\theta \sin\left\{2c\sin\theta\left(t - \frac{\pi}{2\mu}\right)\right\}\frac{\cos(c\pi\sin\theta/\mu)}{\mu^2 - 4c^2\sin^2\theta}.$$

Der Integrand wird nicht unendlich gross, wenn $\sin\theta = \mu/2c$ ist, da der letzte Factor in diesem Fall $\pi/4\mu^2$ wird.

§ 415. **Zerlegung durch Wellen.** Es gibt eine andre Methode, die Lösung der in § 402 gegebenen Bewegungsgleichung zu ordnen, welche den Vortheil hat, uns die Zerlegung der Bewegung durch Wellen statt durch die Lagrange'schen Elemente zu ermöglichen; siehe § 85. Setzt man $\delta$ für $d/dt$, wie sonst auch, so wird die Bewegungsgleichung

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = \frac{\delta^2}{c^2} y_k \quad \ldots \quad (1).$$

Wir behandeln den Operator auf der rechten Seite als Constante und lösen die Differenzengleichung auf die früher in § 402 erklärte Art auf. Die beiden Constanten $A$ und $B$ sind jetzt Functionen von $t$. Wenn man daher

$$\Omega = \left\{1 + \left(\frac{\delta}{2c}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{\delta}{2c}$$

setzt, so erhält man

$$y_k = \Omega^{2k} f(t) + \Omega^{-2k} F(t) \quad \ldots \quad (2).$$

Dies ist eine symbolische Lösung der Differenzengleichung mit ihren beiden willkürlichen Functionen $f(t)$ und $F(t)$. Sind die Formen dieser Functionen gegeben, so kann die durch $\Omega$ dargestellte Operation ausgeführt werden, und es ergibt sich eine Lösung der Differenzengleichungen.

§ 416. Um eine Interpretation dieser symbolischen Lösung zu erhalten, wollen wir annehmen, die Functionen $f(t)$ und $F(t)$ könnten durch eine Reihe ausgedrückt werden, deren allgemeines Glied $A \cos(2c \sin\theta t + \omega)$ ist, worin $\theta$ den Parameter bezeichnet, dessen Werth irgend ein Glied der Reihe von einem andern

unterscheidet. Alle möglichen Fälle sind offenbar eingeschlossen, wenn man voraussetzt, $\theta$ liege zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$.

Da die Wurzel in dem Operator $\Omega$ nur grade Potenzen von $\delta$ enthält, so kommt man zu dem Resultat der Operation mit ihm dadurch, dass man $-(2c\sin\theta)^2$ statt $\delta^2$ setzt; siehe § 265. Man findet mithin

$$\Omega\cos(2c\sin\theta t + \omega) = \cos(2c\sin\theta t + \omega - \theta).$$

Wiederholt man das Verfahren $2k$-mal, so wird

$$y_k = \Sigma A\cos(2c\sin\theta t + \omega - 2k\theta) + \Sigma B\cos(2c\sin\theta t + \omega + 2k\theta).$$

Irgend ein Glied der ersten Reihe, für sich allein genommen, bleibt unverändert, wenn man $k+1$ für $k$ und $t+T$ für $t$ schreibt, worin $T$ durch $c\sin\theta T = \theta$ gegeben ist. Daher stellt genau wie in § 87 irgend ein Glied eine Welle vor, welche die Strecke von einem Massenpunkt zum nächsten in der Zeit $T$ zurücklegt. Ebenso bedeutet das entsprechende Glied der zweiten Reihe eine Welle, welche die entgegengesetzte Richtung mit derselben Geschwindigkeit verfolgt. Siehe § 410.

Jedes Glied in jeder der beiden Reihen stellt eine Welle vor. Jede Welle schreitet mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort, verschiedene Wellen aber haben verschiedene Geschwindigkeit. Man betrachte die Welle, die durch irgend einen gegebenen Werth von $\theta$ definirt wird, und es sei $a = cl$. Wenn $v$ die Geschwindigkeit, $\lambda$ die von Wellenberg zu Wellenberg gemessene Länge der Welle und $P$ die Periode der Schwingung irgend eines Massenpunktes bezeichnet, so ist

$$v = a\frac{\sin\theta}{\theta}, \quad \lambda = \frac{\pi l}{\theta}, \quad P = \frac{\pi l}{a\sin\theta}.$$

Da $\theta$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, so muss die Geschwindigkeit aller dieser Wellen zwischen $a$ und $2a/\pi$ liegen; die Länge einer jeden Welle ist grösser als $2l$, die Schwingungsperiode eines jeden Massenpunktes grösser als $\pi\lambda/a$. Je länger die Wellen sind, um so kleiner wird der Unterschied in der Geschwindigkeit ihres Fortschreitens.

Nimmt man an, $l$ nehme ab, so kommen die Massenpunkte dichter aneinander und wenn jeder Massenpunkt verhältnissmässig weniger Masse hat, so bleibt die Grösse $a$ unverändert. Betrachtet man nun alle Wellen, deren Länge eine gegebene untere Grenze hat, so ergibt sich, *dass Wellen von allen Längen um so mehr nahezu mit derselben Geschwindigkeit fortschreiten, je näher die Massenpunkte aneinander rücken, wenn dabei die Masse per Längeneinheit unverändert bleibt.*

Andere Interpretationen der symbolischen Lösung in § 415 erhält man durch Substitution anderer Formen für die willkürlichen Functionen $f(t)$ und $F(t)$. So kann man erhalten

$$y_k = \Omega^{2k}\frac{1}{2}Ce^{\mu t\sqrt{-1}} + \Omega^{-2k}\frac{1}{2}Ce^{-\mu t\sqrt{-1}}.$$

Ist $\mu$ grösser als $2c$, so lässt sich der Hülfswinkel $\varphi$, wie in § 409, einführen. Der Ausdruck reducirt sich dann auf

$$y_k = (-1)^k\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\right)^{2k}C\cos\mu t.$$

§ 417. Beisp. Wenn man $x = kl$ setzt und das Intervall zwischen den Massenpunkten unbegrenzt klein werden lässt, so nimmt die durch $\Omega^{2k}$ dargestellte Operation die singuläre Form $1^\infty$ an. Man zeige durch Aufsuchen der Grenze auf die gewöhnliche Art, dass $\Omega^{2k} = e^{-(x/a)\delta}$ ist, und leite daraus

$$y_x = f(-x/a + t) + F(x/a + t)$$

ab.

§ 418. **Beispiele.** Beisp. 1. Eine lange Reihe von Massenpunkten, von denen jeder die Masse $m$ hat, wird auf einen glatten horizontalen Tisch gelegt. Jeder ist mit den beiden benachbarten durch ähnliche leichte elastische ausgestreckte Fäden von der natürlichen Länge $l$ verbunden. Sie erhalten geringe Störungen in der Längenrichtung, so dass jeder von ihnen eine harmonische Schwingung auszuführen beginnt; man beweise, dass zwei Wellen von Schwingungen in entgegengesetzten Richtungen und von derselben Geschwindigkeit existiren, nämlich $l'\sqrt{\frac{E}{ml}}\frac{q}{\pi}\sin\frac{\pi}{q}$, worin $l'$ den durchschnittlichen Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Massenpunkten, $q$ die Anzahl der Intervalle zwischen zwei Massenpunkten in derselben Phase und $E$ den Elasticitätsmodul bedeutet. [Math. Tripos, 1873.]

Beisp. 2. Ein leichter elastischer Faden von der Länge $nl$ und dem Elasticitätscoefficienten $E$ wird mit $n$ Massenpunkten beladen, von denen jeder die Masse $m$ hat, und die in Intervallen $l$ von einander geordnet werden, wobei an dem einen Ende angefangen wird. Wird der Faden an dem andern Ende aufgehängt, zu beweisen, dass die Perioden seiner verticalen Schwingungen durch die Formel

$$\pi\sqrt{\frac{lm}{E}}\operatorname{cosec}\frac{2i+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}$$

gegeben sind, worin nacheinander $i=0, 1, 2, \ldots, n-1$ zu setzen ist. Daraus leite man ab, dass die Perioden der verticalen Schwingungen eines schweren elastischen Fadens durch die Formel $\frac{4}{2i+1}\sqrt{\frac{ML}{E}}$ bestimmt werden, worin $L$ die Länge des Fadens, $M$ seine Masse und $i$ Null oder irgend eine ganze positive Zahl ist. [Math. Tripos, 1871.]

Beisp. 3. Eine Locomotive zieht einen Eisenbahnzug, der aus gleichen mittelst Federkuppelung von der Stärke $\mu$ verbundenen Wagen besteht und die Zugkraft ist so abgepasst, dass die Geschwindigkeit $A+B\sin qt$ beträgt. Wenn $q^2\{(M+4m)b^2+4mk^2\}$ nahezu $2\mu b^2$ gleichkommt, zu zeigen, dass die Kuppelung wahrscheinlich brechen wird, wobei $M$ die Masse eines Wagens bedeutet, der von vier gleichen Rädern von der Masse $m$, dem Radius $b$ und dem Trägheitsradius $k$ getragen wird. Gibt es noch andre Werthe von $q$, für welche die Kuppelung wahrscheinlich brechen wird? [Coll. Exam., 1880.]

Beisp. 4. Gleiche und gleichförmige Stäbe, deren Anzahl $n$ ist, und von denen jeder die Masse $m$ hat, sind an ihren Enden durch glatte Gelenke verbunden und an leichten elastischen Fäden aufgehängt, welche an den Gelenken und den freien Enden befestigt sind. Die andern Enden der Fäden werden an $n+1$ Punkten angebunden, die in einer horizontalen Linie liegen und deren Abstand von einander der Länge eines Stabes gleich ist. Sämmtliche Fäden haben die natürliche Länge $l$ und den Modulus $E$ mit Ausnahme des ersten und letzten, deren Modulus $\frac{1}{2}E$ ist. Das System befindet sich im Gleichgewicht unter der Wirkung der Schwere; die Stäbe liegen in einer horizontalen Geraden und alle Fäden sind vertical. Zu zeigen, dass die Perioden der kleinen gleichzeitigen Schwingungen um diese Gleichgewichtslage $\frac{2\pi}{\sqrt{3E}}\left\{ml\left(2+\cos\frac{i\pi}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$ sind, worin $i$ Null oder irgend eine ganze Zahl ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass sich die Gelenke und Enden in annähernd verticalen Geraden bewegen. [Coll. Exam., 1881.]

Beisp. 5. Eine Anzahl gleichförmiger Scheiben, welche die Gestalt eines Kreises vom Radius $a$ und beliebige Massen haben, können sich in einer verticalen Ebene frei um ihre Mittelpunkte drehen, welche in einer horizontalen Linie im

Abstand $4a$ von einander befestigt sind. Ein dünner rauher Faden von unbestimmter Länge, der zwei gleiche materielle Punkte von der Masse $m$ an seinen Enden hat, wird über diese Kreise gelegt und gleichförmige Kreisscheiben vom Radius $a$ und der Masse $2m$ werden so auf den Faden gesetzt, dass sie zwischen den andern Kreisen hängen und die Theile des Fadens, die nicht in Berührung mit einem Kreis stehen, vertical sind. Man zeige, dass alle Theile des Systems, wenn es sich unter dem Einfluss der Schwere in Bewegung befindet, sich so lange gleichförmig bewegen, als die Mittelpunkte aller Scheiben $2m$ sich unter der Linie der festen Mittelpunkte befinden. [Coll. Exam., 1880.]

Man sieht, wenn man mit der Aufstellung der Bewegungsgleichungen beginnt, dass sowohl die dynamischen als die geometrischen Gleichungen linear sind und constante Coefficienten haben. Ist dies aber der Fall, so sind sämmtliche Reactionen constant, da sie weder von der Zeit noch von den Anfangsbedingungen abhängen; siehe Bd. 1, Kap. 4, §§ 135, 136. Das System ist Anfangs im Gleichgewicht und bewegt sich nur, weil es gestört wurde; die Reactionen behalten daher während der Bewegung ihre Gleichgewichtswerthe. Die Spannung eines jeden Theils des Fadens ist mithin gleich $mg$. Es ergibt sich leicht, dass die Bewegung gleichförmig ist.

Beisp. 6. Aus derselben Platte unbegrenzt dünnen Metalls von gleichmässiger Breite werden $n$ Cylinder geschnitten, deren Radien, nach abnehmender Grösse geordnet, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind. Der eine wird in den andern geschoben und das Ganze dann in das Innere eines festen Cylinders vom Radius $a$ gebracht, dessen Axe horizontal ist, so dass die Axen aller Cylinder parallel laufen. Wenn $\omega_r$ der Winkel ist, welchen der Cylinder vom Radius $a_r$ beschreibt und wenn $M_r$ die Summe $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_r$ bezeichnet, zu beweisen, dass die Gleichungen, welche die kleinen Bewegungen des Systems angeben, von der Form

$$2a_r^2(d^2\omega_r/dt^2) + g(M_r\chi_r - M_{r-1}\chi_{r+1}) = 0$$

sind, worin

$$a_r(\omega_r + \chi_r) = a_{r-1}(\omega_{r-1} + \chi_r)$$

ist. [Coll. Exam., 1880.]

§ 419. **Schwingungen einer Kette von Stäben oder Gyrostaten, die durch Fäden verbunden sind**[1]. Beisp. 1. Die Glieder einer Kette sind abwechselnd gleichförmige Stäbe, von denen jeder die Länge $2a$ hat und unelastische Fäden jeder von der Länge $2l$; die Anzahl der Stäbe ist derjenigen der Fäden gleich. Das System ist so ausgespannt, dass die Stäbe und Fäden in einer Geraden liegen und das Ende des ersten Fadens ist an dem festen Punkt $A$ und das des letzten Stabes an dem festen Punkt $B$ angeheftet. Das System wird in einer Ebene etwas verschoben; man soll die kleinen Schwingungen finden.

$n$ sei die Zahl der Stäbe, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Ordinaten ihrer Schwerpunkte; $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ihre Neigungen gegen $AB$. $s_1, s_2, \ldots, s_n$ seien die Neigungen

1) Im April 1875 machte Sir W. Thomson der London Mathematical Society Mittheilungen über die Schwingungen und Wellen in einer ausgestreckten gleichförmigen Kette von symmetrischen Gyrostaten, die durch Universalgelenke miteinander verbunden sind, vergleiche die Beisp. 4 u. 5. In den *Mathematical Tripos*, 1889, Thl. 2 stellte Prof. Burnside eine Aufgabe über die Bewegung einer endlosen Folge von Wellen auf einer Kette von Gyrostaten, die durch Kugelgelenke verbunden sind; vergl. Beisp. 6. Die in dem Text unter 1, 2, 3 gegebenen Beispiele sollen zeigen, wie die Bedingungen an den Enden einer endlichen Kette verbundener starrer Körper behandelt werden müssen.

der Fäden gegen dieselbe Gerade, $m$ die Masse eines jeden Stabes, $mA$ das Trägheitsmoment für den Schwerpunkt, $mT$ die Spannung der Kette.

Die Bewegungsgleichungen des $k^{\text{ten}}$ Stabes sind

$$y_k'' = T(s_{k+1} - s_k) \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$Aq_k'' = Ta(s_k + s_{k+1} - 2q_k) \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

worin die Accente Differentiationen nach der Zeit bedeuten. Ausserdem haben wir die geometrische Gleichung

$$y_{k+1} - y_k = a(q_k + q_{k+1}) + 2ls_{k+1} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Werden diese Gleichungen aufgelöst, so erhält man die Bewegung der Kette, so lang sie auch sein mag. Wir haben eine solche Lösung zu finden, die der Bedingung entspricht, dass an zwei Punkten $A$ und $B$ während der ganzen Bewegung

$$y_0 + aq_0 = 0, \qquad y_n + aq_n = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

ist. Ist sie erfüllt, so kann man annehmen, die Punkte $A$ und $B$ lägen fest und die ganze Kette mit Ausnahme des Stückes zwischen $A$ und $B$ entfernen.

Um die Gleichungen aufzulösen, benutzen wir die früher in § 402 erklärte Methode. Wir setzen

$$y_k = Y\varrho^k \sin(pt + \alpha), \quad q_k = Q\varrho^k \sin(pt + \alpha), \quad s_k = S\varrho^k \sin(pt + \alpha).$$

Durch Substitution werden die Gl. (1), (2), (3)

$$-p^2 Y = T(\varrho - 1) S \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

$$-(Ap^2 - 2Ta) Q = Ta(\varrho + 1) S \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

$$Y(\varrho - 1) = a(\varrho + 1) Q + 2l\varrho S \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Eliminirt man die Verhältnisse von $Y, Q, S$ durch eine Determinante, so findet man

$$(\varrho^2 + 1)\{Ap^2 - 2Ta - a^2p^2\} - 2\varrho\left\{(Ap^2 - 2Ta)\left(1 - \frac{lp^2}{T}\right) + a^2p^2\right\} = 0 \quad (8).$$

Für jeden Werth von $p$ besteht eine quadratische Gleichung zur Ermittelung von $\varrho$, deren Wurzeln $\varrho$, $\varrho_1$ derart sind, dass $\varrho\varrho_1 = 1$ ist. Setzt man daher $\varphi = pt + \alpha$, so hat man

$$\left.\begin{aligned} s_k &= (S\varrho^k + S_1\varrho_1^k)\sin\varphi \\ y_k &= (Y\varrho^k + Y_1\varrho_1^k)\sin\varphi = -\frac{T}{p^2}\{S(\varrho - 1)\varrho^k + S(\varrho_1 - 1)\varrho_1^k\}\sin\varphi \\ q_k &= (Q\varrho^k + R_1\varrho_1^k)\sin\varphi = -\frac{Ta}{Ap^2 - 2Ta}\{S(\varrho + 1)\varrho^k + S_1(\varrho_1 + 1)\varrho_1^k\}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (9).$$

Aus den Gleichungen (4) ergibt sich, wenn man $k = 0$ und $k = n$ setzt,

$$(Y + Qa) + (Y_1 + Q_1 a) = 0, \quad (Y + Qa)\varrho^n + (Y_1 + Q_1 a)\varrho_1^n = 0 \quad . \quad (10).$$

Daraus folgt, dass entweder

$$\varrho^n = \varrho_1^n \quad \ldots \ldots \quad (11),$$

oder sowohl

$$Y + Qa = 0 \quad \text{als} \quad Y_1 + Q_1 a = 0 \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

ist. Nimmt man den ersten Fall (11) an, so kann man, da $\varrho\varrho_1 = 1$ ist,

$$\varrho = \cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}, \quad \sin n\theta = 0 \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

setzen. Weil $\varrho^2 + 1 = 2\varrho\cos\theta$ ist, so wird die Determinantengleichung (8)

$$(Ap^2 - 2Ta)\{lp^2 - T(1 - \cos\theta)\} - Ta^2p^2(1 + \cos\theta) = 0 \quad . \quad . \quad (14).$$

Diese quadratische Gleichung liefert zwei positive Werthe von $p^2$, die durch

$p^2 = (1 - \cos\theta)\,T/l$ getrennt sind. Die Werthe von $\cos\theta$ sind durch $\cos\theta = \cos i\pi/n$ gegeben, worin $i$ den Werth aller ganzen Zahlen von $i = 1$ bis $i = n - 1$ hat. Die Werthe $i = 0$ und $i = n$ sind ausgeschlossen, weil sie $\varrho = \varrho_1$ machen und in diesem Fall die Lösung (9) ihren Charakter ändert und ganze Potenzen von $k$ enthält.

Was nun ferner den zweiten Fall (12) angeht, so erhält man durch Substitution von $Y = -aQ$ in (5) und (7)

$$\{p^2 l + T(\varrho - 1)\}\,S = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

und eine ähnliche Gleichung, wenn man $\varrho_1$ und $S_1$ statt $\varrho$ und $S$ schreibt. Aus (15) und (8) ergibt sich

$$\varrho = 1 - lp^2/T, \quad (A + a^2)\,lp^2 = 2Ta(a + l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Da $\varrho_1$ der reciproke Werth von $\varrho$ ist und nicht denselben Werth wie $\varrho$ haben kann, so muss $S_1 = 0$ sein. Substituirt man diese Werthe von $\varrho$ und $S_1$ in (9), so hat man die der zweiten Alternative entsprechende Lösung gefunden.

Die durch die zweite Alternative gegebene Bewegung hat das Besondere, dass $y_k + aq_k = 0$ für alle Werthe von $k$ ist, *das zweite Ende eines jeden Stabes sich also während der Bewegung in Ruhe befindet.*

Wir haben noch den Theil der Lösung zu untersuchen, der die Folge gleicher Wurzeln der Gleichung (8) ist. Da $\varrho\varrho_1 = 1$ ist, so sind diese Wurzeln $\varrho = \pm 1$. Alsdann hat man

$$y = (Y_1 + Y_2 k)(\pm 1)^k \sin(pt + \alpha)$$

und ähnliche Ausdrücke für $q$ und $s$, die man erhält, wenn man $Q_1$, $Q_2$ und $S_1$, $S_2$ statt $Y_1$, $Y_2$ schreibt. Die Beziehungen zwischen diesen sechs Coefficienten findet man, wenn man in die Bewegungsgleichungen substituirt und die verschiedenen Potenzen von $k$ gleich Null setzt. Die Gleichungen (4) geben ferner $Y_1 + aQ_1 = 0$, $Y_2 + aQ_2 = 0$. Diesen acht Gleichungen kann nur in einem Fall durch endliche Werthe der Coefficienten genügt werden, und dieser ergibt sich aus (16), wenn man $\varrho = -1$ und $A = al$ setzt. Daraus schliessen wir, dass Glieder mit $k$ als Factor in der Lösung nicht vorkommen, wenn die Enden $A$ und $B$ der Kette festliegen.

Das System hat $3n$ Coordinaten, nämlich $y_1, \ldots, y_n;\ q_1, \ldots, q_n;\ s_1, \ldots, s_n$ und $n - 1$ geometrische Gleichungen, die durch (3) gegeben werden und zwei weitere, die aus (4) folgen. Nach der Lagrange'schen Regel für die Schwingungen der Systeme um eine Gleichgewichtslage müssten wir $2n - 1$ Werthe von $p^2$ haben. *Von diesen Perioden gehen* $2(n - 1)$ *aus den* $n - 1$ *Werthen von* $\cos\theta = i\pi/n$ *hervor, von denen jeder zu einer quadratischen Gleichung für* $p^2$ *mit ungleichen Wurzeln, nämlich der Gl.* (14) *führt. Eine weitere Periode liefert Gleichung* (16).

Beisp. 2. Die Glieder einer Kette bestehen abwechselnd aus gleichförmigen Stäben, von denen jeder die Länge $2a$ hat, und unelastischen Fäden von der Länge $2l$; die Zahl der Stäbe ist derjenigen der Fäden gleich. *In dem Mittelpunkt eines jeden Stabes ist ein Schwungrad befestigt,* welches frei in einer auf dem Stab senkrechten Ebene rotirt. Das System ist so ausgestreckt, dass die Stäbe und Fäden in einer Geraden liegen und dabei ist das Ende eines Fadens an einen festen Punkt $A$ und das des letzten Stabes an einen andern festen Punkt $B$ angeheftet. Das System wird um ein Geringes verschoben; man soll die kleinen Schwingungen finden.

In Folge der Schwungräder kann die Bewegung nicht in zwei unabhängige Schwingungen in aufeinander senkrechten Ebenen zerlegt werden. Das Problem ist daher als ein solches für den Raum von drei Dimensionen zu behandeln.

$AB$ sei die $z$-Axe und die Axen der $x$ und $y$ mögen im Raum festliegen. $(x_k, y_k)$ seien die Coordinaten des Schwerpunktes des $k^{\text{ten}}$ Stabes, $(p_k, q_k, 1)$ seine Richtungscosinusse, $(r_k, s_k, 1)$ die des vorhergehenden Fadens. Die Masse eines jeden Stabes mit Schwungrad sei $m$ und $mC$, $mA$ die Trägheitsmomente für den Stab und das in seinem Schwerpunkt errichtete Loth. $n$ sei die Winkelgeschwindigkeit irgend eines Schwungrades um seine Axe; $n$ ist alsdann während der Bewegung constant. $mT$ sei die Spannung, $\nu$ die Anzahl der Stäbe.

Die Bewegungsgleichungen des $k^{\text{ten}}$ Stabes sind

$$x_k'' = T(r_{k+1} - r_k), \quad y_k'' = T(s_{k+1} - s_k) \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$\left.\begin{aligned} -Aq_k'' + Cnp_k' &= -Ta(s_k + s_{k+1} - 2q_k) \\ Ap_k'' + Cnq_k' &= Ta(r_k + r_{k+1} - 2p_k) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2).$$

Ausserdem haben wir die geometrischen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= a(p_k + p_{k+1}) + 2lr_{k+1} \\ y_{k+1} - y_k &= a(q_k + q_{k+1}) + 2ls_{k+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

ferner die Bedingungen an den Enden $A$ und $B$ der Kette

$$\left.\begin{aligned} x_0 + ap_0 &= 0 \\ y_0 + aq_0 &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x_\nu + ap_\nu &= 0 \\ y_\nu + aq_\nu &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

In diesen Gleichungen bedeuten die Accente Differentiationen nach der Zeit.

Die Gleichungen (2) erhält man aus dem Satz in Bd. 1, § 265, dass nämlich die Winkelbewegungsgrösse eines einaxigen Körpers um irgend eine durch seinen Schwerpunkt gehende Linie mit derjenigen zweier materieller Punkte von der gleichen Masse, nämlich $\frac{1}{2}m$, welche auf die Axe in dem Abstand $b = \sqrt{A}/m$ vom Schwerpunkt gesetzt werden, identisch ist, wenn man ausserdem die Winkelbewegungsgrösse $Cn$ um die Axe hinzufügt. Wir haben daher

$$h_x = m(\eta\zeta' - \zeta\eta') + mCnp, \quad h_y = m(\zeta\xi' - \xi\zeta') + mCnq,$$

worin $(\xi, \eta, \zeta)$ die Coordinaten eines der beiden Massenpunkte sind, auf den Schwerpunkt als Coordinatenanfang bezogen. In unserem Fall ist $\xi = bp$, $\eta = bq$, $\zeta = b$. Die Bewegungsgleichungen sind dann durch $dh_x/dt = L$, etc. gegeben; siehe Bd. 1, § 261. Die Momente auf der rechten Seite werden nach den gewöhnlichen Regeln der Statik gebildet, nämlich $L = \Sigma(yZ - zY)$, etc. Eine andre Methode, diese Gleichungen zu bilden, wurde in § 15 dieses Bandes angegeben.

Um die Gleichungen aufzulösen, verfährt man, wie in dem letzten Beispiel. Man setze

$$x = X\varrho^k \sin\varphi, \quad p = P\varrho^k \sin\varphi, \quad r = R\varrho^k \sin\varphi,$$

$$y = Y\varrho^k \cos\varphi, \quad q = Q\varrho^k \cos\varphi, \quad s = S\varrho^k \cos\varphi,$$

worin $\varphi = pt + \alpha$ ist. Durch Substitution in die Gleichungen (1), (2), (3) und Elimination der Verhältnisse von $X$, $Y$, $P$, $Q$, $R$, $S$ erhält man

$$(\varrho^2 + 1)\{Ap^2 - Cnp - 2aT - a^2p^2\} = 2\varrho\left\{(Ap^2 + Cnp - 2aT)\left(1 - \frac{lp^2}{T}\right) + a^2p^2\right\} \quad (8).$$

Da diese Gleichung zwei Werthe von $\varrho$ für jeden Werth von $p$ liefert, so ist jedes Glied in $\sin\theta$ oder $\cos\theta$ von *zwei* Exponenten begleitet. Sind $\varrho$, $\varrho_1$ die Wurzeln der Gleichungen (8), so ist $\varrho\varrho_1 = 1$.

Substituirt man ferner in die Gleichungen (4), so ergeben sich zwei Alternativen, nämlich (1) $\varrho^n = \varrho_1^n$ oder (2) sowohl $X + aP = 0$ als $Y + aQ = 0$.

Im ersten Fall findet man, wie zuvor, da $\varrho\varrho_1 = 1$ ist,

$$\varrho = \cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1}\,, \quad \sin n\theta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Die Determinantengleichung (8) wird

$$\{Ap^2 + Cnp - 2aT\}\{lp^2 - T(1-\cos\theta)\} - Ta^2p^2(1+\cos\theta) = 0 \quad (14).$$

Diese biquadratische Gleichung führt zu zwei reellen positiven und zwei reellen negativen Werthen von $p$, wobei jedes Werthepaar durch eine Wurzel der quadratischen Gleichung $lp^2 = T(1-\cos\theta)$ getrennt wird. Die Werthe von $\cos\theta$ sind durch $\cos\theta = \cos i\pi/\nu$ gegeben, worin $i$ die Werthe aller ganzen Zahlen von $i = 1$ bis $i = \nu - 1$ hat und $\nu$ die Anzahl der Stäbe ist.

In Bezug auf die zweite Alternative und wenn man die Gleichungen (1) und (3) genau so, wie in dem letzten Beispiel behandelt, ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= 1 - lp^2/T \\ (Ap^2 + Cnp + a^2p^2)\,l &= 2Ta(a+l) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Diese Bewegung hat das Besondere, dass *sich das eine Ende eines jeden Stabes während der ganzen Bewegung in Ruhe befindet.*

Das System hat $6\nu$ Coordinaten und $2(\nu-1)+4$ geometrische Bedingungen; wir müssten daher $2(2\nu-1)$ Werthe von $p$ haben, § 111. *Von diesen Perioden sind* $4(\nu-1)$ *durch die* $\nu-1$ *Werthe von* $\cos\theta$ *gegeben, indem jeder Werth zu einer biquadratischen Gleichung mit ungleichen Wurzeln führt. Zwei weitere Perioden liefert die biquadratische Gleichung* (16).

Beisp. 3. Die Glieder einer Kette bestehen aus schweren gleichförmigen Stäben von der Länge $2a$, die an ihren Enden durch freie Gelenke verbunden sind. Sie werden in einer horizontalen Geraden ausgestreckt, wobei das eine Ende der Kette mit einem im Raum festliegenden Punkt mittelst eines Gelenkes verbunden ist. Wenn das System von der Ruhe ausgeht, zu zeigen, dass die Anfangsreaction an dem $k^{\text{ten}}$ Gelenk

$$\frac{(-1)^k mg}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{(2+\sqrt{3})^{n+1-k} - (2-\sqrt{3})^{n+1-k}}{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}$$

ist.

Wenn die Glieder aus Stäben mit rotirenden Schwungrädern bestehen derart, dass das Trägheitsmoment eines jeden Gliedes für eine durch seinen Schwerpunkt gehende senkrechte Axe $\frac{1}{3}ma^2$ ist, zu zeigen, dass die Anfangsreactionen an den Gelenken ebenfalls durch die obige Formel angegeben werden.

Beisp. 4. Eine Kette besteht abwechselnd aus Gyrostaten, von denen jeder die Länge $2a$ hat, und masselosen verbindenden Gliedern von der Länge $2l$, wobei die Verbindung durch Universalgelenke am Ende der Axe eines jeden Gyrostaten hergestellt wird. Eine solche Kette von endlicher Länge wird in eine Lage gebracht, in der ihre Glieder ein offenes ebenes Polygon bilden und ihre Enden $A$, $B$ durch Universalgelenke festgehalten werden; das System wird so in Bewegung gesetzt, dass es mit der Winkelgeschwindigkeit $\mu$ um $AB$ rotirt, als wäre es ein starres Polygon. Man soll die Gleichungen der stationären Bewegung aufstellen.

Ein Gyrostat ist ein rasch mit der Winkelgeschwindigkeit $n$ rotirendes Schwungrad, das ohne Reibung auf einem steifen sich bewegenden Rahmen oder innerhalb eines Gehäuses gelagert ist. [Math. Soc., 1875.]

Man nehme $AB$ zur $z$-Axe und die Ebene $xz$ rotire mit der Winkelgeschwindigkeit $\mu$ so um $AB$, dass sie die Kette immer enthält. $p_k$, $s_k$ seien die Neigungen des $k^{\text{ten}}$ Stabes und Fadens gegen $AB$; $mP$ sei die Componente der Spannung parallel $AB$, sie ist daher für jeden Stab dieselbe. Die gesuchten Gleichungen sind dann

$$x_{k+1} - x_k = a(\sin p_{k+1} + \sin p_k) + 2l \sin s_{k+1},$$

$$-\mu^2 x_k = P(\operatorname{tg} s_{k+1} - \operatorname{tg} s_k),$$

$$\mu\{-C_2\mu(1-\cos p_k) + C_1 n\}\sin p_k - A\mu^2 \sin p_k \cos p_k =$$
$$= Pa\{(\operatorname{tg} s_{k+1} + \operatorname{tg} s_k)\cos p_k - 2\sin p_k\},$$

worin $mC_1$ und $mC_2$ die Trägheitsmomente des Schwungrades und des Gehäuses für die Axe und $mA$ das beider für eine senkrechte Axe ist.

Um die Momentengleichung zu erhalten, bedenke man, dass in Folge der geometrischen Eigenschaften des Universalgelenkes sich jedes gyrostatische Glied so bewegt, als ob seine Axe bis zur festen Axe $AB$ verlängert und dort durch ein Universalgelenk mit ihr verbunden wäre. So hat jedes Gehäuse die Winkelgeschwindigkeit $-\mu$ um seine Axe und $+\mu$ um eine Parallele zu $AB$, die durch seinen Schwerpunkt geht; § 83. Durch Zerlegung findet man die Winkelbewegungsgrösse um die Axen der $C$ und $A$ und daraus die Winkelbewegungsgrössen um die Coordinatenaxen $x$, $y$, $z$. Substituirt man in die Gleichungen § 10 und beachtet, dass die Winkelbewegungsgrössen bei stationärer Bewegung constant sind, so ergeben sich die drei Momentengleichungen. Zwei sind identisch erfüllt und die dritte ist oben gegeben worden.

Beisp. 5. Wenn man voraussetzt, das Polygon in der letzten Aufgabe komme einer graden Linie so nahe, dass man die dritten Potenzen von $p$ und $s$ vernachlässigen kann, zu zeigen, dass die Schwerpunkte der Gyrostaten auf der harmonischen Curve

$$x = A\cos(\theta z/b) + B\sin(\theta z/b)$$

liegen, worin $b = 2a + 2l$ und $\theta$ durch

$$(C_1\mu n - A\mu^2 + 2Pa)(1 - \cos\theta - l\mu^2/P) = \mu^2 a^2(1+\cos\theta)$$

gegeben ist.

Wenn das Polygon, statt bei $A$ und $B$ befestigt zu werden, unbegrenzt in beiden Richtungen in der Gestalt der obigen Curve verlängert wird, so macht es in der Zeit $\pi/\mu$ eine halbe Umdrehung um die $z$-Axe und die harmonische Curve rückt um die Strecke $\pi b/\theta$ längs dieser Axe fort. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $V$ ist daher $V = \mu b/\theta$. [Math. Soc., 1875.]

Beisp. 6. Eine Kette, deren Spannung $T$ ist, besteht aus abwechselnden Gliedern von der Länge $2a$ und $2b$, die durch glatte Kugelgelenke verbunden sind; die von der Länge $2a$ sind masselose verbindende Stäbe, die übrigen symmetrische Gyrostaten. Die Masse eines jeden Gyrostaten ist die Einheit und seine Trägheitsmomente für seine Axe und ein Loth auf sie sind $C$ und $A$, während seine Winkelgeschwindigkeit um seine Axe $\omega$ ist. Man finde die allgemeinen Gleichungen für die kleinen Bewegungen einer solchen Kette und zeige, dass eine endlose Folge von Wellen von der Periode $2\pi/p$ in der Richtung der Kette sich mit der durch die Gleichungen

$$C^2\omega^2 p^2 = \left[Ap^2 - 2bT - \frac{b^2p^2(x+1)^2}{x^2 - 2(1 - ap^2/T)x + 1}\right]^2$$

und

$$x^2 - 2x\cos\frac{2(a+b)p}{V} + 1 = 0$$

gegebenen Geschwindigkeit $V$ fortpflanzt. [Math. Tripos, 1889.]

Beisp. 7. $n$ gleiche Kugeln sind durch biegsame Federn verbunden und werden gezwungen, sich in einer kreisförmigen Rinne zu bewegen, in welcher sich auch die Federn befinden, und das System von Kugeln und Federn bildet eine

geschlossene Kette. Wenn die Masse der Federn im Vergleich mit derjenigen der Kugeln sehr klein ist und wenn der längs der kreisförmigen Rinne gemessene Abstand zwischen den Kugeln Anfangs der unausgedehnten Länge einer jeden der Federn gleich kommt, zu beweisen, dass die Schwingungszeiten des Systems $\pi (m/\mu)^{\frac{1}{2}} \operatorname{cosec} i\pi/n$ sind, worin $m$ die Masse einer Kugel, $\mu$ die Kraft bedeutet, welche dazu nöthig ist, die Länge einer Feder um die Einheit zu vergrössern und $i$ eine ganze Zahl ist, die irgend einen Werth von 1 bis $n$ haben kann. Mit welchem physikalischen Problem ist diese Aufgabe identisch, wenn $n$ unendlich gross ist, und wie verhält es sich dann mit den Schwingungszeiten?

[Math. Tripos, 1887.]

Beisp. 8. $2n$ gleiche und gleichförmige Stäbe, jeder von der Masse $m$, sind durch Gelenke verbunden und werden so gehalten, dass sie abwechselnd eine verticale und horizontale Lage einnehmen und so eine Figur bilden, die einer Treppe gleicht, indem jeder verticale Stab tiefer als der vorhergehende liegt. Der höchste Stab ist horizontal und kann sich frei um sein festliegendes Ende drehen. Man beweise, dass, wenn man die Stäbe loslässt, die horizontale Componente $X_{2r}$ und die verticale $Y_{2r}$ der Anfangswirkung zwischen dem $2r^{\text{ten}}$ und $(2r+1)^{\text{ten}}$ Stab durch

$$X_{2r} = B(-5+2\sqrt{6})^r + C(-5-2\sqrt{6})^r$$

$$Y_{2r} = B'(-5+2\sqrt{6})^r + C'(-5-2\sqrt{6})^r$$

gegeben ist, worin die Constanten $B$, $C$, $B'$, $C'$ durch die Gleichungen

$$X_{2n} = 0,\ Y_{2n} = 0,\ X_2 + 2X_0 = 0,\ 2Y_2 + 16Y_0 - 5mg = 0$$

bestimmt sind. [Math. Tripos, 1889].

§ 420. **Netzwerk von Massenpunkten.** Columnen von Fäden werden in einer Ebene von Zeilen von Fäden rechtwinklig geschnitten und an jedem Durchschnittspunkt wird ein materieller Punkt von der Masse $m$ befestigt. Der Zwischenraum zwischen zwei benachbarten Columnen sei $l$ und der zwischen zwei benachbarten Zeilen $l'$. Die Spannungen der Zeilen und Columnen seien $T$ bez. $T'$. Die Massenpunkte mögen senkrecht zu der Ebene schwingen, in der die Fäden liegen und das ganze System nicht unter dem Einfluss der Schwere stehen.

Beisp. 1. Wenn $w$ die Verschiebung des Massenpunktes in der $h^{\text{ten}}$ Columne und $k^{\text{ten}}$ Zeile ist und $T/ml = c^2$, $T'/ml' = c'^2$ gesetzt wird, zu beweisen, dass die Bewegungsgleichung

$$d^2w/dt^2 = c^2(w_{h+1} - 2w_h + w_{h-1}) + c'^2(w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1})$$

ist.

Beisp. 2. Man beweise, dass die Bewegung der Massenpunkte durch die Reihe dargestellt werden kann, deren allgemeines Glied

$$w = \Sigma\{a^h(Ab^k + Bb^{-k}) + a^{-h}(A'b^k + B'b^{-k})\}\sin pt \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist, worin $\Sigma$ die Summirung für alle durch die Gleichung

$$-p^2 = c^2\left(a - 2 + \frac{1}{a}\right) + c'^2\left(b - 2 + \frac{1}{b}\right)$$

verbundenen Werthe von $a$ und $b$ verlangt.

Man zeige, dass, wenn $a$ sowohl als $b$ reell sind, wenigstens eines der beiden negativ sein muss. Man zeige ferner, dass, wenn der Fall $b = \pm 1$ den Bedingungen des Problems nach möglich ist, der ihm entsprechende Coefficient von $\sin pt$

$$(\pm 1)^k \{a^h + (A + Bk) + a^{-h}(A' + B'k)\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wird.

Sind beide $a$ sowohl wie $b$ gleich $\pm 1$, so ist der entsprechende Coefficient

$$(\pm 1)^h (\pm 1)^k (A + Bh + Ck + Dhk) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Welches ist die allgemeine Form der Lösung, wenn eine der beiden Grössen $a$ und $b$ imaginär und die andre reell wird? Wenn beide imaginär sind und der Modulus die Einheit ist, zu zeigen, dass

$$\left.\begin{array}{l} w = \Sigma P \sin(pt - 2h\theta - 2k\varphi) \\ p^2 = c^2 (2 \sin \theta)^2 + c'^2 (2 \sin \varphi)^2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ist.

Beisp. 3. Man zeige, dass die Lösung (4) im letzten Beispiel eine Wellenbewegung darstellt. Wenn $\lambda$ die Länge der Welle, $v$ ihre Geschwindigkeit und $\alpha$ den Winkel angibt, den die Richtung, in der sie fortschreitet, mit den Fadenzeilen macht, zu beweisen, dass

$$\lambda\theta = \pi l \cos \alpha, \quad \lambda\varphi = \pi l' \sin \alpha, \quad v^2 (\pi/\lambda)^2 = c^2 \sin^2 \theta + c'^2 \sin^2 \varphi$$

ist.

Beisp. 4. Wenn das Netzwerk so gebildet wird, dass $cl = c'l'$ ist, zu beweisen, dass es zwei Richtungen gibt, in denen eine Welle von gegebener Länge mit der grössten Geschwindigkeit fortschreitet und dass die Fronten in diesen Fällen die Diagonalen der Oeffnungen zwischen den Fäden sind. Die beiden Richtungen der kleinsten Geschwindigkeit sind diejenigen, für welche die Fronten in die Richtung der Fäden fallen.

Beisp. 5. Wenn $cl = c'l'$ ist und die Zwischenräume zwischen den Fäden sehr klein sind, zu beweisen, dass das Netzwerk eine Membrane wird, welche gleichmässig nach allen Richtungen ausgedehnt ist. In diesem Fall rücken Wellen von jeder endlichen Länge und jeder Frontrichtung mit derselben Geschwindigkeit vorwärts.

Beisp. 6. Ein im Uebrigen unendlich grosses Netzwerk wird von einem Stab begrenzt, der längs der Diagonalen der Oeffnungen geht. Der Stab wird nach dem Gesetz $w = P \sin pt$ erschüttert. Man beweise, dass zwei verschiedene Bewegungen sich ergeben, je nachdem die Erschütterungsperiode grösser oder kleiner als $\pi/(c^2 + c'^2)^{\frac{1}{2}}$ ist. In dem ersteren Fall schreiten Wellen über das Netzwerk fort, in dem letzteren gleicht die Bewegnng der in § 411 beschriebenen.

§ 421. **Netzwerk mit viereckigen Oeffnungen.** Um die Massenpunkte in eine bestimmte Ordnung zu bringen, denken wir uns, sie seien so, wie bei rechtwinkligen Netzwerken, in Zeilen und Columnen angeordnet, wobei aber die letzteren beiden grade Linien nicht länger zu sein brauchen. Ist das Netzwerk derart gestreckt, dass die Spannung eines jeden Fadens der Länge des Fadens, in dessen Richtung sie wirkt, proportional ist und ist dieses Verhältniss gleich $c^2$, so lässt sich beweisen, dass die Bewegung durch

$$\delta^2 w_{hk} + c^2 (\Delta^2 w_{h-1,k} + \Delta'^2 w_{h,k-1})$$

dargestellt wird, worin $\Delta$ an $h$ und $\Delta'$ an $k$ operirt. Es ist dies dieselbe Gleichung wie die, welche die Bewegung eines rechtwinkligen Netzwerks bestimmt, wenn $c = c'$ ist. Die Bewegungen der beiden Netzwerke sind daher identisch, wenn man die Bedingungen für das Innere und den Umfang einander entsprechen lässt.

Auf diese Art kann man die Bewegung einer Art von Netzwerk aus der einer andern ableiten, genau, wie in der Hydrodynamik eine Flüssigkeitsbewegung durch die Methode der conjugirten Functionen in die andre verwandelt wird.

Beisp. 1. Man zeige, dass die geometrische Besonderheit dieses vierseitigen Netzwerks darin besteht, dass jeder Massenpunkt der Schwerpunkt der vier benachbarten Massenpunkte ist, mit denen er durch Fäden in Verbindung steht.

Beisp. 2. Wenn $(x, y)$ die Cartesischen Coordinaten des Massenpunktes $(hk)$ sind, zu beweisen, dass sowohl $x$ als $y$ der Differenzengleichung

$$\Delta^2 x_{h-1,k} + \Delta'^2 x_{h,k-1} = 0$$

genügen. Man zeige auch, dass man den Werthen von $x$ und $y$ die compendiöse Form

$$x + y\sqrt{-1} = \Sigma A e^{2\alpha h + 2\beta k\sqrt{-1}}, \quad \tfrac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = \pm \sin\beta$$

geben kann.

Andre Formen der Lösung lassen sich wie in § 420 ableiten. So kann z. B.

$$x = A + Bh + Ck + Dhk$$

sein.

In allen diesen Lösungen werden die Richtungen der Fäden, welche die Seiten der viereckigen Oeffnungen bilden, dadurch bestimmt, dass man (1) $h$ constant und $k$ variabel und (2) $k$ constant und $h$ variabel werden lässt. So findet man, wenn man eine einzelne Exponentialgrösse nimmt,

$$x = Ae^{2\alpha h}\cos 2\beta k, \quad y = Ae^{2\alpha h}\sin 2\beta k.$$

Sie führen zu

$$x^2 + y^2 = A^2 e^{4\alpha h}, \quad y/x = \operatorname{tg} 2\beta k.$$

Die viereckigen Oeffnungen werden daher durch concentrische Kreise und Radienvectoren von ihrem Centrum aus gebildet.

Beisp. 3. Wenn die Oeffnungen des Netzwerkes unbegrenzt klein sind, so wird das Resultat des letzten Beispiels $x + y\sqrt{-1} = f(h + k\sqrt{-1})$; es kann daher als eine Ausdehnung der Theorie der conjugirten Functionen auf endliche Differenzen betrachtet werden.

Beisp. 4. Wenn in dem Beisp. (2) die Werthe von $h$ und $k$ nicht auf ganze Zahlen beschränkt werden, zu beweisen, dass

$$\Delta x_{h-\frac{1}{2},k} = \pm \Delta' y_{h,k-\frac{1}{2}}, \quad \Delta' x_{h,k-\frac{1}{2}} = \mp \Delta y_{h-\frac{1}{2},k} \text{ ist.}$$

Die Analogie dieser Resultate mit einigen bekannten Theoremen in der Theorie der conjugirten Functionen leuchtet ein.

Beisp. 5. Die Cartesischen Coordinaten der Massenpunkte eines dreieckigen Netzwerkes sind durch $x = h$, $y = hk$ gegeben, worin $h$, $k$ beliebige ganze Zahlen bedeuten. Die Gleichungen der drei festen Grenzen sind $x = n$, $y = 0$, $y = n'x$. Mit Hülfe der in Beisp. 2 gegebenen Regel zu zeigen, dass die viereckigen Oeffnungen durch die Radienvectoren vom Coordinatenanfang aus und Ordinaten gebildet werden, die der $y$-Axe parallel laufen. Man beweise, dass die Schwingungsperiode, d. h. $2\pi/p$, durch $p^2/c^2 = \sin^2(i\pi/2n) + \sin^2(i\pi/2n')$ bestimmt wird.

## Die Theorie der Differenzengleichungen.

§ 422. **Allgemeine Bewegungsgleichungen.** Eine Reihe von $n$ materiellen Punkten von den Massen $m_1, m_2, \ldots$ sei in grader Linie in Intervallen $l_1, l_2, \ldots$ geordnet und befinde sich unter der Wirkung äusserer Kräfte und ihrer gegenseitigen Anziehungen im Gleichgewicht. Sie mögen nun aus ihren Gleichgewichtslagen entweder sämmtlich rechtwinklig zur Axe der Linie oder sämmtlich in ihrer

Richtung verschoben werden. Die Verschiebungen zur Zeit $t$ seien $y_1, y_2, \ldots y_n$. Wir wollen jetzt diese $y$ als Functionen der Zeit finden.

Die an den Massenpunkten angreifenden Kräfte sind verschiedener Art. (1) gibt es die äusseren Restitutionskräfte, welche Functionen der Verschiebungen des Massenpunktes sind und von seiner Gleichgewichtslage aus wirken. Sie liefern zur Kräftefunction Glieder von der Form $-\frac{1}{2}\Sigma a_k y_k^2$, indem alle höheren Potenzen der Verschiebungen verworfen werden. (2) gibt es die Restitutionskräfte, welche von der Wirkung der benachbarten Massenpunkte auf jeder Seite des betrachteten Massenpunktes abhängen. Sie liefern zur Kräftefunction Glieder, welche Quadrate der $y$ und Producte der $y$ mit aufeinanderfolgenden Indices enthalten. Da aber

$$2y_k y_{k+1} = y_k^2 + y_{k+1}^2 - (y_{k+1} - y_k)^2$$

ist, so haben die dadurch in die Kräftefunction eingeführten Zusatzglieder lediglich die Form $-\frac{1}{2}\Sigma b_k (y_{k+1} - y_k)^2$. (3) gibt es die Restitutionskräfte, welche von der Wirkung der beiden benachbarten Massenpunkte auf jeder Seite des betrachteten Massenpunktes abhängen. Sie liefern zur Kräftefunction Glieder, welche Quadrate und Producte der $y$ enthalten, deren Indices sich höchstens um die Zahl 2 unterscheiden. Da aber

$$2y_k y_{k+2} = (y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k)^2 + \text{etc.}$$

ist, worin das etc. Quadrate und Producte der $y$ anzeigt, deren Indices sich um die Einheit unterscheiden, so haben die in die Kräftefunction damit eingeführten Zusatzglieder offenbar lediglich die Gestalt

$$-\frac{1}{2}\Sigma c_k (y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k)^2.$$

Die Kräfte, welche von der Wirkung der drei benachbarten Massenpunkte abhängen, lassen sich ebenso behandeln.

Ausser diesen Kräften können einige äussere *Zwangskräfte* an den beiden Enden der Linie angreifen. Sie sind Functionen von $y_1$ bez. $y_n$ und liefern daher zu der Kräftefunction Glieder von der Form $-\frac{1}{2}\lambda y_1^2$ und $-\frac{1}{2}\mu y_n^2$. Wirken die Zwangskräfte auf die beiden letzten Massenpunkte an jedem Ende, so kommen zu diesen Gliedern noch die Terme

$$-\frac{1}{2}\lambda_2 (y_2 - y_1)^2 \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2}\mu_{n-1} (y_n - y_{n-1})^2$$

hinzu.

$U$ sei die Kräftefunction und die Gleichgewichtslage sei die Bezugslage. Um die Untersuchung zu vereinfachen, wollen wir uns zuerst auf die folgenden Glieder beschränken

$$2U = -\lambda y_1^2 - \mu y_n^2 - \Sigma a_k y_k^2 - \Sigma b_k (y_{k+1} - y_k)^2.$$

Wenn $T$ die lebendige Kraft ist, so hat man $2T = \Sigma m_k y_k'^2$.

Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen kann man daher in der typischen Form schreiben

$$\begin{aligned} m_k y_k'' &= -a_k y_k + [b_k (y_{k+1} - y_k) - b_{k-1} (y_k - y_{k-1})] \\ &= -a_k y_k + \varDelta (b_{k-1} \varDelta y_{k-1}), \end{aligned}$$

worin $\varDelta$ die gewöhnliche ihm in der Differenzenrechnung gegebene Bedeutung hat.

Der Fall, in welchem $a = 0$ und $b$ constant ist, wurde in § 402 gelöst.

§ 423. **Die Grenzbedingungen.** Die obige typische Gleichung stellt die Bewegung aller Massenpunkte mit Ausnahme des ersten und letzten dar. Sie schliesst den Fall $k = 1$ nicht ein, weil das Glied $-b_0(y_1 - y_0)^2$ in $2U$ fehlt und das Glied $-\lambda y_1^2$ nicht berücksichtigt worden ist. Wenn ihre Differentialquotienten nach $y_1$ gleich sind, so heben sich die Fehler gegenseitig auf. Man erhält dann

$$b_0(y_1 - y_0) = \lambda y_1 .$$

Behandelt man das andere Ende auf dieselbe Art, so ergibt sich

$$-b_n(y_{n+1} - y_n) = \mu y_n .$$

Es gibt keine Massenpunkte, die den Werthen $k = 0$ und $k = n + 1$ entsprächen; die $n$ Bewegungsgleichungen aber, welche $k = 1$ und $k = n$ entsprechen, werden sämmtlich durch die nämliche Differenzengleichung richtig dargestellt, wenn man annimmt, $y_0$ und $y_{n+1}$ hätten die durch diese beiden Bedingungen gegebenen Werthe.

§ 424. Ebenso lässt sich zeigen, dass die typische Bewegungsgleichung

$$m_k y_k'' = -a_k y_k + \Delta(b_{k-1}\Delta y_{k-1}) - \Delta^2(c_{k-2}\Delta^2 y_{k-2})$$

wird, wenn man den allgemeineren Werth für $U$ nimmt, nämlich

$$2U = -\lambda_1 y_1^2 - \lambda_2(\Delta y_1)^2 - \mu_n y_n^2 - \mu_{n-1}(\Delta y_{n-1})^2 -$$
$$-\Sigma a_k y_k^2 - \Sigma b_k(\Delta y_k)^2 - \Sigma c_k(\Delta^2 y_k)^2 .$$

Die Bedingungen an dem einen Ende sind

$$b_0\Delta y_0 - \Delta(c_{-1}\Delta^2 y_{-1}) = \lambda_1 y_1 , \quad -c_0\Delta^2 y_0 = \lambda_2 \Delta y_1 ;$$

und ähnliche gelten an dem andern.

§ 425. **Die Lösungsmethode.** Zur Auflösung der typischen Bewegungsgleichung

$$m_k y_k'' = -a_k y_k + \Delta(b_{k-1}\Delta y_{k-1})$$

benutzen wir die Lagrange'sche Methode. Um eine *Hauptschwingung* zu finden, setzen wir

$$y_k = L_k \sin(pt + \omega)$$

und erhalten so

$$a_k L_k - \Delta(b_{k-1}\Delta L_{k-1}) = p^2 m_k L_k .$$

Dieser Gleichung kann man auch die Gestalt geben

$$b_k L_{k+1} = (a_k + b_{k-1} + b_k - p^2 m_k) L_k - b_{k-1} L_{k-1} .$$

Würden wir die $n$ durch $k = 1, 2, \ldots, n$ gegebenen Gleichungen einzeln niederschreiben, so könnten wir durch successive Substitutionen den Werth von $L_k$ als lineare Function von $L_0$ und $L_1$ ausdrücken. Da aber das Verhältniss von $L_0$ zu $L_1$ durch eine der Gleichungen an den Enden gegeben ist, so lässt sich $L_k$ in der Form $L_k = C\varphi(k, p)$ ermitteln, worin $C$ nach unserm Belieben entweder $L_0$ oder $L_1$ oder irgend eine Function von $L_0$ und $L_1$ ist. Siehe § 428.

Macht man einige solche Substitutionen, so erkennt man sofort, dass $\varphi(k, p)$ eine ganze rationale Function von $p^2$ und vom $(k-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Dieses Resultat ist nun in die Bedingungsgleichung am andern Ende einzusetzen. Man erhält so nach Division durch $C$

$$b_n\{\varphi(n + 1, p) - \varphi(n, p)\} + \mu\varphi(n, p) = 0 .$$

Man kann diese Gleichung kurz durch $\psi(p) = 0$ darstellen. Wir bemerken, dass diese Entwicklung vollkommen allgemein ist derart, dass ein Werth von $L_k$, der in dieser Lösung nicht enthalten ist, der Differenzengleichung nicht genügen kann.

Dieses Verfahren ist genau dasselbe, wie die Lagrange'sche Methode zur Ermittlung der Hauptschwingungen, und die schliessliche Gleichung $\psi(p) = 0$ ist lediglich die Lagrange'sche Determinantengleichung in entwickelter Form. Man erkennt daraus, dass sie eine Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades zur Ermittlung der $n$ Werthe von $p^2$ ist.

Wird aber $n$ beträchtlich gross, so lässt sich diese Eliminationsmethode nicht immer anwenden. Die Rechnung mit endlichen Differenzen setzt uns manchmal, wie in § 402, in den Stand, eine Lösung auf einfachere Art zu finden. Welche Methode man aber auch adoptiren mag, die erhaltene Lösung, sie sei nun partiell oder vollständig, muss in der oben angegebenen eingeschlossen sein.

§ 426. Ist die gegebene Function $b_k$ so beschaffen, dass $b_0 = 0$, $b_n = 0$ und $\lambda$ sowohl wie $\mu$ auch Null sind, so gibt es keine Bedingungen an den Enden. Alsdann enthält die durch $k = 0$ bestimmte Differenzengleichung nur $L_1$ und $L_2$, da das Glied $-b_0(y_1 - y_0)$ jetzt fehlt. Diese Gleichung bestimmt daher das Verhältniss von $L_1$ zu $L_0$ und die übrige Entwicklung erfolgt wie vorher.

Es ist jedoch empfehlenswerther, diesen Fall in den früheren einzuschliessen und dabei die Bedingung zu stellen, dass $y_0$, $y_1$, $y_{n-1}$, $y_n$ nicht unendlich gross sein sollen. Unter diesem Vorbehalt können die Glieder $-b_0(y_1 - y_0)$ und $b_n(y_{n+1} - y_n)$ nicht endlich werden.

§ 427. **Die entsprechende Differentialgleichung.** Der Grenzfall dieser Differenzengleichung ist von besonderem Interesse. Macht man alle Intervalle $l_1, l_2$, etc. zwischen den Massenpunkten einander gleich und jedes gleich $l$ und setzt man $x = kl$, so ist in der Grenze, für ein unbegrenzt kleines $l$, $dx = l$ und lassen sich die sämmtlichen verschiedenen Functionen von $k$ als continuirliche Functionen von $x$ ansehen. Schreibt man ferner

$$m_k = m_x\,dx, \quad a_k = a_x\,dx, \quad b_k = b_x/dx \quad \text{und} \quad y_x = L_k,$$

so wird die Differenzengleichung in der Grenze

$$a_x y_x - \frac{d}{dx}\left(b_x \frac{dy}{dx}\right) = p^2 m_x y_x.$$

Diese Gleichung hat für alle Werthe der $x$ zwischen gewissen Grenzen, z. B. von $x = 0$ bis $x = L$ zu gelten. Die Bedingungen an den Enden sind

$$x = 0, \quad b_x \frac{dy}{dx} = \lambda y, \quad x = L, \quad -b_x \frac{dy}{dx} = \mu y.$$

Ebenso findet man die Differentialgleichung, welche der Differenzengleichung in § 424 entspricht.

In dieser Gleichung braucht man $y$ nicht klein anzunehmen, denn man kann $y$ mit einer beliebigen constanten Grösse multipliciren, weil die Gleichung linear ist. Nöthig ist aber, dass alle Functionen und alle diejenigen Differentialquotienten, die in der Gleichung auftreten, endlich sind.

Unter der Annahme, es sei $y = Af(x, p) + BF(x, p)$ die Lösung, leite man aus den Bedingungen an den Enden zwei Gleichungen zur Bestimmung von $B/A$ und $p^2$ ab. Durch die Elimination von $B/A$ erhält man dann eine einzige Gleichung, aus welcher sich die sämmtlichen möglichen Werthe von $p^2$ finden lassen. Diese Gleichung stellen wir, wie früher, durch $\psi(p) = 0$ dar.

Man setze voraus, an jedem Ende sei die Function $b_x = 0$ und sowohl $\lambda$ als $\mu$ Null. Die Bedingungen am Ende verschwinden für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Man hat daher keine Gleichung für $p$. In den folgenden Theoremen jedoch bleibt die Bedingung, dass die für $y$ gewählten Lösungen zwischen den Grenzen endlich sein müssen, in voller Geltung. In gewissen Fällen werden die Werthe von $p$ durch diese eine Bedingung eingeschränkt.

§ 428. **Beisp.** Wenn die Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\right\}\frac{dy}{dx} = p^2 y$$

lautet und die Grenzen $x=0$ und $x=1$ sind, zu zeigen, dass eine Lösung an beiden Enden nur dann endlich sein kann, wenn $p^2 = i(i+1)$ ist, worin $i$ irgend eine positive ganze Zahl bedeutet.

§ 429. Jene Differenzengleichung und ihr Grenzfall, die Differentialgleichung, sind auch noch bei anderen als dynamischen Untersuchungen von grosser Bedeutung. Man wird daher gut thun, wenn man beachtet, dass die Gleichung zwar unter einer dynamischen Bedeutung auftrat, die Resultate in diesem Abschnitt aber vollkommen allgemein sind. Man kann die Bewegungsgleichungen einfach als ebensoviele Differentialgleichungen zur Ermittlung von $y_1$, $y_2$, etc. auffassen, die, wie in Kap. VII erklärt wurde, aus den beiden Hülfsfunctionen $A$ und $C$ abgeleitet werden, während die übrigen Hülfsfunctionen $B$, $D$, $E$, $F$ Null sind. Die Functionen $A$ und $C$ werden hier $T$ und $-U$ genannt und das Symbol $m$ ist durch $p\sqrt{-1}$ ersetzt worden.

§ 430. **Drei Sätze.** In Bezug auf die Werthe von $p$ ergeben sich unmittelbar die folgenden Theoreme.

Satz 1. Ist die Function $m_k$ oder $m_x$ zwischen den Grenzen positiv, so ist die Function $T$ eine definite positive Function. Aus § 319 folgt daher, *dass alle durch $\psi(p) = 0$ gegebenen Werthe von $p^2$ reell sind.*

Da $\psi(p)$ hier dasselbe bedeutet, wie die Lagrange'sche Determinante (§ 425), so ist dieser Satz dem Theorem äquivalent, dass alle Wurzeln dieser Determinante reell sind [1]).

---

1) Einen andern Beweis dafür, dass sämmtliche Werthe von $p^2$ reell sein müssen, gibt Poisson in Art. 90 seiner *Théorie Mathématique de la Chaleur*. Er zeigt dort, dass, wenn $p^2$ ein Paar complexe Werthe von der Form $f \pm g\sqrt{-1}$ hat, das Integral $\int_0^L m_x X_x Y_x\,dx$ nicht Null sein kann (siehe § 432). Die Schlussweise ist folgendermassen. Da, nach § 435, $L_k$ eine Function von $p^2$ ist, so lässt sich den entsprechenden Werthen von $X_x$ und $Y_x$ die Form $F \pm G\sqrt{-1}$ geben. Dies führt zu der Gleichung

$$\int_0^L m_x (F^2 + G^2)\,dx = 0,$$

welche unmöglich ist, wenn $m_x$ zwischen den Grenzen dasselbe Vorzeichen behält. Poisson wendet den Satz auf den Fall von Differentialgleichungen zweiter Ordnung an, er lässt sich aber offenbar auf den allgemeinen Fall von Differentialgleichungen oder Differenzengleichungen beliebiger Ordnung ausdehnen.

§ 431. Satz 2. Wenn die Functionen $a_k$, $b_k$, etc. oder $a_x$, $b_x$, etc. ebensowohl wie $m_k$ oder $m_x$ zwischen den Grenzen positiv sind und $\lambda$, $\mu$ ebenfalls positive Werthe haben, so ist die Function $C = -U$ eine definite positive Function. Es folgt daher aus § 315, *dass alle Werthe von $p^2$ positiv sind.*

Dies ergibt sich auch aus dem Theorem in Bd. 1, dass die Gleichgewichtslage stabil ist, wenn die Kräftefunction $U$ ein Maximum in ihr ist.

§ 432. Satz 3. Sind $p$ und $q$ zwei ungleiche mögliche Werthe des Parameters $p$ und geben die typischen Gleichungen

$$y_k = X_k \sin pt \quad \text{und} \quad y_k = Y_k \sin qt$$

die entsprechenden Lösungen an, *so kann man die Methode der Multiplicatoren, wie in Kap. VIII, § 399 erklärt wurde, benutzen und behaupten, dass*

$$\Sigma m_k X_k Y_k = m_1 X_1 Y_1 + \cdots + m_n X_n Y_n = 0$$

ist. In dem Fall einer Differentialgleichung wird daraus $\int\limits_0^L m_x X_x Y_x \, dx = 0$.

Vergleicht man damit das Normalbeispiel in § 402, so erkennt man, auf welche verschiedene Art sich diese drei Sätze benutzen lassen. Die dort gefundenen Werthe von $p^2$ waren sämmtlich reell und positiv; der dritte Satz wurde in § 406 zur Bestimmung der Integrationsconstanten gebraucht, wenn die Anfangsbedingungen bekannt sind.

§ 433. **Die Sturm'schen Theoreme.** Wir wollen uns auf den Fall beschränken, in welchem die Differenzengleichung die Form

$$a_k y_k - \Delta (b_{k-1} \Delta y_{k-1}) = p^2 m_k y_k$$

hat und die einzelnen Arten der Bewegung, welche durch die verschiedenen Werthe von $p^2$ bestimmt werden, miteinander vergleichen.

Um die Bewegung der einzelnen Massenpunkte leichter erkennen zu können, ziehen wir Ordinaten, die in der Gleichgewichtslage eines jeden Massenpunktes senkrecht auf ihrer Reihe stehen. Die Länge der Ordinate sei der Verschiebung des Massenpunktes zur Zeit $t$ gleich. Die von den Endpunkten dieser Ordinaten gebildete Curve führt dem Auge die Natur der Bewegung vor. Die Durchschnittspunkte der Curve mit der Axe der Punktreihe heissen *Schwingungsknoten*, die grössten und kleinsten Ordinaten *Schwingungsbäuche*.

In dem Beispiel des § 402 waren diese Ordinaten die thatsächlichen Verrückungen der verschiedenen Massenpunkte. In dem allgemeinen Fall, den wir jetzt untersuchen, ist diese Curve lediglich dazu erdacht, dem Auge den wechselnden Zustand des Systems vorzuführen; in jenem speciellen Fall dagegen war sie durch die sichtbare Bewegung gegeben.

Die sämmtlichen möglichen Werthe von $p$ seien, mit dem kleinsten anfangend, der Grösse nach geordnet.

Es wird gezeigt werden, *dass in der durch den kleinsten Werth von $p$ gegebenen Lösung alle jene Ordinaten in jedem Moment dasselbe Vorzeichen haben.* Während der ganzen Bewegung bildet daher die darstellende Curve einen Bogen mit einem einzigen Bauch, welcher von der einen Seite der $x$-Axe nach der andern hin- und herschwingt.

Ferner wird gezeigt, *dass es in der durch den nächst grösseren Werth von $p$ gegebenen Lösung in jedem Augenblick einen Wechsel der Vorzeichen der Ordinaten gibt, wenn man von dem einen Ende der Zeile nach dem andern geht.* Während der ganzen Bewegung bildet daher die darstellende Curve einen doppelten Bogen mit zwei Bäuchen, die durch einen Knoten getrennt werden.

*In der durch die drittkleinste Wurzel gegebenen Lösung sind in jedem Augenblick zwei Zeichenwechsel der Coordinaten vorhanden.* Die darstellende Curve bildet daher drei durch zwei Knoten getrennte Bäuche. So geht es weiter durch alle Werthe von $p$ hindurch.

*In allen diesen Fällen werden die Knoten, welche zu irgend einem Werth von $p$ gehören, durch die Knoten getrennt, welche dem in der Reihe zunächst folgenden Werth von $p$ angehören.*

§ 434. **Das Lemma.** Zum Beweis dieser Theoreme bedürfen wir das folgende Lemma. $p$ und $q$ seien zwei Werthe von $p$ und die entsprechenden Bewegungen seien durch $y_k = X_k \sin pt$ und $y_k = Y_k \sin qt$ gegeben. Es ist dann

$$\left.\begin{aligned} a_k X_k - \varDelta(b_{k-1} \varDelta X_{k-1}) &= p^2 m_k X_k \\ a_k Y_k - \varDelta(b_{k-1} \varDelta Y_{k-1}) &= q^2 m_k Y_k \end{aligned}\right\}.$$

Durch Elimination der Function $a_k$ ergibt sich

$$(q^2 - p^2) m_k X_k Y_k = b_k (X_{k+1} Y_k - X_k Y_{k+1}) - b_{k-1} (X_k Y_{k-1} - X_{k-1} Y_k).$$

Daraus erhält man durch Summirung von $k = \alpha$ bis $k = k$

$$\begin{aligned} &(q^2 - p^2)\{m_\alpha X_\alpha Y_\alpha + \cdots + m_k X_k Y_k\} \\ &= b_k (X_{k+1} Y_k - X_k Y_{k+1}) - b_{\alpha-1} (X_\alpha Y_{\alpha-1} - X_{\alpha-1} Y_\alpha). \end{aligned}$$

Die rechte Seite kann man auch schreiben

$$b_k (Y_k \varDelta X_k - X_k \varDelta Y_k - b_{\alpha-1} (Y_{\alpha-1} \varDelta X_{\alpha-1} - X_{\alpha-1} \varDelta Y_{\alpha-1}).$$

In dem Grenzfall, in welchem die Differenzengleichung in eine Differentialgleichung übergeht (§ 427), nimmt dieses Lemma die Form an

$$(q^2 - p^2) \int_0^L m X Y \, dx = \left[ b_k \left( Y \frac{dX}{dx} - X \frac{dY}{dx} \right) \right]_0^L.$$

§ 435. Zusatz 1. Man betrachte die ganze Reihe der Werthe $X_1, X_2 \ldots X_n$, wie sie aufeinander folgen. Dabei wechseln Reihen von positiven und negativen Werthen miteinander ab. $X_\alpha \ldots X_k$ sei eine solche Reihe, in welcher alle Elemente dasselbe Vorzeichen haben, während die zu beiden Seiten, also $X_{\alpha-1}$ und $X_{k+1}$, das entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. *Wir wollen beweisen, dass, wenn $q > p$ ist, es wenigstens einen Zeichenwechsel in der entsprechenden Reihe der $Y$ gibt, die sich von $Y_{\alpha-1}$ bis $Y_{k+1}$ mit Einschluss dieser beiden erstreckt.*

Man nehme an, der Fall sei möglich und alle diese $Y$ hätten dasselbe Vorzeichen; dann würde jedes der vier Glieder auf der rechten Seite der Gleichheit in dem Lemma das entgegengesetzte Vorzeichen, wie das Product $X_k Y_k$ haben. Das Lemma könnte daher nicht richtig sein.

In Betreff der Function $a_k$ haben wir keine Annahme gemacht, dagegen vorausgesetzt, dass $b_k$ und $m_k$ dasselbe Vorzeichen haben und es von dem einen bis zum andern Ende behalten.

§ 436. Zusatz 2. Zunächst betrachte man nun eine zweigetheilte Reihe von Werthen z. B. $X_\alpha \ldots X_\beta \ldots X_k$ von der Art, dass alle Elemente von $X_\alpha$ bis $X_{\beta-1}$ ein Vorzeichen, sagen wir das negative, und von $X_\beta$ bis $X_k$ das andere haben, während, um die zweigetheilte Reihe vollständig zu machen, $X_{\alpha-1}$ und $X_{k+1}$ die entgegengesetzten Zeichen, wie die ihnen folgenden bez. vorhergehenden Elemente

besitzen. *Wenn nun $q > p$ ist, so muss $Y$ nach Zusatz 1 das Vorzeichen zwischen $Y_{\alpha-1}$ und $Y_\beta$ und auch zwischen $Y_{\beta-1}$ und $Y_{k+1}$ wechseln. Wir wollen beweisen, dass ein einziger Wechsel zwischen $Y_{\beta-1}$ und $Y_\beta$ zur Erfüllung dieser beiden Forderungen nicht ausreicht.*

Denn, wäre es der Fall, so würden alle Producte $X_\alpha Y_\alpha, \ldots, X_k Y_k$ dasselbe Vorzeichen haben. Jedes der vier Glieder auf der rechten Seite der Gleichheit in dem Lemma hat aber das entgegengesetzte Vorzeichen von dem Product $X_k Y_k$. Das Lemma könnte daher wieder nicht richtig sein.

Nehmen wir auf dieselbe Art eine dreigetheilte Reihe von Werthen

$$X_\alpha \ldots X_\beta \ldots X_\gamma \ldots X_k$$

derart, dass $X$, wenn $k$ von dem einen Ende bis zum andern variirt, zweimal das Zeichen wechselt, so muss $Y$ nach Zus. 1 sein Vorzeichen zwischen $Y_{\alpha-1}$ und $Y_\beta$, $Y_{\beta-1}$ und $Y_\gamma$, $Y_{\gamma-1}$ und $Y_{k+1}$ ändern. Grade wie vorher folgt aber, dass zwei Wechsel den drei Forderungen nicht genügen.

§ 437. Zusatz 3. Man betrachte die Reihe von Werthen $X_1, X_2, \ldots, X_k$, deren Elemente an dem einen Ende der vollständigen Reihe beginnen, sämmtlich dasselbe Zeichen haben, und welche derart ist, dass $X_{k+1}$ das entgegengesetzte Vorzeichen hat. *Wir beweisen, dass, wenn $q > p$ ist, wenigstens ein Wechsel in der entsprechenden Reihe der $Y$ von $Y_1$ bis $Y_{k+1}$ stattfindet.*

In diesem Fall beginnt die Reihe an dem einen Ende; man hat daher die für dieses Ende geltenden Bedingungen $b_0(X_1 - X_0) = \lambda X_1$ und $b_0(Y_1 - Y_0) = \lambda Y_1$. Die Gleichheit in dem Lemma wird mithin

$$(q^2 - p^2)(m_1 X_1 Y_1 + \cdots + m_k X_k Y_k) = b_k(X_{k+1} Y_k - X_k Y_{k+1}).$$

Hätten nun alle $Y$ von $Y_1$ bis $Y_{k+1}$ dasselbe Vorzeichen, so würde jedes Glied auf der linken Seite dasselbe Zeichen besitzen und die beiden Glieder auf der rechten Seite das davon verschiedene, die Gleichheit könnte daher nicht bestehen.

Aehnliche Bemerkungen gelten für eine an dem andern Ende aufhörende Reihe.

§ 438. Zusatz 4. Schliesslich betrachte man die sämmtlichen vollständigen $n$ Reihen $X_1 \ldots X_n$, $Y_1 \ldots Y_n$, etc., etc., die den $n$ Werthen von $p$, $q$, etc. entsprechen, wobei diese Werthe, mit dem kleinsten beginnend, der Grösse nach geordnet sind. Nach den vorstehenden Zusätzen muss jede dieser Reihen einen Wechsel mehr haben, als irgend eine Reihe vor ihr. Da nur $n$ Glieder in jeder Reihe existiren, so kann die letzte, also die $n^{te}$, nur $n - 1$ Wechsel besitzen. *Mithin hat die erste Reihe keinen Wechsel, die zweite einen, die dritte nur zwei u. s. w. Auch alterniren die Wechsel in jeder Reihe auf die schon erklärte Art mit den Wechseln in jeder ihr folgenden Reihe.*

§ 439. Wir bemerken, dass in den Zusätzen 1 und 2 kein Gebrauch von den Bedingungen an den Enden gemacht wurde. In diesen Sätzen sind daher $p$ und $q$ willkürliche Grössen, die nur daran gebunden sind, dass $q$ grösser als $p$ sein muss. In Zusatz 3 wurden die Bedingungen an dem einen Ende eingeführt; alle drei Zusätze gelten also, wenn nur an dem einen Ende $X_1/X_0 = Y_1/Y_0$ ist. In Zusatz 4 wurde angenommen, die Bedingungen an beiden Enden seien erfüllt; $p$ und $q$ müssen also jetzt verschiedene Wurzeln der in § 425 durch $\psi(p) = 0$ dargestellten Gleichung sein.

§ 440. **Der vierte Satz.** *Zu zeigen, dass keine zwei Werthe von $p^2$ gleich sind.* Wir wollen annehmen, die Zwangsbedingungen an dem einen Ende seien, wie in Zusatz 3, erfüllt. Wir können dann das Lemma des § 434 in der Form

$$(q^2 - p^2)\,\Sigma m X Y = b_n (X_{n+1} Y_n - X_n Y_{n+1})$$

schreiben, worin sich die Summirung von $k = 1$ bis $k = n$ erstreckt. Da $p$ und $q$ jetzt willkürliche Grössen sind, so kann man $q^2 = p^2 + dp^2$ setzen. Man erhält so bis auf kleine Grössen erster Ordnung genau

$$dp^2 \Sigma m X^2 = b_n (X_{n+1} dX_n - X_n dX_{n+1}).$$

Dieser Gleichung kann man die Form geben

$$\Sigma m X^2 = \frac{\partial X_n}{\partial p^2}\left\{b_n (X_{n+1} - X_n) + \mu X_n\right\} - X_n \frac{\partial}{\partial p^2}\left\{b_n (X_{n+1} - X_n) + \mu X_n\right\}.$$

Die in Klammern stehende Grösse ist aber mit der linken Seite der Gleichung $\psi(p) = 0$ identisch, zu der wir in § 425 kamen, und welche die sämmtlichen möglichen Werthe von $p$ bestimmt, wenn die Zwangsbedingungen an beiden Enden berücksichtigt werden. Daraus folgt

$$\Sigma m X^2 = \frac{\partial X_n}{\partial p^2}\,\psi(p) - X_n \frac{\partial \psi(p)}{\partial p^2}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich unmittelbar, dass kein Werth von $p$ sowohl $\psi(p) = 0$ als $\psi'(p) = 0$ machen kann. *Die Gleichung $\psi(p) = 0$ kann daher keine gleichen Wurzeln haben.*

§ 441. Beisp. 1. Wenn $n$ materielle Punkte von beliebigen Massen in beliebigen Zwischenräumen in grader Linie, wie früher erklärt wurde, angeordnet werden und transversale durch irgend einen Werth des Parameters $p$ bestimmte Schwingungen ausführen, zu beweisen, dass die Gerade, welche zwei beliebige Massenpunkte verbindet, die Axe der Reihe in einem Punkt schneidet, welcher während der ganzen Bewegung festliegt.

Beisp. 2. Wenn $y_k = X_k \sin pt$ die dem Werth $p$ entsprechende Hauptschwingung vorstellt, zu beweisen, dass

$$p^2 \Sigma m_k X_k^2 = \Sigma a_k X_k^2 + \Sigma b_k (X_{k+1} - X_k)^2 + \lambda X_1^2 + \mu X_1^2$$

ist. Die beiden ersten $\Sigma$ verlangen die Summirung von $k = 1$ bis $k = n$ und das dritte von $k = 1$ bis $k = n - 1$.

Beisp. 3. Wenn $a_k$, $b_k$ und $m_k$ sämmtlich positiv sind und $2\pi/p$ die längste Periode einer Hauptschwingung ist, zu beweisen, dass $p^2$ kleiner als der grösste Werth von $(a_k + b_k + b_{k-1})/m_k$ und grösser als der kleinste Werth von $a_k/m_k$ ist.

Wenn $2\pi/p$ die kürzeste Periode einer Hauptschwingung ist, zu beweisen, dass $p^2$ grösser als der kleinste Werth von $(a_k + b_k + b_{k-1})/m_k$ und kleiner als der grösste Werth von $(a_k + 2b_k + b_{k-1})/m_k$ ist. In diesem Beispiel sind $b_0$ und $b_n$ gleich $\lambda$ bez. $\mu$ zu nehmen.

Beisp. 4. Wenn die Functionen $n_k$ und $b_k$ dasselbe Vorzeichen behalten oder Null sind, zu zeigen, dass ein Werth von $p$ nur dann Null sein kann, wenn sowohl $\lambda$ als $\mu$ Null sind.

Beisp. 5. $y_k = X_k \sin pt$, $y_k = Y_k \sin qt$ mögen zwei Hauptschwingungen und $q$ grösser als $p$ sein. Wenn eine Reihe von Werthen, wie $X_\alpha \ldots X_k$ genommen wird, die sämmtlich dasselbe Vorzeichen besitzen, und wenn sich dabei $X_k$ an einem Bauch befindet und ein Knoten zwischen $X_{\alpha-1}$ und $X_\alpha$ liegt, zu be-

weisen, dass entweder ein Knoten oder ein Bauch innerhalb der Reihe $Y_{a-1} \dots Y_k$ existirt.

Daraus leite man ab, dass entweder ein Knoten oder ein Bauch der kürzere Zeit dauernden Schwingung innerhalb oder in den Endpunkten der Strecke liegen muss, welche irgend einen Knoten mit irgend einem Bauch der länger dauernden Schwingung verbindet.

Beisp. 6. Für die Gleichung

$$P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + Ry = pSy,$$

in welcher $P$, $Q$, $R$, $S$ gegebene Functionen von $x$ sind, seien $y = X$ und $y = Y$ zwei Lösungen, die verschiedenen Werthen von $p$ entsprechen, und $\mu$ sei der integrirende Factor der beiden ersten Glieder auf der linken Seite. Man beweise, dass $\int \mu SXY\,dx = 0$ ist für beliebige Grenzen, zwischen welchen $X$, $Y$ und ihre Differentialquotienten endlich sind, vorausgesetzt dass an jeder Grenze entweder

$$P = 0 \text{ oder } \frac{dY}{dx}\Big/Y = \frac{dX}{dx}\Big/X$$

ist.

Beisp. 7. Zusätzliche äussere Kräfte mögen an dem System so angreifen (§ 422), dass $a_k$ sich in $a'_k$ verwandelt, wobei $a'_k - a_k$ zwischen den Grenzen $k = 1$ und $k = n$ positiv ist. Wenn alsdann $m_k$ ebenfalls positiv ist, zu beweisen, dass jeder Werth von $p^2$ grösser wird. Wenn auf der andern Seite die Trägheit so vermehrt wird, dass $m_k$ sich in $m'_k$ verwandelt und wenn dann sowohl $m'_k - m_k$ als $m_k$ zwischen den Grenzen positiv sind, zu beweisen, dass alle Werthe von $p^2$ sich verringern.

Diese Resultate folgen aus § 76 und § 77, Beisp. 1. Sie können auch aus dem Lemma abgeleitet werden.

Beisp. 8. Die Bewegungsgleichung eines dynamischen Systems sei

$$a_x y_x - \frac{d}{dx}\left(b_x \frac{dy}{dx}\right) = p^2 m_x y_x,$$

worin die Werthe von $p^2$ aus den in § 427 gegebenen Bedingungen für $x = 0$ und $x = L$ abgeleitet werden. Eine Aenderung werde derart an dem System vorgenommen, dass $a_x$ sich in $a'_x$ verwandelt, wobei $a'_x - a_x$ für alle zwischen den Grenzen liegenden Werthe von $x$ positiv bleibt. Wenn dann auch $m_x$ zwischen den Grenzen positiv ist, zu beweisen, dass die Werthe von $p^2$ sich ebenfalls vergrössern.

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung, die in § 427 erwähnt wurde, bespricht C. Sturm in dem ersten Band von Liouville's *Journal*. Er stellt dort die in § 433 gegebenen Theoreme auf, die wir nach ihm genannt haben. Ihre Ausdehnung auf Gleichungen endlicher Differenzen findet man in einer Abhandlung des Verfassers in dem elften Band der *Proceedings of the Mathematical Society*, 1880. Die Theoreme über die Netzwerke von Massenpunkten sind einer Abhandlung des Verfassers in dem fünfzehnten Band derselben *Proceedings*, 1884 entnommen.

## Kapitel X.

# Anwendung der Variationsrechnung.

## Die Principien der kleinsten Wirkung und der variirenden Wirkung.

§ 442. **Die zwei Fundamentalgleichungen.** $q_1$, $q_2$, $q_3$, etc. seien die Coordinaten eines Systems von Körpern und $q$ bezeichne irgend eine von ihnen. $T$ sei die lebendige Kraft des ganzen Systems, $U$ die Kräftefunction und $L = T + U$. Wie früher mögen Accente Differentialquotienten nach der Zeit angeben.

Wir wollen uns denken, das System bewege sich auf eine gewisse Art, die wir die thatsächliche Bewegung oder Bahn nennen wollen. $q_1$, $q_2$, etc. sind dann Functionen von $t$ und im Allgemeinen besteht unsere Aufgabe darin, die Form dieser Functionen zu ermitteln. Man nehme an, das System bewege sich auf eine von der ersten nur wenig verschiedene Art, d. h. $q_1$, $q_2$, etc. seien Functionen von $t$, die von ihren thatsächlichen Formen nur um ein Geringes abweichen. Die so dargestellte Bewegung heisse eine benachbarte Bewegung oder Bahn. Man kann sich denken, der Uebergang von der thatsächlichen Bewegung zu irgend einer benachbarten vollziehe sich durch das Verfahren, welches *Variation* in der Variationsrechnung genannt wird[1]). Nach dem Fundamentaltheorem dieser Rechnung ist

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = [L\delta t]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'}\right)(\delta q - q'\delta t)\,dt + \\ + \left[\sum\frac{\partial L}{\partial q'}(\delta q - q'\delta t)\right]_{t_0}^{t_1},$$

1) Wenn die Anzahl der Coordinaten beschränkt ist, kann man diese Variationen geometrisch darstellen. Es seien $t$, $q_1$, $q_2$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes $P$. Der thatsächlichen Bewegung entspricht eine ganz bestimmte erste Curve. Wird diese nun in ganz willkürlicher Weise unendlich wenig abgeändert, so erhält man eine variirte Curve. Wie in den Lehrbüchern der Variationsrechnung erklärt wird, geschieht der Uebergang von einem Punkt $P$ auf der ersten Curve zu einem Punkt $P'$ auf der benachbarten dadurch, dass man $t$, $q_1$, $q_2$ mit $t + \delta t$, $q_1 + \delta q_1$, $q_2 + \delta q_2$ vertauscht. Sind mehr Coordinaten vorhanden, so lässt sich die geometrische Analogie weiter verfolgen, wenn man einen Raum von mehr als drei Dimensionen annimmt.

worin der Buchstabe $\Sigma$ die Summirung für alle Coordinaten $q_1, q_2$, etc. verlangt und die eckigen Klammern angeben, dass die Glieder, die nicht unter dem Integralzeichen stehen, zwischen Grenzen zu nehmen sind.

Wenn die Coordinaten von einander unabhängig sind, so verschwindet nach den Lagrange'schen Gleichungen jedes einzelne Glied unter dem Integralzeichen und man erhält

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt = \left[\left(L - \sum \frac{\partial T}{\partial q'} q'\right)\delta t + \sum \frac{\partial T}{\partial q'}\delta q\right]_{t_0}^{t_1} =$$
$$= \left[-H\delta t + \sum \frac{\partial T}{\partial q'}\delta q\right]_{t_0}^{t_1},$$

worin $H$ die reciproke Function von $L$ bezeichnet, wie in dem ersten Band dieses Buches erklärt wurde.

Das Integral $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ hat Sir W. R. Hamilton, *Irish Academy*, I, 1841 die *Principalfunction* genannt; es wird gewöhnlich durch den Buchstaben $S$ dargestellt.

Wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit explicite nicht enthalten, so ist $T$ eine quadratische homogene Function der Geschwindigkeiten und daher $\Sigma(\partial T/\partial q')q' = 2T$. In diesem Fall ist $H = T - U$. Die Gleichung der lebendigen Kraft gilt jetzt und $T - U$ ist daher gleich $h$, einer Constanten, welche die Energie des Systems darstellt. Die eben bewiesene Hamilton'sche Gleichung nimmt dann die einfachere Form an

$$\delta S = \delta\int_{t_0}^{t_1} L dt = -h(\delta t_1 - \delta t_0) + \left[\sum \frac{\partial T}{\partial q'}\delta q\right]_{t_0}^{t_1}.$$

§ 443. Statt $S$ kann man auch andre Functionen benutzen. Setzt man

$$V = S + [Ht]_{t_0}^{t_1}, \quad \text{so ist} \quad \delta V = \delta S + [H\delta t + t\delta H]_{t_0}^{t_1}$$

und daher

$$\delta V = \left[t\delta H + \sum \frac{\partial T}{\partial q'}\delta q\right]_{t_0}^{t_1}.$$

Die Function $V$ heisst die *charakteristische Function*. *Phil. Trans.*, 1834.

§ 444. Enthalten die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite, so ist $H = h$ und $h$ eine Constante, welche dazu benutzt werden kann, die ganze Energie des Systems darzustellen. Alsdann ist

$$V = S + h(t_1 - t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt + \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt,$$

daher

$$V = 2\int_{t_0}^{t_1} T dt.$$

Die Function $V$ drückt mithin die ganze Ansammlung an lebendiger

Kraft, d. h. *die Wirkung* des Systems beim Uebergang aus seiner Lage zur Zeit $t_0$ in seine Lage zur Zeit $t_1$ aus.

Der Einfachheit wegen wollen wir im Allgemeinen in diesem Abschnitt annehmen, die geometrischen Gleichungen enthielten die Zeit nicht explicite.

§ 445. Beim Beweis dieser Theoreme haben wir vorausgesetzt, alle Kräfte seien conservativ. Wenn zu den gegebenen Kräften irgend welche Reactionen hinzutreten, wie z. B. rollende Reibung, die man nicht dadurch berücksichtigen kann, dass man die Anzahl der unabhängigen Coordinaten reducirt, so muss man die Lagrange'sche Gleichung in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'} - \frac{\partial L}{\partial q} = P$$

benutzen, worin, wie in Bd. 1 erklärt wurde, $P\delta q$ das virtuelle Moment dieser Reactionen ist, welches der Verrückung $\delta q$ entspricht. In diesem Fall verschwindet die Grösse unter dem Integralzeichen nur dann, wenn die Variationen so beschaffen sind, dass

$$\Sigma P(\delta q - q'\delta t) = 0$$

wird.

Bezeichnet nun $q$ den Werth irgend einer Coordinate bei der thatsächlichen Bewegung zur Zeit $t$, so ist $q + \delta q$ ihr Werth bei einer benachbarten Bewegung zur Zeit $t + \delta t$. Es ist aber $(q' + \delta q')\delta t$, d. h. in der Grenze $q'\delta t$, die Veränderung von $q + \delta q$ während der Zeit $\delta t$, mithin $q + \delta q - q'\delta t$ der Werth der Coordinate bei der benachbarten Bewegung zur Zeit $t$. Die benachbarten Bewegungen müssen daher derart sein, dass das virtuelle Moment der Reactionen, welches einer Verrückung des Systems aus irgend einer Lage bei der thatsächlichen Bewegung in seine Lage bei einer benachbarten Bewegung zur nämlichen Zeit entspricht, Null ist. Schränkt man die Variationen auf diese Weise ein, so behalten die beiden Gleichungen, welche die Variationen von $S$ und $V$ ausdrücken, ihre Gültigkeit auch jetzt noch.

§ 446. **Ein anderer Beweis.** Man kann die vorhergehenden Sätze aufstellen, auch ohne die Lagrange'schen Gleichungen zu benutzen. $x, y, z$ seien die Cartesischen Coordinaten eines Massenpunktes und $m$ seine Masse. $U$ sei eine solche Function, dass $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$ die Componenten der gegebenen an dem Massenpunkt angreifenden Kräfte in der Richtung der Axen sind. Man kann statt dieser Componenten, wie gewöhnlich, $mX$, $mY$, $mZ$ schreiben. Dann ist

$$L = T + U = \tfrac{1}{2}\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U.$$

Nach dem Fundamentaltheorem der Variationsrechnung hat man

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = [L\,\delta t]_{t_0}^{t_1} + \Big[\sum \frac{\partial L}{\partial x'}(\delta x - x'\delta t)\Big]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\sum\Big(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'}\Big)(\delta x - x'\delta t)\,dt,$$

worin die Variationen $\delta x$, etc. durch die geometrischen Beziehungen des Systems miteinander verbunden sind. Substituirt man für $L$ und beachtet, dass $T$ eine homogene quadratische Function von $x'$, $y'$, $z'$ ist, so wird

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = [(U - T)\delta t + \Sigma m x'\delta x]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\Sigma m(X - x'')(\delta x - x'\delta t)\,dt.$$

Nun ist $\delta x - x'\delta t$ die Projection auf die $x$-Axe, welche die Verschiebung des Massenpunktes $m$ aus seiner Lage bei der thatsächlichen Bewegung zur Zeit $t$ in seine Lage bei einer benachbarten Bewegung *zur selben Zeit* liefert; § 445. Der unter dem Integralzeichen stehende Theil verschwindet mithin nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Das Glied $\Sigma m x' \delta x$ ist offenbar das virtuelle Moment der Bewegungsgrössen. Wenn die Coordinaten als Functionen irgend welcher unabhängiger Grössen $q_1$, $q_2$, etc. ausgedrückt werden, so ist es, wie in Bd. 1 bewiesen wurde, gleich $\Sigma(\partial T/\partial q')\delta q$. Setzt man $T - U = H$, so erhält man, wie zuvor,

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = [-H\delta t + \Sigma(\partial T/\partial q')\delta q]_{t_0}^{t_1}.$$

§ 447. **Das Princip der kleinsten Wirkung.** Wir wollen die Lagen des Systems zur Zeit $t_0$ und $t_1$ die Anfangs- und Endlagen nennen und *wollen diese als fest annehmen, so, dass die thatsächliche Bewegung und alle ihre benachbarten Bewegungen dieselbe Anfangs- und Endlage haben.* In diesem Fall verschwindet $\delta q$ an jeder Grenze und die beiden Fundamentalgleichungen, welche die Werthe von $\delta S$ und $\delta V$ liefern, nehmen die einfachere Form an

$$\delta S = \delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = -h(\delta t_1 - \delta t_0), \quad \delta V = 2\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = (t_1 - t_0)\,\delta h,$$

wobei vorausgesetzt wird, dass die geometrischen Gleichungen die Zeit explicite nicht enthalten.

*Ist die Durchgangszeit des Systems von seiner Anfangs- zu seiner Endlage ebenfalls gegeben*, so hat man $\delta t_1 = \delta t_0$ und daher

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0.$$

Ist die Constante $h$ oder, was dasselbe ist, *die Energie des Systems gegeben*, so hat man $\delta h = 0$ und daher

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = 0.$$

§ 448. Da $\delta V = 0$ ist, so muss $V$ für die thatsächliche Bewegung ein Maximum oder Minimum oder wenigstens die Aenderung, welche es beim Uebergang zu einer benachbarten Bewegung erleidet, eine kleine Grösse zweiter Ordnung sein. $V$ kann kein Maximum sein, weil man es dadurch, dass man die Körper Umwege machen lässt, beliebig vergrössern kann. Da ferner die lebendige Kraft nicht negativ sein kann, so muss es eine Bewegungsart aus einer gegebenen Lage in eine andere geben, für welche die Wirkung die kleinstmögliche ist. Wenn daher die durch die Variationsrechnung gelieferten Gleichungen nur zu einer möglichen Bewegung führen, so muss diese Bewegung $V$ zu einem Minimum machen. Wenn es aber verschiedene mögliche

Bewegungsarten gibt, so kann zwar keine ein Maximum sein, einige aber weder ein Maximum noch ein Minimum. Dies vorausgesetzt, lassen sich die beiden folgenden Theoreme aufstellen.

§ 449. *Wenn irgend zwei Lagen eines dynamischen Systems gegeben sind, so ist die thatsächliche Bewegung derart, dass $\int T dt$ kleiner ist, als wenn das System gezwungen würde, sich ohne Verletzung irgend einer geometrischen Bedingung auf eine andre Art aus der einen Lage in die andre mit derselben Energie zu bewegen; dabei sind diese andern Bewegungen durchweg derart, dass $T$ dieselbe Function der Coordinaten und ihrer Differentialquotienten bleibt.* Diese specielle Folgerung aus den allgemeinen Gleichungen in § 447 heisst gewöhnlich *das Princip der kleinsten Wirkung (Action).*

*Ebenso ist $\int L dt$ ein Minimum, wenn sich das System auf der veränderten Bahn nicht mit derselben Energie, aber in derselben Zeit von einer gegebenen Lage in die andre bewegt.*

Maupertuis glaubte, er könne aus theologischen Gründen den Satz *a priori* aufstellen, dass alle mechanischen Aenderungen in der Natur so stattfinden müssen, dass sie den kleinstmöglichen Aufwand an Kraft oder Beschleunigung verursachen. Dabei beging er das Versehen, das Product aus der Geschwindigkeit und dem Weg als den Aufwand an Arbeit anzusehen; unter dieser Annahme fanden Mathematiker, obgleich sie im Allgemeinen Maupertuis' Gründen nicht beistimmten, dass sein Princip eine bemerkenswerthe und nützliche Wahrheit ausdrücke, die sich durch bekannte mechanische Sätze begründen liesse. Whewell's *History of the Inductive Sciences*, Bd. 2, S. 119. Euler stellte am Ende seines *Traité des Isopérimètres*, 1744 die Wahrheit des Princips für isolirte Massenpunkte, die Bahnen um Kraftcentren beschreiben, fest. Der Satz wurde später von Lagrange auf die Bewegung irgend eines Systems von Körpern, die auf beliebige Art aufeinander einwirken, ausgedehnt. Lagrange wollte umgekehrt die Bewegungsgleichungen aus dem Princip der kleinsten Wirkung ableiten, scheint dabei jedoch Fehler begangen zu haben, auf welche Ostrogradsky, in seinem *Mémoire sur les équations différentielles rélatives au problème des Isopérimètres* (veröffentlicht in den Memoiren der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, 1850) hingewiesen hat.

Das Theorem, dass bei constanter Zeit $\int L\, dt$ ein Minimum ist, wurde zuerst von Jacobi (Vorl. über Dynamik S. 58) aufgestellt. cf. p. X.

§ 450. **Die modificirte Lagrange'sche Function.** Wenn in der Lagrangeschen Function $L$ von einigen Coordinaten nur die Geschwindigkeiten, d. h. ihre Differentialquotienten nach der Zeit auftreten, so sind ihre entsprechenden Impulscoordinaten während der Bewegung constant. Wie in Bd. 1, § 422 erklärt wurde, empfiehlt es sich dann manchmal, diese Geschwindigkeiten dadurch zu eliminiren, dass man die Lagrange'sche Function modificirt und die so geänderte in den gewöhnlichen Lagrange'schen Gleichungen benutzt. Man nehme an, mehrere Coordinaten $q_1$, $q_2$, etc. fehlten in dem Ausdruck für $L$, während $q_1'$, $q_2'$, etc. darin auftreten und eine gleiche Einschränkung für die übrigen Coordinaten $\xi_1'$, $\xi_2'$, etc. nicht gilt. $p_1$, $p_2$, etc. seien die Impulscoordinaten (Bd. 1, § 402) in Bezug auf $q_1$, $q_2$, etc., d. h. es sei $p = \partial T/\partial q'$. Der in Bd. 1 gegebenen Regel gemäss setzen wir

$$L_1 = L - \Sigma p q', \quad 2T_1 = 2T - \Sigma p q',$$

worin $\Sigma$ die Summirung für alle Coordinaten $q_1$, $q_2$, etc. verlangt. $L_1$ ist alsdann das modificirte $L$ und $T_1$ das modificirte $T$. Offenbar können die Theoreme

$$\delta\int L_1\,dt = 0, \quad \delta\int T_1\,dt = 0$$

nur gelten, wenn sich zeigen lässt, dass $\Sigma\delta\int pq'\,dt = 0$ ist.

Wenn, wie oben angenommen wurde, die Impulscoordinaten $p_1$ und $p_2$ während der Bewegung constant sind, so hat man

$$\delta\int pq'\,dt = p\delta\int q'\,dt = p(\delta q_1 - \delta q_0),$$

vorausgesetzt, dass die Variationen auf solche beschränkt werden, bei denen $p$ seinen constanten Werth behält. Da die Anfangs- und Endlage der Voraussetzung nach bei dem Princip der kleinsten Wirkung festliegt, so ist $\delta\int pq'\,dt = 0$. Daraus schliessen wir, *dass $\int L_1\,dt$ und $\int T_1\,dt$ unter denselben Bedingungen wie zuvor ihre Eigenschaft in Bezug auf das Maximum und Minimum beibehalten, wenn die Variationen auf solche beschränkt werden, die das Constantbleiben der Impulscoordinaten nicht stören.* Dieses Theorem rührt von Larmor her, Math. Soc. 1884.

§ 451. **Die aus der Variationsrechnung abgeleitete Bewegung.** Macht man die erste Variation von $V$ oder $S$ (unter den gegebenen Bedingungen) den Regeln der Variationsrechnung entsprechend zu Null, so kann man umgekehrt die Coordinaten $q_1$, $q_2$, etc. als Functionen von $t$ finden. Unter diesen Functionen der Zeit müssen sich zweifellos die durch die Lagrange'schen Gleichungen gegebenen Bewegungen befinden, weil sie, wie eben bewiesen wurde, die ersten Variationen zu Null machen. Möglich ist es aber immerhin, dass es auch noch andere Bahnen oder Arten, das System von der Anfangs- in die Endlage überzuführen, gibt, welche zwar den Gesetzen der Mechanik zuwider sind, aber doch $V$ oder $S$ zu einem Minimum machen. Man sieht leicht ein, dass gewisse andere Bahnen existiren müssen, denn man kann die beiden Lagen so annehmen, dass es unmöglich ist, das System aus der Anfangslage mit der gegebenen Energie so zu schleudern, dass es durch die Endlage geht. Man nehme z. B. an, man solle einen Massenpunkt unter der Wirkung der Schwere mit gegebener Geschwindigkeit von einer Anfangslage $A$ aus so werfen, dass er durch die Lage $B$ geht, die zwar auf derselben Horizontalen mit $A$ liegt, aber jenseits der weitestgehenden Wurfbahn liegt. Wir wissen, dass sich dies mit reellen Wurfbedingungen in reeller Zeit nicht ausführen lässt; und doch muss eine Bahn, die den geringsten Aufwand an Wirkung erfordert, von $A$ nach $B$ existiren. Wir werden nun zeigen, (1) dass das gewöhnliche Verfahren der Variationsrechnung, welches auf der Annahme beruht, die Variationen der unabhängigen Coordinaten könnten beliebige Vorzeichen haben, nur zu den Lagrange'schen Gleichungen führt; (2) dass es gewisse andre Bewegungsarten gibt, die so gelegen sind, dass man die Coordinaten, wenigstens für einen Theil der Bahn, auf der einen Seite nicht variiren lassen kann, ohne imaginäre Grössen einzuführen; und dass solche Bahnen, wenn diese unmög-

lichen Variationen weggelassen werden, ein Maximum oder Minimum geben können.

§ 452. **Continuirliche Bewegungen.** Wir beginnen mit dem ersten der beiden Sätze und setzen den Regeln der Variationsrechnung entsprechend $\delta S$ und $\delta V$ gleich Null.

Nimmt man $\delta\int L\,dt = 0$, *wobei die Durchgangszeit gegeben ist,* beachtet, dass es nicht nöthig ist, die Zeit variiren zu lassen, setzt also $\delta t = 0$ und an jeder Grenze ebenso jedes $\delta q = 0$, so erhält man nach § 442

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_1}\right) \delta q\, dt = 0$$

für alle Variationen. Da die $\delta q$ sämmtlich willkürlich und unabhängig sind, so muss jeder Coefficient unter dem Integralzeichen für sich verschwinden. So kommen wir direct zu den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen.

§ 453. *Soll die Wirkung ein Minimum sein*, so sind einige weitere Untersuchungen geboten, weil die Bedingung, dass die Energie $T - U$ constant sein soll, als Einschränkung auf die Variationen wirken kann, die sich den Coordinaten geben lassen. Bedeutet $h$ diese Constante, so setze man nach der Lagrange'schen Regel in der Variationsrechnung

$$W = T + \lambda(T - U - h)$$

und mache

$$\delta\int W\,dt = 0$$

ohne Rücksicht auf die gegebene Bedingung. Später wählen wir dann die willkürliche Grösse $\lambda$ so, dass die gegebene Bedingung erfüllt wird. Weil nun $\delta\int W\,dt$ für alle Variationen der Coordinaten Null ist, so muss auch $\delta\int T\,dt$ für alle Variationen Null sein, welche die gegebene Bedingung nicht verletzen. Behält man die frühere Bezeichnungsweise bei, so ist nach § 442

$$\delta\int W\delta t = [W\delta t] + \sum\int\left(\frac{\partial W}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial q'}\right)(\delta q - q'\,\delta t) + \left[\sum \frac{\partial W}{\partial q'}(\delta q - q'\,\delta t)\right] = 0,$$

worin die Integrale und die Grössen in den eckigen Klammern zwischen den gegebenen Grenzen zu nehmen sind, die der Kürze wegen weggelassen wurden.

Zuerst wollen wir den Theil betrachten, der nicht unter dem Integralzeichen steht. Ist die Anfangs- und Endlage gegeben, so ist jedes $\delta q = 0$. Man hat daher

$$\{W - \Sigma(\partial W/\partial q')\,q'\}\,\delta t = 0.$$

Dieser Gleichung wird durch $\delta t = 0$ genügt. Da aber die Durchgangszeit bei der thatsächlichen und den variirten Bewegungen nicht die nämliche sein soll, so ist dieser Factor zu verwerfen. Nun ist $T$ eine homogene quadratische Function der $q'$, mithin $\Sigma(\partial T/\partial q')\,q' = 2T$. Substituirt man für $W$ seinen Werth und benutzt diese Gleichung, so ergibt sich $(1 + \lambda)\,T + \lambda\,(U + h) = 0$. $\lambda$ ist aber derart zu bestimmen, dass $T - U = h$ ist. Man erhält mithin $(1 + 2\lambda)\,T = 0$ und daher $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Ferner betrachten wir den unter dem Integralzeichen stehenden Theil. Nach den Regeln der Variationsrechnung haben wir, da die $\delta q$ sämmtlich willkürlich sind, die typische Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial q'} = 0.$$

Substituirt man für $W$ und gibt $\lambda$ den eben gefundenen Werth, so erhält man die typische Lagrange'sche Gleichung.

Beisp. Wenn man zu den in dem Princip der kleinsten Wirkung benutzten Bedingungen noch die Bedingung hinzufügt, dass die Durchgangszeit sowohl wie die Energie in allen variirten Bewegungen dieselbe sein soll, zu zeigen, dass das Minimum im Allgemeinen nicht zu den Lagrange'schen Gleichungen führt. Ferner zu zeigen, dass das Minimum für eine gegebene Zeit, welche nicht nothwendiger Weise der Zeit des freien Durchgangs gleich zu sein braucht, zu $\lambda = -\frac{1}{2} + A/T$ führt, worin $A$ eine Constante bedeutet, die so zu wählen ist, dass die Energie ihren gegebenen Werth hat. Man zeige auch, dass, wenn die Durchgangszeit so gegeben wird, dass $A = 0$ ist, das so gefundene Minimum das kleinste ist.

§ 454. Bei der Anwendung des Princips der kleinsten Wirkung auf dynamische Probleme lassen wir das System aus einer Lage $A$ in eine andere $B$ mit gegebener Energie so rücken, dass $\int T\,dt$ oder $\int (U+h)\,dt$ ein Minimum wird. Da die Zeit des Ueberganges nicht dieselbe für alle Variationen der Bahn ist, so hängen die Grenzen der beiden Integrale von dem eingeschlagenen Weg ab. Dies bringt die Complication hervor, dass diese Beziehung, wie in dem vorigen Paragraphen, berücksichtigt werden muss. Um die Sache zu vereinfachen, ist es manchmal zu empfehlen, die Integrationsvariabele $t$ mit irgend einer der Coordinaten z.B. $q_1$ zu vertauschen. Da die Variationen der Coordinaten an jeder Grenze Null sind, so verschwindet dann der zu integrirende Theil der Variation. Diese Vertauschung hat noch den weiteren Vortheil, dass, wenn nur die Bahn gesucht wird, die Zeit schon beim Beginn des Verfahrens eliminirt ist.

Schreibt man die Gleichung der lebendigen Kraft in der Form

$$\left[\frac{1}{2}A_{11} + A_{12}\frac{\partial q_2}{\partial q_1} + A_{22}\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right)^2 + \cdots\right]\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 = U + h \quad . \; . \; . \quad (1)$$

und setzt $R^2$ für die in der eckigen Klammer stehende Grösse, so ist $R$ eine Function der Coordinaten $q_1, q_2$, etc. und der Differentialquotienten von $q_2, q_3$, etc. nach $q_1$.

Im Folgenden nehmen wir an, jede Lage des Systems sei durch die unabhängigen Coordinaten $q_1, \ldots, q_n$ bestimmt; die thatsächliche Bahn unter dem Einfluss der gegebenen Kräfte liegt dann fest, wenn $q_2, q_3$, etc. die richtigen Functionen von $q_1$ sind. Diese Functionen findet man, wenn man

$$\int (U+h)\,dt = \int (U+h)^{\frac{1}{2}} R\,dq_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

zu einem Minimum macht, wobei die Grenzen gegeben sind[1]).

Setzt man $Q = (U+h)^{\frac{1}{2}} R$, so erhält man nach der Variationsrechnung

$$\frac{\partial Q}{\partial q_2} = \frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial q_2'}\right), \quad \frac{\partial Q}{\partial q_3} = \frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial q_3'}\right), \text{ etc.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

worin die Accente Differentiationen nach $q_1$ bedeuten.

Diese Gleichungen ergeben sich leicht aus dem allgemeinen Ausdruck für die Variation eines Integrals in § 442. Beachtet man, dass der zu integrirende Theil Null wird, wenn die Grenzen festliegen, so hat man

1) Vergl. Jacobi, S. 45, 46.

$$\delta\int Q\,dq_1 = \sum\int\left\{\frac{\partial Q}{\partial q_i} - \frac{d}{dq_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial q_i'}\right)\right\}\delta q_i \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4),$$

worin $\Sigma$ die Summirung von $i=2$ bis $i=n$ angibt. Da die Variationen $\delta q_2, \delta q_3$, etc. unabhängig sind, so ist jedes Glied unter dem Integralzeichen Null.

Die Gleichungen (3) sind von zweiter Ordnung und liefern, wenn sie integrirt werden, $q_2, q_3$, etc. als Functionen von $q_1$ mit $2n-2$ Constanten. Die Werthe der Constanten werden dadurch bestimmt, dass man in diese Gleichungen die Werthe der Coordinaten für jede Grenze einsetzt. Die übrigen Constanten der Bewegungsgleichungen sind $h$ und die Integrationsconstante in (1), wenn diese Integration erforderlich ist. Sie sind bekannt, wenn die Energie und die Durchgangszeit durch die Anfangslage $A$ gegeben sind.

Wenn, wie es manchmal vorkommt, eine der Coordinaten, z. B. $q_1$, *in dem Ausdruck für $Q$ nicht vorkommt, so ist es zu empfehlen, diese Coordinate zur Integrationsvariabelen zu nehmen.* Man erhält dann sofort ein erstes Integral der Gleichungen (3), nämlich

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial q_2'} q_2' + \frac{\partial Q}{\partial q_3'} q_3' + \cdots + C' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Um sich von der Richtigkeit dieses Integrals zu überzeugen, bedenke man, dass

$$dQ = \sum\left(\frac{\partial Q}{\partial q_i} q_i' + \frac{\partial Q}{\partial q_i'} q_i''\right) dq_i$$

ist; substituirt man für $\partial Q/\partial q_i$, so erhält man den Differentialquotienten von (5).

Wir haben angenommen, die Coordinaten $q_1, q_2$, etc. des Systems seien unabhängig; ist es nicht der Fall, so ziehen wir irgend eine Beziehung $M=0$, die zwischen ihnen bestehen mag, dadurch in Rechnung, dass wir, wie in § 453, $\int(Q+\lambda M)\,dq_1$ ohne Rücksicht auf die gegebene Bedingung zu einem Minimum machen.

Beisp. Man leite aus dem Princip der kleinsten Wirkung ab, dass die Bahn eines Geschosses unter der Wirkung der Schwere eine Parabel ist. [Die Wurfgeschwindigkeit ist gegeben; sie sei $\sqrt{2gh}$; man mache $\int(h-y)\sqrt{(1+y'^2)}\,dx$ zu einem Minimum und beachte, dass der Integrand $x$ nicht enthält, man also die Gleichung (5) benutzen kann.]

§ 455. **Discontinuirliche Bewegungen.** Wir gehen nun zu dem zweiten in § 451 erwähnten Satz über und untersuchen, ob irgend welche andere Bewegungsarten ausser den bereits gefundenen vorkommen können, welche die erste Variation der Action zu Null machen. Bei der Aufstellung dieser Gleichungen wurde angenommen, alle $\delta q$ seien unabhängig; wenn aber die Bedingungen der Aufgabe irgend eine Grenze enthalten, so kann dies für eine thatsächliche Bewegung, die das System in der unmittelbaren Nachbarschaft dieser Grenze annimmt, nicht richtig sein. So sind in unserm Fall, da $T$ nicht negativ sein kann, alle Lagen des Systems ausserhalb der Grenze $U+h=0$ ausgeschlossen. In der unmittelbaren Nachbarschaft dieser Grenze können die Variationen der Coordinaten daher nicht jedes Vorzeichen vertragen[1]). Daraus folgt, dass eine Bewegung längs der Grenze eine Bahn kleinster Action sein kann, wenn sie auch aus den *gewöhnlichen* Gleichungen der Variationsrechnung nicht hervorgeht.

---

1) Ausnahmefälle, wie diese, kommen auch bei der Lehre von den Maxima und Minima in der Differentialrechnung vor. Wenn die unabhängige Veränderliche sich nicht unbegrenzt vergrössern lässt, sondern nach der einen oder beiden

Offenbar können wir das System nicht längs der Grenze, deren Gleichung $U + h = 0$ ist, fortrücken lassen, weil dabei alle Geschwindigkeiten Null sein müssen. Wir können es aber sich so nahe an dieser Grenze mit beliebig kleiner Gesammtaction bewegen lassen, wie wir wollen. Die dann erfolgende discontinuirliche Bewegung kann daher eine Bahn kleinster Action sein. Zuerst schleudere man das System aus seiner gegebenen Anfangslage $A$ mit solchen Geschwindigkeiten und Richtungen der Bewegung aber mit der gegebenen Energie fort, dass jeder Massenpunkt gleichzeitig zur Ruhe kommt. Nimmt man an, die Gleichungen ergäben reelle Wurfbedingungen, so liegt das System, wenn es zur Ruhe kommt, auf der Grenze. Diese Lage möge $B$ heissen. Darauf bewege man das System dicht an der Grenze, bis es eine solche Lage $C$ erreicht, dass es ohne Geschwindigkeit freigelassen unter der Wirkung der durch $U$ dargestellten Kräfte durch die gegebene Endlage $D$ geht. Die Bewegungen von $A$ nach $B$ und $C$ nach $D$ sind Bahnen kleinster Action, während die Action von $B$ nach $C$ beliebig klein gemacht werden kann.

§ 456. Man kann zeigen, dass die Action längs dieser discontinuirlichen Bahn wirklich ein Minimum ist. Zu diesem Zweck betrachte man irgend eine benachbarte Bewegung, welche in $A$ beginnt und in $D$ endigt. $B'$, $C'$ seien Lagen des Systems auf der benachbarten Bahn in der Nähe von $B$ bez. $C$. Da $\delta h = 0$ ist, so übertrifft die Action (§ 448) längs $AB'$ die längs $AB$ um

$$\delta V = [\Sigma(\partial T/\partial q')\, \delta q]_{t_0}^{t_1}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet an der unteren Grenze, weil beide Bahnen in $A$ beginnen. Da $T$ eine quadratische Function der Geschwindigkeiten ist, so enthält $\partial T/\partial q'$ eine Geschwindigkeit in jedem Glied und diese Geschwindigkeiten verschwinden sämmtlich in der Lage $B$, d. h. an der oberen Grenze. Daher ist $\delta V = 0$. Daraus ergibt sich, dass der Unterschied zwischen den Actionen längs $AB$ und $AB'$ eine Grösse von der bei der Untersuchung dieses Ausdruckes für $\delta V$ vernachlässigten Ordnung ist. Der Unterschied zwischen den beiden Actionen ist daher von derselben Ordnung, wie die Quadrate und Producte von $\delta q$ und $\delta q'$.

Zunächst sei dann $M'$ irgend eine solche Lage bei der benachbarten Bewegung $B'C'$, dass der Platzwechsel $B'M'$ endlich ist. Die Geschwindigkeiten in jeder Lage des Systems zwischen $B'$ und $M'$ sind von der Ordnung $\delta q'$ und die lebendige Kraft $T$ ist daher von der Ordnung $(\delta q')^2$. Die Uebergangszeit aber von $B'$ nach $M'$ variirt umgekehrt wie die mittlere Geschwindigkeit, mithin ist $\int T\,dt$, d. h. die Action von $B'$ bis $M'$, eine kleine Grösse von der ersten Ordnung, nämlich von derselben, wie $\delta q'$. Diese Action ist wesentlich positiv und, wie wir eben bewiesen haben, unendlich viel grösser als der Unterschied zwischen den Actionen längs $AB$ und $AB'$. Die Action längs $AM'$ ist also grösser als die längs $AB$.

Ebenso lässt sich zeigen, dass, wenn $N'$ eine geeignet gewählte Lage des Systems auf der benachbarten Bahn in der Nähe von $C'$ ist, die Action längs

Richtungen eine Grenze hat, so entspricht ihr Werth an den Grenzen manchmal einem Maximal- oder Minimalwerth der abhängigen Veränderlichen, ohne dass sich dies dadurch finden liesse, dass man den Differentialquotienten zu Null macht.

Einige Fälle in der Variationsrechnung, in denen die Variationen an den Grenzen jedes Vorzeichen nicht vertragen können, werden in de Morgan's *Differential Calculus*, 1842, S. 460 u. ff. angegeben. Sie scheinen von Dr. Todhunter in seinen *Researches in the Calculus of Variations* 1871, Art. 18 wieder neu entdeckt worden zu sein. Siehe auch Kap. 8 ebenda.

$N'D$ grösser ist, als die längs $CD$. Die Action längs $M'N'$ ist auch grösser als die längs $BC$. Daraus folgt, dass, so lange die räumliche Trennung der Lagen $B$ und $C$ endlich ist, die Action längs $ABCD$ kleiner als die längs irgend einer benachbarten Bahn ist.

§ 457. Beisp. Wenn man das Princip der kleinsten Wirkung auf die in § 453 erklärte Art benutzt, so entfernt man die Einschränkung bez. der Variation der Coordinaten. Man zeige, dass bei der discontinuirlichen Bahn die erste Variation von $\int W\,dt$ Null ist, wenn man $\lambda$ als eine discontinuirliche Function ansieht, welche längs der Bahnen $AB$, $CD$ gleich $-\frac{1}{2}$ und längs der Bahn $BC$ gleich Null ist.

§ 458. **Ist die Action ein thatsächliches Minimum?** Um beurtheilen zu können, ob ein Integral ein Maximum oder Minimum oder keins von beiden ist, muss man prüfen, ob die Summe der Glieder zweiter Ordnung bei der Variation des Integrals für alle Variationen der unabhängigen Variabelen dasselbe Vorzeichen beibehält oder nicht. Dieses Verfahren ist sehr langwierig; es ist jedoch nicht nöthig, es hier zu erörtern. Es reicht aus, wenn wir auf die Bemerkungen verweisen, die Jacobi in Bd. 17 von Crelle's *Journal*, 1837 gemacht hat.

Man nehme an, ein dynamisches System gehe von einer gegebenen Lage, die wir $A$ nennen wollen, aus und komme in einer Lage $B$ an. Wenn die Zeit gegeben ist, so ergibt sich die Bewegung aus $\delta\int L\,dt = 0$; ist die Energie gegeben, aus $\delta\int T\,dt = 0$. Die Constanten, welche bei der Integration der aus der Variationsrechnung sich ergebenden Differentialgleichungen auftreten, sind mit Hülfe der gegebenen Grenzwerthe zu bestimmen; da dies aber die Lösung von Gleichungen involvirt, so werden im Allgemeinen mehrere Systeme von Werthen für die willkürlichen Constanten bestehen und folglich mehrere Arten der Bewegung von $A$ nach $B$ möglich sein, welche derselben Differentialgleichung und denselben Anfangsbedingungen genügen. Wir wollen annehmen, wenn $B$ und $A$ einander nahe liegen, gebe es nur eine Art der Bewegung von $A$ nach $B$; nach § 448 macht diese Art dann $\int T\,dt$ zu einem Minimum. Nun möge sich die Lage $B$ von $A$ so entfernen, dass sie sich immer auf dieser einen Art der Bewegung befindet. Man nehme an, wenn $B$ die Lage $C$ erreicht, sei eine andre Art der Bewegung von $A$ nach $B$ möglich, die der ersten Bewegung unbegrenzt nahe liegt. Aus Jacobi's Kriterium folgt dann, dass $C$ die Grenze angibt, bis zu welcher oder über welche hinaus die Integration nicht ausgedehnt werden darf, wenn das Integral ein Minimum bleiben soll.

Jacobi erläutert seine Methode, indem er das Princip der kleinsten Wirkung bei der elliptischen Bewegung eines Planeten betrachtet. $S$ sei die Sonne und der Massenpunkt gehe von $A$ aus nach dem Aphelium hin und komme im Punkt $B$ an. Die Bahn ist bekanntlich

eine Ellipse mit dem Brennpunkt $S$. Da wir das Princip der kleinsten Wirkung benutzen, so gilt die Energie der Bewegung als gegeben. Die Hauptaxe der Ellipse ist daher bekannt und sei $2a$. Der andre Brennpunkt $H$ der Ellipse ist der Durchschnittspunkt zweier Kreise, die mit den Radien $2a - SA$, $2a - SB$ aus den Mittelpunkten $A$ bez. $B$ beschrieben werden. Die beiden Durchschnittspunkte liefern zwei Lösungen, die nur dann zusammenfallen, wenn die Kreise einander berühren, d. h. wenn die Linie $AB$ durch den Brennpunkt $H$ geht. Zieht man daher eine Sehne $AC$, die durch $H$ geht und die von dem Massenpunkt beschriebene Ellipse in $C$ schneidet, so muss die Endlage $B$ zwischen $A$ und $C$ fallen, wenn das Integral, welches in dem Princip der kleinsten Wirkung vorkommt, wirklich ein Minimum für diese Ellipse sein soll. Wenn $B$ mit $C$ zusammenfällt, so kann die zweite Variation zwar nicht negativ, aber Null werden; die Variation des Integrals ist also dann von der dritten Ordnung und kann daher entweder positiv oder negativ sein. Liegt $B$ jenseits $C$, so kann die zweite Variation selbst negativ werden.

Geht der Massenpunkt von $A$ aus nach dem Perihelium hin, so wird der äusserste Punkt $C$ dadurch bestimmt, dass man eine Sehne $AC$ durch den Brennpunkt $S$ zieht, welche die Ellipse in $C$ schneidet. Denn, wenn $A$ und $C$ die Grenzen sind, so kann man durch Umdrehen der Ellipse um $AC$ eine unendlich grosse Anzahl von Lösungen erhalten. Wenn in dem letzteren Fall die zweite Grenze $B$ jenseits $C$ fällt, so muss, wie Jacobi annahm, eine Curve doppelter Krümmung zwischen den beiden gegebenen Punkten existiren, für welche die Action kleiner ist, als für die Ellipse. Diese Annahme ist jedoch nicht nöthig, denn die discontinuirliche Bahn, von der in § 456 die Rede war, liefert in diesem Fall das Minimum.

Um die Ellipse der kleinsten Action von $A$ nach $B$ zu construiren, zieht Jacobi zwei Kreise mit den Mittelpunkten in $A$ und $B$. Sie schneiden sich in dem zweiten Brennpunkt $H$ und liefern daher zwei elliptische Bahnen. Um zu bestimmen, welche Bahn die der kleinsten Action ist, beachte man, dass die beiden Durchschnittspunkte auf entgegengesetzten Seiten von $AB$ liegen. Von den beiden elliptischen Bahnen hat daher die eine die beiden Brennpunkte $S$, $H$ auf derselben Seite von $AB$ und die andre auf entgegengesetzten Seiten. Es ist klar, dass in der letzteren Ellipse der Punkt $B$ sich jenseits des Punktes $C$ befindet, der dieser Ellipse entspricht und dass daher diese Bahn keine kleinster Action ist. Die erste Ellipse liefert daher das Minimum[1]).

**Beispiele.** Beisp. 1. Ein Massenpunkt, der unter der Einwirkung eines Kraftcentrums in $O$ steht, dessen Anziehung wie der Abstand variirt, wird von einem gegebenen Punkt $A$ mit einer gegebenen Geschwindigkeit in solcher Richtung fortgeschleudert, dass er einen andern gegebenen Punkt $B$ erreicht. Wenn $C$ der erste Punkt der elliptischen Bahn ist, dessen Tangente senkrecht

1) Jacobi, *Vorl. über Dynamik,* S. 48.

auf der Wurfrichtung in $A$ steht, zu beweisen, dass die Action von $A$ nach $B$ ein Minimum ist oder nicht, je nachdem $B$ zwischen $A$ und $C$ oder jenseits $C$ liegt.

Wenn $B$ innerhalb einer gewissen Ellipse liegt, deren Centrum $O$ und einer Brennpunkt $A$ ist, zu beweisen, dass es zwei Richtungen gibt, in welchen der Massenpunkt von $A$ aus fortgeschleudert werden und dann $B$ erreichen kann und dass die Action für die eine ein Minimum ist, für die andere nicht. Wenn $OA$ nach einem solchen Punkt $D$ verlängert wird, dass die Wurfgeschwindigkeit in $A$ derjenigen gleich ist, die ein Massenpunkt erlangen würde, der in $D$ von der Ruhe aus seine Bewegung beginnt und sich unter dem Einfluss der Centralkraft nach $A$ bewegt, zu beweisen, dass die grosse Axe der Grenzellipse dem doppelten Abstand $OD$ gleich ist.

Wenn der Punkt $B$ ausserhalb der Grenzellipse liegt, so kann der Massenpunkt $B$ nur dann erreichen, wenn er mittelst einer Zwangscurve richtig dahin geleitet wird. Die Curve der Minimalaction lässt sich durch die folgende Construction ermitteln. Man verlängere $OA$, $OB$ bis zu ihrem Durchschnitt mit dem Hülfskreis der Grenzellipse in $E$ und $F$. Die gesuchte Bahn liegt unbegrenzt nahe an $AEFB$.

Um dies zu beweisen, suche man die Richtung, in welcher der Massenpunkt von $A$ fortgeschleudert werden muss, damit er durch $B$ gehe. Wenn $OD = \varkappa$ gesetzt wird, so ist die Summe der Quadrate zweier conjugirter Halbmesser $\varkappa^2$. Man halbire $AB$ in $N$ und es sei $ON = x$, $NA = NB = y$. Die gesuchte Wurfrichtung von $A$ aus schneide die Verlängerung von $ON$ in $T$. Aus der Gleichung der Ellipse ergibt sich dann eine quadratische Gleichung zur Ermittelung von $OT$, es gibt daher im Allgemeinen zwei elliptische Bahnen, die der Massenpunkt beschreiben kann, um von $A$ nach $B$ zu kommen. Die im Punkt $A$ an sie gelegten Tangenten mögen die Verlängerung von $ON$ in $T$ und $U$ schneiden; aus der quadratischen Gleichung folgt dann, dass $OT \cdot OU = \varkappa^2$ und $NT \cdot NU = y^2$ ist. Diese Gleichungen bestimmen $T$ und $U$.

Man sieht, dass die beiden Wurfrichtungen zusammenfallen, wenn $OT = \varkappa$ ist, d. h. wenn die Tangenten in $A$ und $B$, nämlich $AT$ und $BT$, rechte Winkel miteinander machen.

Man beschreibe zwei Kreise mit den Centren $O$ und $N$ und Radien gleich $\varkappa$ bez. $y$. Einen dritten Kreis ziehe man über $TU$ als Durchmesser. Da $OT \cdot OU = \varkappa^2$ ist, so schneidet der dritte Kreis den Kreis mit dem Centrum in $O$ rechtwinklig. Ebenso schneidet er auch den Kreis, dessen Centrum $N$ ist, rechtwinklig. Die Tangenten von dem Centrum $R$ des dritten Kreises aus sind daher gleich. $R$ liegt mithin auf der Radicalaxe (Potenzlinie) der Kreise mit den Centren $O$ und $N$. Daraus erhält man eine leichte geometrische Construction zur Ermittelung von $T$ und $O$.

Die Punkte $T$ und $U$ sind nur dann nicht imaginär, wenn die Radicalaxe ausserhalb der Kreise liegt. Die Kreise dürfen sich daher nicht schneiden. Es muss also $ON + NA$ kleiner als $\varkappa$ sein. Man verlängere $AO$ nach $A'$ so, dass $OA' = OA$ wird. Wie man sieht, muss dann $AB + BA'$ kleiner als $2\varkappa$ sein. Liegt daher $B$ nicht innerhalb einer Ellipse, deren Brennpunkte $A$ und $A'$ und deren grosse Axe $2\varkappa$ ist, so kann der Massenpunkt von $A$ aus nicht so fortgeschleudert werden, dass er durch $B$ geht.

Beisp. 2. Ein Massenpunkt wird von einem gegebenen Punkt $A$ aus unter der Wirkung der Schwere fortgeschleudert und $AC$ ist eine Sehne, die durch den Brennpunkt der von ihm beschriebenen Parabel geht. Man beweise, dass die Action von $A$ bis $B$ nur dann ein Minimum ist, wenn $B$ auf der Parabel zwischen $A$ und $C$ liegt. Wenn $B$ jenseits $C$ liegt, die Bahn zu finden, welche die Action zu einem Minimum macht.

Der Beweis des ersten Satzes ergibt sich aus dem Jacobi'schen Beispiel. Um beide Fragen zu beantworten, beachte man, dass es, wenn überhaupt, zwei Richtungen

gibt, in denen man einen Massenpunkt von dem gegebenen Punkt $A$ aus mit gegebener Geschwindigkeit so fortschleudern kann, dass er durch einen zweiten gegebenen Punkt $B$ geht. Von ihren Brennpunkten $S$, $S'$ liegt der eine oberhalb, der andere unterhalb der Sehne $AB$ so, dass $SS'$ und $AB$ sich rechtwinklig halbiren. Diese Bahnen fallen zusammen, wenn $B$ in $C$ ist, und, wo auch $B$ liegen mag, eine von ihnen hat jedenfalls ihren Brennpunkt unterhalb $AB$. Diese Parabel ist die gesuchte Bahn.

Beisp. 3. Ein Massenpunkt, der von einem gegebenen Punkt $A$ mit gegebener Geschwindigkeit fortgeschleudert wird, beschreibt einen Kreis um ein Kraftcentrum auf dem Umfang, dessen Anziehung umgekehrt wie die fünfte Potenz des Abstandes variirt. Wenn $B$ irgend eine andere Lage auf diesem Kreis ist, durch welche der Massenpunkt geht, ehe er im Kraftsitz ankommt, zu beweisen, dass die Action von $A$ bis $B$ nach der Jacobi'schen Bedingung ein Minimum ist.

§ 459. **Die Inversion dynamischer Probleme** [1]). Da die Bewegungsgleichungen aus dem Princip der kleinsten Wirkung abgeleitet werden können, so lassen sich offenbar, wenn man bei der Anwendung des Princips auf zwei verschiedene Probleme denselben Ausdruck unter denselben Bedingungen zu einem Minimum zu machen hat, die allgemeinen Integrale dieser beiden Probleme auseinander folgern.

Wir wollen einen einzelnen Massenpunkt betrachten, der sich mit der Kräftefunction $U + C$ auf der Bahn $APB$ bewegt, die in dem gegebenen Punkt $A$ beginnt und in einem anderen $B$ endigt. Wenn $s = AP$ gesetzt wird und $v$ die Geschwindigkeit des Massenpunktes bezeichnet, so ist die Bahn derart, dass $\int v\,ds$ ein Minimum ist. Stellt man die inverse Curve mittelst irgend eines Inversionscentrums $O$ her, so ist für sie $\varkappa^2 \int v \frac{ds'}{r'^2}$ ein Minimum von $A'$ bis $B'$, worin die accentuirten Buchstaben sich auf die inverse Curve beziehen und $\varkappa$ die Constante der Inversion ist. Aus dem Princip der kleinsten Wirkung folgt, dass diese Curve die Bahn eines freien Massenpunktes ist, der sich mit einer solchen Kräftefunction $U' + C'$ bewegt, dass $v' = \varkappa^2 v / r'^2$ wird. Dann ist also

$$r'v' = rv$$

und daher

$$r'^2(U' + C') = r^2(U + C) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Da die Winkel der Radien einer Curve und der zu ihr inversen gleich sind, so zeigt die erste Gleichung, dass die Winkelbewegungsgrössen um irgend eine durch das Centrum der Inversion gehende Axe an den entsprechenden Punkten in den beiden Bewegungen gleich sind.

Daraus ergibt sich das folgende Theorem: *Wenn ein Massenpunkt eine Bahn $APB$ mit einer Kräftefunction $U + C$ beschreibt, so kann ein Massenpunkt die inverse Bahn $A'P'B'$ mit der durch* (1) *gegebenen Kräftefunction $U' + C'$ beschreiben, falls bei den sich entsprechenden Punkten die Geschwindigkeiten durch die Gleichung $r'v' = rv$ mit einander verbunden sind.*

Beisp. 1. Ein Massenpunkt, der gezwungen ist, sich auf einer glatten Kugel zu bewegen und an dem keine Kräfte angreifen, beschreibt bekanntlich einen grössten Kreis. Durch Umkehrung des Satzes zu zeigen, dass ein Massenpunkt, welcher gezwungen wird, sich auf einer glatten gegebenen Kugel zu bewegen und an dem eine centrale Kraft angreift, die umgekehrt wie die fünfte Potenz des Abstandes von einem Punkt $O$ variirt, eine kreisförmige Bahn beschreibt. Man zeige auch, dass dieser Kreis die Durchschnittslinie der gegebenen Kugel mit einer anderen

1) Das Wesentliche in diesem Paragraphen ist einer Abhandlung Larmor's in Bd. 15 der *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1884 entnommen.

Kugel ist, die durch $O$ und den Fusspunkt $O'$ des Lothes von $O$ auf seine Polarebene geht.

Beisp. 2. Wenn ein Massenpunkt in einem ebenen Kraftfeld, dessen auf Polarcoordinaten bezogenes Potential

$$\frac{\alpha}{r^4} + \frac{\beta(1+3\sin^2\theta)}{r^6}$$

ist, in der geeigneten Richtung mit der Geschwindigkeit geworfen wird, die er, aus unendlicher Ferne kommend, erlangen würde, zu beweisen, dass er eine Curve von der Form

$$(r - a\sin\theta)(r - b\sin\theta) = ab$$

beschreibt, vorausgesetzt, dass

$$\frac{2}{ab} + \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{\alpha}{\beta} = 0$$

ist. [Math. Tripos, 1886.]

Beisp. 3. An einem Massenpunkt, der gezwungen ist, sich auf einem Ring von verschwindend kleiner Oeffnung zu bewegen, greift eine centrale Kraft an, die umgekehrt wie die fünfte Potenz des Abstandes von der Oeffnung variirt; zu beweisen, dass die Bahn alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet.

*Man kann dynamische Theoreme auch mittelst conjugirter Functionen umformen.* Die Methode stimmt mit derjenigen überein, die wir in Kap. XIV dieses Bandes anwenden werden, um die Bewegung einer nicht homogenen Membrane aus der einer homogenen abzuleiten. Man findet dort auch ein Verzeichniss der Sätze, welche für diese Functionen erforderlich sind.

$(x, y)$, $(\xi, \eta)$ seien die Coordinaten zweier Punkte $P$, $\Pi$, die sich in entsprechenden oder conjugirten Ebenen bewegen und in solcher Beziehung stehen, dass $\xi + \eta\sqrt{-1} = f(x + y\sqrt{-1})$ ist. Bezeichnet $\mu$ den Transformationsmodulus, so ist

$$\mu^2 = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

Sind $ds$, $d\sigma$ die entsprechenden Bogen der von den beiden Punkten $P$, $\Pi$ beschriebenen Bahnen, so hat man $d\sigma = \mu\, ds$. Ist die Bewegung des Massenpunktes $\Pi$ in der Ebene $(\xi, \eta)$ durch $\delta\int v'\,d\sigma = 0$ gegeben, so wird die von $P$ in der Ebene $xy$ durch $\delta\int v'\mu\,ds = 0$ bestimmt. Mithin bewegen sich die Massenpunkte $P$ und $\Pi$ frei mit Geschwindigkeiten $v$ und $v'$ und Kräftefunctionen $U + C$ und $U' + C'$, wenn

$$v = v'\mu \text{ und daher } U + C = \mu^2(U' + C') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

ist. Nimmt man an, die Beziehung $\xi + \eta\sqrt{-1} = f(x + y\sqrt{-1})$ liefere $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, so erhält man die Gleichung der zu irgend einer Curve conjugirten durch Substitution der Werthe von $\xi$, $\eta$ in die Ausdrücke für $x$, $y$. *Wenn ein Massenpunkt eine Bahn $APB$ beschreibt und seine Geschwindigkeit und Kräftefunction stehen an irgend einem Punkt $P$ in der Beziehung $\frac{1}{2}v^2 = U + C$, so kann ein Massenpunkt die conjugirte Bahn $A'P'B'$ beschreiben und seine Geschwindigkeit $v'$ und Kräftefunction $U'$ dabei durch die Gleichungen* (II) *gegeben sein.* Die Beziehung zwischen den beiden Kräftefunctionen lässt sich auch aus den Hamilton'schen allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung ableiten, § 468.

Beisp. 4. Ein Massenpunkt $\Pi$ beschreibt eine Bahn um einen Kraftsitz, deren polare Gleichung $f(\varrho, \varphi) = 0$ ist, mit solcher Geschwindigkeit $v'$, dass $v' = F(\varrho)$ ist. Man beweise, dass ein Massenpunkt $P$ die Bahn $f(r^n, n\theta) = 0$ um den Kraftsitz mit der Geschwindigkeit $v = nr^{n-1}F(r^n)$ unter der Wirkung der centralen

Kraft $\frac{1}{2}dv^2/dr$ beschreiben kann. Man zeige auch, dass das Verhältniss der Winkelbewegungsgrössen von $P$ und $\Pi$ um die Kraftsitze gleich $n$ ist und dass die Zeiten, in denen entsprechende Bogenelemente beschrieben werden, in dem Verhältniss $1 : n^2 r^{2(n-1)}$ stehen.

§ 460. **Die Lagrange'sche Transformation.** Lagrange hat eine allgemeine Zusammenfassung seiner Transformation aus Cartesischen Coordinaten gegeben, die beachtenswerth ist. $L$ sei irgend eine Function von $x$, $x'$, etc., $y$, $y'$, etc. und von $t$, wobei wir uns nicht auf Differentialquotienten erster Ordnung beschränken. Die Variabelen $x$, $y$, etc. mögen in andere $q_1$, $q_2$, etc. umgewandelt werden, indem man für $x$, $y$, etc. Functionen von $q_1$, $q_2$, etc. und von $t$ setzt. Die Function $L$ wird so auf zweierlei Art ausgedrückt. Vergleicht man die beiden Werthe von $\delta\int L dt$, welche die Variationsrechnung liefert, wenn die Zeit nicht variirt wird, so ist, wie man sieht,

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'}+\text{etc.}\right)\delta x\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\sum\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'}+\text{etc.}\right)\delta q\,dt$$

dem Unterschied der integrirten Theile der beiden Variationen gleich. Der Ausdruck unter dem Integralzeichen muss daher durchaus unabhängig von der Operation $\delta$ und ein vollständiges Differential nach $t$ sein. Dies kann aber nur dann der Fall sein, wenn der Ausdruck Null ist, da er nur die Variationen $\delta x$, $\delta q$, etc. und nicht die Differentialquotienten dieser Variationen enthält. Man hat daher die allgemeine Transformationsgleichung

$$\sum\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'}+\text{etc.}\right)\delta x=\sum\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'}+\text{etc.}\right)\delta q,$$

worin $\Sigma$ die Summirung für alle Variablen $x$, $y$, etc., $q_1$, $q_2$, etc. angibt.

Wenn $x$, $y$, etc. Cartesische Coordinaten sind und wenn $L$ die gewöhnliche Form $\Sigma m x'^2 + U$ hat, so verschwindet die linke Seite nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Daher muss auch die rechte Seite verschwinden. Da die $q$ sämmtlich unabhängig sind, so kommen wir auf diese Art zu den Lagrange'schen Gleichungen.

Beisp. Nimmt man an, die Lagrange'sche Function $L$ sei eine Function der typischen Variablen $q$, $q'$, $q''$ und die Differentialgleichungen hätten den Typus

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial q''}=0,$$

zu zeigen, dass die entsprechenden Hamilton'schen Formen

$$r''=\frac{\partial H}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q'}\quad\text{und}\quad q''=\frac{\partial H}{\partial r}$$

sind, worin $r=\partial L/\partial q''$ und $H$ eine Function von $q$, $q'$, $r$ ist.

Es sei $H$ die reciproke Function von $L$ in Bezug auf $q''$, dann ist $L+H=\Sigma r q''$. Nach Bd. I, § 410 wird

$$\partial L/\partial q=-\partial H/\partial q,\quad \partial L/\partial q'=-\partial H/\partial q'.$$

Das erste Resultat ergibt sich durch Substitution in die Lagrange'sche Bewegungsgleichung, das zweite aus der Definition einer reciproken Function.

§ 461. **Periodische Bewegungen.** Wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten, so kann man das Symbol $H$ oder $h$ dazu benutzen,

die Energie des Systems auszudrücken. Stellt man die Energie des Systems durch $E$ dar, so lässt sich Sir W. R. Hamilton's Fundamentalgleichung schreiben

$$2\delta\int_0^t T\,dt = t\,\delta E + \left[\sum \frac{\partial T}{\partial q'}\,\delta q\right]_0^t \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Diese Gleichung werde auf die Bewegung eines Systems von Körpern angewendet, welches derart schwingt, dass sich der ganze Bewegungszustand in constanten Intervallen wiederholt. Dieses Intervall sei $i$. Man nehme an, dem System würde eine Störung durch Hinzufügen einer gewissen Menge von Energie $\delta E$ gegeben. Das System sei so beschaffen, dass sich die Bewegung auch jetzt noch nach constanten Intervallen wiederholt, und das jetzige Intervall sei $i + \delta i$. Die Symbole für die Variation in der Hamilton'schen Gleichung kann man nun dazu benutzen, den Uebergang von der einen Bewegungsart zur anderen anzugeben. Wird die Zeit $t$ der Periode $i$ der vollständigen Wiederkehr gleich genommen, so sind die Anfangs- und Endzustände der Bewegung dieselben; das letzte Glied verschwindet daher, wenn es zwischen den Grenzen genommen wird. Die Gleichung reducirt sich damit auf

$$2\delta\int_0^i T\,dt = i\,\delta E.$$

Ist $T_m$ die mittlere lebendige Kraft des Systems während einer Periode vollständiger Wiederkehr der Bewegung, so ist

$$\int_0^i T\,dt = i\,T_m.$$

Man erhält somit

$$\frac{\delta E}{T_m} = 2\,\frac{\delta(i\,T_m)}{i\,T_m}.$$

Dieser Gleichung lässt sich eine andere Gestalt geben. $P_m$ sei die mittlere potentielle Energie des Systems während einer Periode vollständiger Wiederkehr; man hat dann

$$\delta P_m + \delta T_m = \delta E, \quad \delta P_m - \delta T_m = 2\,T_m\,\frac{\delta i}{i} \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Diese Gleichungen dienen zur Bestimmung der Aenderung der mittleren potentiellen und kinetischen Energie, wenn eine beliebige Energie $\delta E$ zu der Energie des Systems noch hinzugefügt wird.

Führt das System keine Hauptschwingung aus, so wiederholt sich die Bewegung nicht in constanten Intervallen $i$. Nehmen wir an, die Bewegung setze sich aus mehreren Hauptschwingungen zusammen, oder allgemeiner, sie sei von der Art, die in Bd. 1 in dem Kapitel über die lebendige Kraft *stationäre Bewegung* genannt wurde. Werden nun die Mittel für eine sehr lange Zeit $i$ genommen, so gelten die obigen Gleichungen auch jetzt noch. Den Beweis führen wir mittelst der Hamilton'schen Gleichung (1). Dividirt man durch $t = i$, so wird das letzte Glied auf der rechten Seite sehr klein, weil die Bewegung so stattfindet, dass die $\delta q$ in diesem Glied mit der Zeit nicht beständig wachsen. Daher ist $2\delta(i\,T_m)/i = \delta E$; der Rest des Beweises wird, wie vorher, geführt.

Diese oder äquivalente Gleichungen wurden von Boltzmann, Clausius und Szily auf die dynamische Wärmetheorie angewendet. Die Boltzmann'schen Arbeiten findet man in *Poggendorff's Annalen,* die Abhandlungen der beiden Letzteren in verschiedenen Nummern des *Philosophical Magazine* von 1870 an. Die zweite der Gl. (2) nennt man wohl auch die Clausius'sche Gleichung. Wir ver-

weisen auch auf das Werk J. J. Thomson's über die *Applications of Dynamics to Physics and Chemistry*, 1888.

§ 462. Beisp. 1. Wenn die Periode vollständiger Wiederkehr eines dynamischen Systems durch Hinzufügung von Energie nicht verändert wird, zu beweisen, dass diese additive Energie sich gleichmässig auf potentielle und kinetische Energie vertheilt. Siehe § 73.

Beisp. 2. Eine Menge $\delta E$ von Energie wird einem System mitgetheilt, dessen mittlere lebendige Kraft während einer Periode vollständiger Wiederkehr $T_m$ ist. Dies wiederholt sich beständig, so dass zuletzt die mittlere lebendige Kraft und die Periode vollständiger Wiederkehr die nämlichen wie am Anfang sind. Man beweise, dass $\int \frac{dE}{T_m} = 0$ ist. Dieses Beispiel, welches man Szily verdankt, ist für die dynamische Wärmetheorie von Wichtigkeit.

## Die Integrale der allgemeinen Bewegungsgleichungen.

§ 463. **Die Hamilton'sche Darstellung der Integrale.** Sir W. R. Hamilton hat sein Fundamentaltheorem über die Variation der Principalfunction und der charakteristischen Function dazu benutzt, eine neue Methode zur Darstellung der Integrale dynamischer Probleme zu erhalten.

($\beta_1$, $\beta_1'$, $\beta_2$, $\beta_2'$, etc.) seien die Werthe von ($q_1$, $q_1'$, $q_2$, $q_2'$, etc.) für $t = t_0$ und $T_0$ sei dieselbe Function von ($\beta_1$, $\beta_1'$, etc.), wie $T$ von ($q_1$, $q_2'$, etc.). Nach § 442 ist dann, wenn man $t$ als obere Grenze setzt,

$$\delta S = \sum \frac{\partial T}{\partial q'} \delta q - \sum \frac{\partial T_0}{\partial \beta'} \delta \beta - H\delta t + H_0 \delta t_0,$$

$$\delta V = \sum \frac{\partial T}{\partial q'} \delta q - \sum \frac{\partial T_0}{\partial \beta'} \delta \beta + t\delta H - t_0 \delta H_0.$$

Offenbar lassen sich $S$ sowohl wie $V$ als Functionen der Zeit und der Anfangsbedingungen des Systems von Körpern ansehen, d. h. jede dieser Grössen kann als Function von $t_0$, $t$, $\beta_1$, $\beta_2$, etc., $\beta_1'$, $\beta_2'$, etc. betrachtet werden. Auch die Coordinaten $q_1$, $q_2$, etc. sind Functionen von $t_0$, $t$ und denselben Anfangswerthen. Obgleich nun diese Functionen im Allgemeinen unbekannt sind, so können wir uns doch die Anfangsgeschwindigkeiten $\beta_1'$ $\beta_2'$ etc. eliminirt denken, so dass jetzt $S$ und $V$ Functionen von $t_0$, $t$ und $\beta_1$, $\beta_2$, etc. $q_1$, $q_2$, etc., d. h. von den Coordinaten des Systems zur Zeit $t_0$ und $t$ sind.

Wird $S$ auf diese Art ausgedrückt, so erhält man aus der Gleichung für $\delta S$ die typischen Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q'}, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = -\frac{\partial T_0}{\partial \beta'} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Da $T$ keine Function von $q''$ ist, so enthält die erste dieser Gleichungen keinen höheren als den ersten Differentialquotienten einer Coordinate. *Diese Gleichung stellt daher typisch alle ersten Integrale der Bewegungsgleichungen dar.*

Da ferner $T_0$ nur die Anfangscoordinaten und die Anfangsgeschwindigkeiten enthält, so kommt in der zweiten Gleichung kein Differentialquotient irgend einer Coordinate vor. *Diese Gleichung stellt daher typisch alle zweiten Integrale der Bewegung dar.*

Ausserdem haben wir noch die beiden Gleichungen

$$\frac{dS}{dt} = -H, \quad \frac{dS}{dt_0} = H_0 \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

worin man, wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten, $h$ anstatt $H$ setzen und unter $h$ eine Constante verstehen kann. In diesem Fall können die Integrale zur Verbindung der Constanten der lebendigen Kraft mit den Constanten ($\beta$, $\beta'$, etc.) dienen.

Wie aus dem Vergleich dieser Resultate mit § 447 hervorgeht, ist $S$ eine Function der Art, dass alle Bewegungsgleichungen und ihre Integrale sich ergeben, wenn man annimmt, $\delta S$ sei eine bekannte Function der Variation der Grenzen. Legt man die Grenzen fest, so kommt man zu den Lagrange'schen Gleichungen, variirt man sie, so erhält man die Integrale.

§ 464. Wenn man $q_1'$, $q_2'$, etc. als Functionen von $t$, den Anfangscoordinaten und den Anfangsgeschwindigkeiten ansieht, lässt sich genau auf dieselbe Weise $t$ auch mit Hülfe der Gleichung

$$H = -U - T + \sum \frac{\partial T}{\partial q'} q'$$

eliminiren.

Auch $t_0$ kann mittelst einer ähnlichen Gleichung eliminirt werden, welche $H_0$ durch die Anfangsbedingungen ausdrückt. Beide reduciren sich auf $H = H_0 = T - U$, wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit explicite nicht enthalten.

*Nehmen wir an, $V$ werde auf diese Art als Function der Anfangscoordinaten, der Coordinaten zur Zeit $t$ und von $H$ und $H_0$ ausgedrückt.* Nach der Gleichung für $\delta V$ ist alsdann

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q'}, \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = -\frac{\partial T_0}{\partial \beta'}, \quad \frac{\partial V}{\partial H} = t, \quad \frac{\partial V}{\partial H_0} = -t_0.$$

*Setzt man voraus, $V$ sei bekannt, so gibt die erste dieser Gleichungen in typischer Form alle ersten Integrale der Bewegungsgleichungen. Die zweite liefert ebenso viel Gleichungen, als Coordinaten ($q_1$, $q_2$, etc.) vorhanden sind.* Wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten, so kommt $t$ in den durch $\frac{\partial V}{\partial \beta} = -\frac{\partial T_0}{\partial \beta'}$ gegebenen Gleichungen nicht vor, alle aber enthalten $h$. Eine von ihnen reducirt sich daher auf die Beziehung zwischen dieser Constanten und den Constanten ($\beta, \beta'$, etc.). *Die beiden letzten Gleichungen werden $\partial V/\partial h = t - t_0$. Daraus ergibt sich ein weiteres zweites Integral der Bewegungsgleichungen, welches die Zeit enthält.*

§ 465. Der typische Ausdruck $\partial T/\partial q'$ wurde in Bd. 1 die der Coordinate $q$ entsprechende Bewegungsgrösse oder kürzer die $q$-Componente der Bewegungsgrösse genannt (Impulscoordinate, vergl. Bd. 1, S. 467, Anm. zu § 402). Man kann daher sagen, die Impulscoordinate $q$ sei durch $\partial S/\partial q$ oder $\partial V/\partial q$ gegeben, je nachdem man $S$ oder $V$ benutzt.

Die den Coordinaten $q_1, q_2$, etc. entsprechenden Impulscoordinaten werden durch die Symbole $p_1, p_2$, etc. oder typisch durch den einzigen Buchstaben $p$ dargestellt.

Den Lagrange'schen Gleichungen $dp/dt = \partial L/\partial q$ entsprechend lässt sich mithin auch sagen, die Aenderungsgeschwindigkeit einer jeden Impulscoordinate sei dem Differentialquotienten einer einzelnen Function, nämlich $L$, nach der entsprechenden Coordinate gleich.

§ 466. Ist

$$Q = \int_{t_0}^{t} (\Sigma q p' + H)\, dt,$$

worin $p = \partial T/\partial q'$ ist, zu beweisen, dass

$$\delta Q = [H\delta t + \Sigma q \delta p]_{t_0}^{t}$$

ist. Weun $Q$ als Function der Anfangs- und Endimpulscoordinaten, d. h. ($\alpha_1, \alpha_2$, etc.) und ($p_1, p_2$, etc.) und der Zeiten $t_0$ und $t$ ausgedrückt wird, aus dem vorigen Resultat abzuleiten, dass

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = q, \quad \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = -\beta, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = H$$

ist. Diese Sätze rühren von Sir W. R. Hamilton her.

§ 467. **Beispiele.** Beisp. 1. Eine homogene Kugel, deren Masse die Einheit ist, rollt eine vollkommen rauhe feste schiefe Ebene hinab. Wenn die Lage der Kugel durch den Abstand $q$ des Berührungspunktes von einem festen Punkt der schiefen Ebene bestimmt wird, zu zeigen, dass

$$S = \frac{7}{10}\frac{(q-\beta)^2}{t} + \frac{1}{2}(q+\beta)gt - \frac{5}{168}g^2t^3$$

ist, worin $g$ die Componente der Schwere in der Richtung des grössten Falles der Ebene und $t_0 = 0$ ist.

Daraus leite man durch Substitution das Hamilton'sche erste und zweite Integral der Bewegungsgleichung ab.

Man findet leicht, wie in Bd. 1,

$$q = \beta + \beta' t + \frac{5}{14} g t^2;$$

ferner

$$T = \frac{7}{10} q'^2, \quad U = gq.$$

Um $S$ zu ermitteln, substituire man in

$$S = \int_0^t (T + U)\, dt.$$

Nachdem man integrirt hat, muss $\beta'$ mittelst der Gleichung für $q$ eliminirt werden.

Beisp. 2. Nimmt man dieselben Bewegungsverhältnisse an, wie in dem letzten Beispiel, zu zeigen, dass

$$V = \frac{2}{3g}\sqrt{\frac{14}{5}}\,\{(gq+h)^{\frac{3}{2}} - (g\beta+h)^{\frac{3}{2}}\}$$

ist und daraus das Hamilton'sche erste und zweite Integral abzuleiten.

Beisp. 3. Man zeige, wie sich die Gleichung der lebendigen Kraft aus den Hamilton'schen Integralen herleiten lässt.

Man hat $V$ als Function von $q_1$, $q_2$, etc. und $H$. Daraus ergibt sich

$$\frac{dV}{dt} = \sum \frac{\partial V}{\partial q'}\,q' + \frac{\partial V}{\partial H}\,\frac{dH}{dt},$$

woraus mittelst der Hamilton'schen Integrale

$$2T = \Sigma(\partial T/\partial q')\,q' + t\,(dH/dt)$$

wird. Wenn $T$ eine homogene quadratische Function von $(q_1', q_2'$, etc.) ist, so erhält man $dH/dt = 0$ oder $H =$ Constante. Die Gleichung der lebendigen Kraft lässt sich auch aus der Hamilton'schen Hauptfunction ableiten.

Beisp. 4. Wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten, zu zeigen, dass keine zwei der Hamilton'schen Integrale dieselben sein können und dass sich keines von ihnen aus zwei anderen ableiten lässt.

Nimmt man an, zwei von ihnen könnten identisch sein, so muss das Verhältniss von $\partial T/\partial q_1'$ zu $\partial T/\partial q_2'$ eine Constante $m$ sein. Integrirt man diese partielle Differentialgleichung, so ergibt sich $T$ als eine homogene quadratische Function von $q_1' + m q_2'$; $q_3'$, etc. Es würde daher möglich sein, das System mit Werthen von $q_1'$ und $q_2'$, die nicht Null sind, in Bewegung zu setzen und doch so, dass das System keine lebendige Kraft hat.

Beisp. 5. Wenn in irgend einem dynamischen System die Coordinaten $q_1, q_2, q_3$ und ihre entsprechenden Impulscoordinaten $p_1, p_2, p_3$ durch ihre Anfangswerthe und die verstrichene Zeit ausgedrückt werden, zu beweisen, dass die Functionaldeterminante von $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ mit Bezug auf ihre Anfangswerthe der Einheit gleich ist.

Dieses Theorem rührt von Boltzmann her; man vergleiche auch Maxwell, *Cambridge Transactions* Bd. 12. Bryan gibt eine elementare graphische Erläuterung dazu, *Phil. Mag.* Juni 1895.

Beisp. 6. Ein System, dessen Coordinaten $q_1$, $q_2$, etc. sind, macht kleine Schwingungen um einen Zustand stationärer Bewegung, der durch $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, etc. bestimmt wird. Die Lagrange'sche Function ist, wie in § 111, durch

$$L = L_0 + \Sigma A q' + L_2$$

gegeben, worin $L_2$ eine homogene Function zweiter Ordnung der Coordinaten und ihrer Geschwindigkeiten bezeichnet. Man beweise, dass

$$S = L_0\,(t - t_0) + \Sigma A\,(q - \beta) + \tfrac{1}{2}\,[\Sigma q \partial L_2/\partial q']$$

ist, worin das letzte Glied zwischen den Grenzen $t_0$ und $t$ zu nehmen ist. Die Integrationen sind hier ausgeführt; um aber $S$ (§ 463) als Function der Coordinaten zu erhalten, muss man schliesslich die durch die Coordinaten ausgedrückten Werthe von $q'$ und $\beta'$ substituiren.

Beisp. 7. Die Lage eines Systems, das kleine Schwingungen wie in Beisp. 6 macht, sei durch eine Coordinate $q$ derart definirt, dass

$$L = L_0 + A_1 q' + \tfrac{1}{2} A_{11} q'^2 + \tfrac{1}{2} C_{11} q^2 + G_{11} q q'$$

ist, worin sämmtliche Coefficienten constant sind. Wenn $t_0 = 0$ ist, zu beweisen, dass

$$S = L_0 t + A_1 (q - \beta) + \tfrac{1}{2} G_{11} (q^2 - \beta^2) + \tfrac{1}{2} m A_{11} \frac{(q^2 + \beta^2)(e^{mt} + e^{-mt}) - 4 q \beta}{e^{mt} - e^{-mt}}$$

ist, worin $m^2$ den Werth $C_{11}/A_{11}$ hat.

Beisp. 8. Ein Massenpunkt schwingt in einer Geraden um den Sitz einer Kraft, welche wie der Abstand variirt; man zeige, dass die Hamilton'sche Function

$$S = \frac{\sqrt{\mu}}{2} \frac{(x_0^2 + x^2) \cos \sqrt{(\mu)}\,(t - t_0) - 2 x x_0}{\sin \sqrt{(\mu)}\,(t - t_0)}$$

ist und verificire dieses Resultat durch Ableitung der Hamilton'schen Integrale.

**§ 468. Die Hamilton'schen partiellen Differentialgleichungen.** Aus dem Vorstehenden geht hervor, dass man alle Integrale eines Systems von dynamischen Gleichungen durch die Differentialquotienten einer einzigen Function ausdrücken kann. Die Methode gibt aber kein Mittel an die Hand, diese Function *a priori* zu ermitteln. *Wir wollen jetzt zeigen, dass diese Function immer einer gewissen partiellen Differentialgleichung genügen muss und sich ferner die Lösung aller dynamischen Probleme auf die Integration einer Differentialgleichung reduciren lässt.*

Um diese Differentialgleichung aufzustellen, bilden wir vorerst die reciproke Function der Lagrange'schen $L = T + U$ auf die in Bd. 1, §§ 410 und 414 angegebene Art. Das Verfahren ist kurz das folgende: Man setze $\partial T/\partial q_1' = p_1$, $\partial T/\partial q_2' = p_2$, etc., wie in § 465 in diesem Band und ferner

$$T + T_2 = \Sigma p q',$$

eliminire die Geschwindigkeiten $q_1'$, $q_2'$, etc. und drücke $T_2$ als Function der Coordinaten $q_1$, $q_2$, etc. und der Impulscoordinaten $p_1$, $p_2$, etc. aus. Die reciproke Function von $L = T + U$ ist dann $H = T_2 - U$.

Wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten, so ist die lebendige Kraft $T$ eine homogene quadratische Function der Geschwindigkeiten. Wird sie durch

$$2T = A_{11} q_1'^2 + 2 A_{12} q_1' q_2' + \text{etc.}$$

dargestellt, so ist

$$T_2 = -\frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_1 & A_{11} & A_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

worin $\Delta$ die Determinante von $T$ ist; siehe Bd. 1, § 413. $H$ wird dann eine quadratische Function der Impulscoordinaten $p_1$, $p_2$, etc. Man kann sie kurz in der Form

$$H = \tfrac{1}{2} B_{11} p_1^2 + B_{12} p_1 p_2 + \cdots - U$$

schreiben. Es ist aber $p_1 = \partial V/\partial q_1$, $p_2 = \partial V/\partial q_2$, etc. und die Gleichung der lebendigen Kraft liefert $H = h$. Daher muss $V$ der Gleichung

$$\tfrac{1}{2} B_{11} \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 + B_{12} \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{\partial V}{\partial q_2} + \text{etc.} - U = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

genügen.

Man benutzt manchmal den Buchstaben $H$ als Functionssymbol und schreibt diese Gleichung kurz

$$H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \cdots\right) = U + h.$$

Ganz auf dieselbe Art findet man $p_1 = \partial S/\partial q_1$, $p_2 = \partial S/\partial q_2$, etc. und $H = -\partial S/\partial t$. Es muss also $S$ der Gleichung

$$\frac{1}{2} B_{11} \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + B_{12} \frac{\partial S}{\partial q_1} \frac{\partial S}{\partial q_2} + \text{etc.} - U = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{(II)}$$

genügen. Darin sind die Coefficienten $B_{11}$, $B_{12}$, etc. sämmtlich bekannte Functionen der Coordinaten $q_1$, $q_2$, etc. Die Gl. (II) kann man auch

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \cdots\right) = U - \frac{\partial S}{\partial t} \quad .$$

schreiben.

Wir haben angenommen, $V$ sei als Function der Coordinaten zur Zeit $t$, der Anfangscoordinaten und der Energie $h$ ausgedrückt. *In dieser Gleichung aber kann man $V$ auch als Function der Coordinaten zur Zeit $t$, der Energie $h$ und so vieler willkürlicher Constanten ansehen, als Coordinaten vorhanden sind.* In diesem Fall sind diese Constanten in der That Functionen der Anfangscoordinaten, deren Bestimmung uns nicht obliegt. Die Gleichungen, welche die Impulscoordinaten $p_1, p_2$, etc. zur Zeit $t$ als Differentialquotienten von $V$ nach $q_1$, $q_2$, etc. liefern, behalten ihre Gültigkeit; dagegen wird angenommen, dass man die Gleichungen, welche die Anfangsimpulscoordinaten ausdrücken, nicht nöthig hat.

Wählt man zu solchen Constanten die thatsächlichen Coordinaten zu irgend einer Zeit $t = t_0$, so lässt sich eine weitere Gleichung von ähnlicher Form wie (I) bilden, in welcher $\beta_1$, $\beta_2$, etc. an der Stelle von $q_1$, $q_2$, etc. und $t_0$ statt $t$ steht. $V$ muss alsdann diesen beiden Gleichungen genügen.

Die Hamilton'sche Gleichung (I) lässt sich also, um das Vorige kurz zusammenzufassen, auf die folgende Art bilden: *Man stelle zuerst die Lagrange'sche Function $L = T + U$ auf und leite daraus ihre reciproke Function nach der in Bd. 1, § 410 gegebenen Regel ab. Setzt man sie einer Constanten $h$ gleich, so erhält man die Gleichung für die lebendige Kraft als Function der Impulscoordinaten. Schliesslich setzt man statt der Impulscoordinaten die Differentialquotienten von $V$ nach den entsprechenden Coordinaten ein.*

§ 469. Wenn die Gleichungen die Zeit explicite enthalten, so kommen in der lebendigen Kraft $T$ sowohl erste als zweite Potenzen der Geschwindigkeiten vor. Es sei also

$$2T = A_{11} q'^2 + 2A_{12} q_1' q_2' + \cdots + 2A_1 q_1' + 2A_2 q_2' + \cdots.$$

Die reciproke Function $T_2$ enthält dann sowohl erste als zweite Potenzen von $p_1$, $p_2$, etc. und lässt sich schreiben

$$T_2 = -\frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} 0 & p_1 - A_1 & p_2 - A_2 & \dots \\ p - A_1 & A_{11} & A_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

worin $\Delta$ der Minor des ersten Elementes der ersten Reihe in der vorstehenden Determinante ist. $H = T_2 - U$ nimmt daher, wenn es entwickelt wird, die Form an

$$H = \tfrac{1}{2} B_{11} p_1^2 + B_{12} p_1 p_2 + \dots + B_1 p_1 + B_2 p_2 + \dots - U.$$

Wir substituiren darauf $p_1 = \partial V / \partial q_1$ etc. und erhalten so die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} B_{11}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 + \dots + B_1 \frac{\partial V}{\partial q_1} + \dots = H + U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}.$$

Da die Zeit $t$ hier explicite auftritt, so nehmen wir an, statt ihrer sei ihr Werth $\partial V / \partial H$ eingesetzt worden. Wir erhalten so eine partielle Differentialgleichung, aus welcher sich $V$ als Function von $q_1$, $q_2$, etc. und $H$ ergibt. Hat man auf diese Art $V$ richtig gefunden, so bestimmen die Formeln in § 463 alle Integrale der dynamischen Gleichungen.

Beisp. Wenn der Ausdruck für $T$ die Gestalt hat

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + \dots = \Sigma T_n,$$

worin $T_m$ eine homogene Function von $q_1'$, $q_2'$, etc. vom $m^{\text{ten}}$ Grad ist, zu zeigen, dass die reciproke Function von $T$ die Form $\Sigma(n-1)\,T_n$ hat und selbstverständlich durch die Impulscoordinaten ausgedrückt werden muss. Man beachte, dass $T_1$ in der Formel nicht vorkommt.

§ 470. **Jacobi's Verwerthung einer vollständigen Lösung.** Wir haben auf diese Art im Allgemeinen eine partielle Differentialgleichung zur Ermittlung von $V$ oder $S$. Diese Gleichung lässt viele Formen der Lösung zu; Sir W. R. Hamilton gab aber keine Regel an, nach welcher man hätte bestimmen können, *welches Integral zu nehmen ist.* Diesem Mangel hat Jacobi durch den folgenden Satz abgeholfen:

*In dem System mögen $n$ Coordinaten vorkommen. Man nehme an, eine vollständige Lösung sei gefunden, welche $n-1$ Constanten (ausser $h$) und die Constanten enthält, die durch einfache Addition zur Function $V$ eingeführt werden können. Diese Constanten brauchen nicht die Anfangswerthe von $q_1$, $q_2$, etc. zu sein, sondern können durchaus beliebig sein. Wir wollen sie mit $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ bezeichnen, so dass also*

$$V = f(q_1, q_2, \dots, q_n, \ b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) + b_n \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

*ist. Die Integrale der dynamischen Gleichungen werden dann immer*

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} = -a_1, \text{ etc.}, \quad \frac{\partial f}{\partial b_{n-1}} = -a_{n-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial h} = t + \varepsilon \quad . \quad . \quad (2),$$

*worin $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ und $\varepsilon$ neue $n$ willkürliche Constante sind. Den ersten Integralen der Gleichungen kann man die Form geben*

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_1'}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial q_2'}, \quad \text{etc.} = \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Aus dem Jacobi'schen Satz geht hervor, *dass jede Lösung, wenn sie nur vollständig ist, die Integrale des dynamischen Problems liefert.* Man hat auch eine hinreichend grosse Anzahl von Constanten, nämlich $b_1, \ldots, b_{n-1}, h, \varepsilon$ und $a_1, \ldots, a_{n-1}$, um allen Anfangsbedingungen genügen zu können.

Ein Integral einer partiellen Differentialgleichung hat Lagrange „vollständig" genannt, wenn es soviele willkürliche Constanten enthält, als unabhängige Variabele vorhanden sind. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Constanten derart in dem Integral auftreten, dass sie sich durch kein algebraisches Verfahren auf eine geringere Zahl reduciren lassen. Wenn z. B. zwei Constanten in der Combination $b_1 + b_2$ auftreten, so sind sie im Ganzen nur als eine zu rechnen.

§ 471. Um den Beweis zu führen, muss man zeigen, dass, wenn die in (1) gegebene Form von $V$ *identisch* die Gleichung

$$H = \frac{1}{2} B_{11} p_1^2 + B_{12} p_1 p_2 + \cdots - U = h \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)},$$

in welcher $p$ für $\partial V/\partial q$ steht, erfüllt, die Beziehungen (2) identisch den beiden typischen Hamilton'schen Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p} = q', \quad -\frac{\partial H}{\partial q} = p' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

genügen. Daraus folgt dann unmittelbar, weil $H$ und $T + U$ für jedes $p$ und $q'$ reciproke Functionen sind, dass die Beziehungen (2) auch

$$p = \frac{\partial T}{\partial q'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

machen.

Da (I) identisch erfüllt ist, so kann man es partiell nach jeder der $n$ Constanten $b_1, \ldots, b_{n-1}$ und $h$ differenziren. Man erhält so, nachdem man aus (1) substituirt hat, $n - 1$ Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial b} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial b} + \cdots = 0$$

und eine $n^{\text{te}}$ Gleichung, die sich aus der vorstehenden ergibt, wenn man $h$ statt $b$ und die Einheit statt der Null auf der rechten Seite setzt. Wir werden diese $n$ Gleichungen zur Ermittlung von $\partial H/\partial p_1$, $\partial H/\partial p_2$, etc. benutzen.

Differenzirt man dagegen die Jacobi'schen Integrale (2) nach $t$, so bekommt man $n - 1$ Gleichungen von der Form

$$\frac{dq_1}{dt} \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial q_1} + \frac{dq_2}{dt} \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial q_2} + \cdots = 0$$

und eine $n^{\text{te}}$ Gleichung, die sich aus dieser ergibt, wenn man $h$ statt $b$ und die Einheit auf der rechten Seite setzt. Diese $n$ Gleichungen werden wir zur Ermittlung von $dq_1/dt$, $dq_2/dt$, etc. benutzen.

Vergleicht man die beiden Gruppen von Gleichungen miteinander, so erkennt man, dass sie identisch werden, wenn man für das typische $p$ seinen aus $p = \partial f/\partial q$ folgenden Werth einsetzt. Mithin ist

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{dq_1}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{dq_2}{dt}, \text{ etc.}$$

Differenzirt man dann ferner die identische Gleichung (I) nacheinander nach jeder der Coordinaten $q_1 \dots q_n$, so erhält man nach Substitution aus (1) die typische Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q} + \cdots = 0,$$

mithin

$$-\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{dq_1}{dt}\frac{\partial^2 f}{\partial q_1 \partial q} + \frac{dq_2}{dt}\frac{\partial^2 f}{\partial q_2 \partial q} + \cdots.$$

Es ist aber $p = \partial f/\partial q$, die rechte Seite also dasselbe wie $dp/dt$; wir haben daher

$$-\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{dp_1}{dt}, \quad -\frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{dp_2}{dt}, \text{ etc.}$$

§ 472. Wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit explicite enthalten, so ändert sich die Fassung des Satzes nur wenig. Da die partielle Gleichung, wie in § 469 erklärt wurde, jetzt $n+1$ Variabele hat, nämlich $q_1 \dots q_n$ und $H$, so hat das vollständige Integral $n+1$ Constanten und kann in der Form

$$V = f(q_1 \dots q_n,\ H,\ b_1 \dots b_n) + b_{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

geschrieben werden. Die $n$ Integrale der dynamischen Gleichungen sind dann

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} = -a_1, \quad \text{etc.}, \quad \frac{\partial f}{\partial b_n} = -a_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin $a_1 \dots n_n$ neue $n$ willkürliche Constanten sind. Diese Integrale enthalten $q_1 \dots q_n$ und $H$, welches letztere übrigens eliminirt, und statt dessen $t$ mit Hülfe der Gleichung $\partial V/\partial H = t$ eingeführt werden kann. Die $n$ ersten Integrale sind

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_1'}, \text{ etc.}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_n} = \frac{\partial T}{\partial q_n'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3);$$

$H$ kann wie zuvor eliminirt werden.

Wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten, so tritt in der partiellen Differentialgleichung (III) des § 469 wohl $H$, aber nicht $\partial V/\partial H$ auf, welches letztere lediglich deshalb eingeführt wurde, um $t$ eliminiren zu können. Das vollständige Integral hat daher $n$ Constanten statt $n+1$. Wir schreiben nun $h$ statt $H$ und nach § 464 ist $\partial V/\partial h = t - t_0$. Setzt man $e$ für $-t_0$, so sieht man, dass die Stelle der fehlenden Constanten in (2), nämlich $a_n$, durch die Constante $e$ ausgefüllt wird.

§ 473. **Geometrische Bemerkungen.** Um die Sache zu vereinfachen, wollen wir annehmen, das dynamische System hänge nur von zwei Coordinaten $q_1$, $q_2$ ab. Die Hamilton'sche Gleichung (I) ist dann

$$\frac{1}{2}B_{11}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 + B_{12}\frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{\partial V}{\partial q_2} + \frac{1}{2}B_{22}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2 = U + h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Wir setzen voraus, es sei ein vollständiges Integral ermittelt worden, nämlich

$$V = f(q_1,\ q_2,\ b_1) + b_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Sieht man $q_1$, $q_2$ und $V$ als die Cartesischen Coordinaten eines Punktes $P$ an, so ist dies die Gleichung eines doppelten Systems oder einer Familie von Flächen. Wir wollen irgend eine beliebige Familie so auswählen, dass nun die

Constanten $b_1$, $b_2$ durch eine Gleichung $b_2 = \psi(b_1)$ verbunden sind. Die Charakteristiken der gewählten Schar sind durch

$$\left.\begin{aligned} V &= f(q_1, q_2, b_1) + \psi(b_1) \\ 0 &= \partial f/\partial b_1 + \partial\psi/\partial b_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

gegeben, worin $b_1$ als Constante betrachtet wird.

Die allgemeine Lösung erhält man durch Elimination von $b_1$ aus den beiden Gleichungen (3). Hier ist $b_1$ in der ersten Gleichung als Function von $q_1$, $q_2$ anzusehen, die durch die zweite Gleichung bestimmt wird. Man folgt damit selbstverständlich lediglich der Lagrange'schen Regel zur Ermittlung der allgemeinen Lösung, wenn irgend eine vollständige Lösung gegeben ist.

Ebenso findet man, dass die Lagrange'sche singuläre Lösung im Unendlichen liegt.

Daraus ergibt sich, dass alle Charakteristiken aller Scharen von Flächen, die in der vollständigen Lösung (1) enthalten sind, dazu benutzt werden, die allgemeine Lösung aufzubauen. Wir wählen irgend eine beliebige Gruppe von Charakteristiken derart, dass ihre Gesammtheit eine Fläche bildet. Diese Fläche ist ein specieller Fall der allgemeinen Lösung.

§ 474. Jacobi's Theorem zufolge wird die Bahn des dynamischen Systems durch $\partial f/\partial b_1 = -a_1$ definirt. Dies heisst aber mit Rücksicht auf die zweite der Gleichungen (3), dass $\partial\psi/\partial b_1$ und mithin $b_1$ constant ist. Daraus folgt, *dass die möglichen Bahnen des dynamischen Systems die Charakteristiken der Scharen sind, welche man aus der vollständigen Lösung auswählen kann.*

§ 475. Da die Lagrange'sche Methode zur Ermittlung der allgemeinen Lösung eine Lösung für jede beliebige Form von $\psi(b_1)$ liefert, so kann man dieses Verfahren benutzen, um andere vollständige Lösungen zu erhalten. Setzt man $\varphi(m, b_1) + n$ anstatt $\psi(b_1)$ und eliminirt $b_1$, so kommt man zu einer Lösung, die zwei Constanten enthält, nämlich $m$ und $n$, und daher eine vollständige Lösung ist. Darin ist $\varphi$ eine durchaus beliebige Function und $b_1$ als Function von $q_1$, $q_2$ anzusehen, die durch die zweite der Gl. (3) bestimmt wird.

Die aus diesem neuen vollständigen Integral mittelst der Jacobi'schen Methode abgeleiteten Bahnen sind durch

$$(\partial f/\partial b_1 + \partial\psi/\partial b_1)\,\partial b_1/\partial m + \partial\psi/\partial m = -a_1$$

gegeben.

Nach der zweiten der Gl. (3) ist der in der Klammer stehende Ausdruck Null. Die Bahn wird daher dadurch bestimmt, dass man eine Function von $b_1$ und $m$ einer Constanten gleich setzt. Die Bahnen sind mithin durch $b_1 = \text{const.}$ definirt. Daraus ergibt sich, *dass die beiden vollständigen Lösungen zu demselben dynamischen Problem gehören.*

§ 476. **Regeln für die Bestimmung der Lösungen der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung.** Beisp. 1. Wenn die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} B_{11} \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 + B_{12} \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{\partial V}{\partial q_2} + \text{etc.} = U + h$$

derart ist, dass alle Coefficienten auf der linken Seite ebenso wie $U$ Functionen einer einzigen Coordinate, sagen wir, von $q_1$ sind, so findet man eine vollständige Lösung, wenn man $V = W + b_2 q_2 + b_3 q_3 + \text{etc.}$ setzt, worin $W$ eine Function von $q_1$ allein ist. Substituirt man diesen Ausdruck in die Hamilton'sche Gleichung, so erhält man eine Differentialgleichung mit nur einer unabhängigen Variabelen, nämlich $q_1$. Ihre Lösung kann auf die gewöhnliche Art durch Trennung der Variabelen

bewirkt werden. So ergibt sich leicht durch Auflösung einer quadratischen Gleichung, dass $\partial V/\partial q_1$ eine bekannte Function von $q_1$ und $b_1$ ist. Integrirt man, so erhält man einen Werth von $V$ mit einer weiteren Constanten. Diese Lösung ist mithin vollständig.

Beisp. 2. Wenn die Coordinaten so gewählt werden können, dass die lebendige Kraft und die Kräftefunction die Gestalt annehmen

$$2T = f_1(q_1)\,q_1'^2 + f_2(q_2)\,q_2'^2 + \text{etc.}, \quad U = F_1(q_1) + F_2(q_2) + \text{etc.},$$

so wird die Hamilton'sche Gleichung

$$\frac{1}{f_1(q_1)}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{f_2(q_2)}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2 + \text{etc.} = 2F_1(q_1) + 2F_2(q_2) + \text{etc.} + 2h.$$

Man beweise, dass ein vollständiges Integral durch

$$V = C + \int\{(2F_1(q_1) + b_1)f_1(q_1)\}^{\frac{1}{2}}\,dq_1 + \int\{(2F_2(q_2) + b_2)f_2(q_2)\}^{\frac{1}{2}}\,dq_2 + \text{etc.}$$

gegeben ist, worin die Summe der im Uebrigen willkürlichen $b_1$, $b_2$, etc. gleich $h$ ist. Davon, dass die Gleichung richtig ist, kann man sich einfach durch Substitution überzeugen.

Beisp. 3. Wenn die lebendige Kraft und Kräftefunction die Form

$$2T = A_1 q_1'^2 + A_2 q_2'^2 + \text{etc.}, \quad U = \frac{F_1(q_1)}{A_1} + \frac{F_2(q_2)}{A_2} + \text{etc.}$$

haben, so lässt sich die Hamilton'sche Gleichung manchmal in der Gestalt einer Determinante

$$\begin{vmatrix} p_1^2, & p_2^2, & p_3^2 \\ \varphi_2(q_1), & \psi_2(q_2), & \chi_2(q_3) \\ \varphi_3(q_1), & \psi_3(q_2), & \chi_3(q_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1(q_1), & F_2(q_2), & F_3(q_3) \\ \varphi_2(q_1), & \psi_2(q_2), & \chi_2(q_3) \\ \varphi_3(q_1), & \psi_3(q_2), & \chi_3(q_3) \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} \varphi_1(q_1), & \psi_1(q_2), & \chi_1(q_3) \\ \varphi_2(q_1), & \psi_2(q_2), & \chi_2(q_3) \\ \varphi_3(q_1), & \psi_3(q_2), & \chi_3(q_3) \end{vmatrix}$$

schreiben, worin $p_1 = \partial V/\partial q_1$, $p_2 = \partial V/\partial q_2$ etc. und die $\varphi$ nur Functionen von $q_1$, die $\psi$ nur von $q_2$ u. s. w. sind. Es sind drei Coordinaten angenommen worden, lediglich um Raum zu sparen. Man beweise, dass eine vollständige Lösung durch

$$V = C + \int\{F_1(q_1) + h\varphi_1(q_1) + b_2\varphi_2(q_1) + f_3\varphi_3(q_1)\}^{\frac{1}{2}}\,dq_1 +$$
$$+ \int\{F_2 + h\varphi_2 + b_2\psi_2 + b_3\psi_3\}^{\frac{1}{2}}\,dq_2 + \text{etc.}$$

gegeben ist. Zu diesem Zweck vereinige man die zweite und dritte Determinante in eine einzige, multiplicire dann die zweite und dritte Horizontalreihe mit den willkürlichen Constanten $b_2$, $b_3$ und addire die Producte zu der ersten. Der Gleichung wird dadurch genügt, dass man die Glieder in der ersten Horizontalreihe der Determinanten auf jeder Seite der Gleichung einzeln einander gleich setzt.

Um die Hamilton'sche Gleichung in die Form einer Determinante zu bringen, beachte man, dass $1/A_1$, $1/A_2$, etc. den Minoren der Elemente in der ersten Horizontalreihe proportional sind; die Verhältnisse der sechs Functionen in den beiden ersten Determinanten müssen mithin den beiden Gleichungen

$$\frac{\varphi_2}{A_1} + \frac{\psi_2}{A_2} + \frac{\chi_2}{A_3} = 0, \quad \frac{\varphi_3}{A_1} + \frac{\psi_3}{A_2} + \frac{\chi_3}{A_3} = 0$$

genügen, während $\varphi_1$, $\psi_1$, $\chi_1$ in der letzten Determinante so gewählt werden, dass sie zu den ersten sechs passen. Man kann übrigens im Allgemeinen die $\varphi$, $\psi$, etc.

nicht auf Functionen von $q_1$, $q_2$, etc. allein einschränken. Siehe Liouville in seinem Journal Bd. 14, 1849. Auch das nächste Beispiel hat Liouville in demselben Band besprochen.

Beisp. 4. Man beweise, dass die Hamilton'sche Gleichung der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes, auf elliptische Coordinaten $\lambda$, $\mu$, $\nu$ bezogen, sich in die Form einer Determinante, wie in Beisp. 3, bringen lässt, wenn die Kräftefunction $U$ die Gestalt

$$KU = F_1(\lambda)(\mu^2 - \nu^2) + F_2(\mu)(\nu^2 - \lambda^2) + F_3(\nu)(\lambda^2 - \mu^2)$$

hat, worin

$$-K = (\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)(\nu^2 - \lambda^2)$$

ist.

Zu diesem Zweck nehme man den Ausdruck für die lebendige Kraft $T$ in Bd. 1, § 365 zu Hülfe. Beachtet man, dass die Producte von $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$ nicht vorhanden sind, so ergibt sich

$$2T = K\left\{\frac{\lambda'^2}{\mu^2-\nu^2}\frac{1}{L} + \frac{\mu'^2}{\nu^2-\lambda^2}\frac{1}{M} + \frac{\nu'^2}{\lambda^2-\mu^2}\frac{1}{N}\right\}, \quad U = \frac{1}{K}\{F_1(\lambda)(\mu^2-\nu^2) + \text{etc.}\},$$

worin $L = (\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2)$ ist und ähnliche Ausdrücke für $M$ und $N$ bestehen, also $L$, $M$, $N$ Functionen von $\lambda$, $\mu$ bez. $\nu$ sind. Die Hamilton'sche Gleichung ist dann

$$L\frac{\mu^2-\nu^2}{K}\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)^2 + \text{etc.} + \text{etc.} = 2F_1(\lambda)\frac{\mu^2-\nu^2}{K} + \text{etc.} + \text{etc.} + 2h,$$

welche offenbar in die Form der Determinante

$$\begin{vmatrix} L\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)^2, & M\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)^2, & N\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^2 \\ \lambda^2, & \mu^2, & \nu^2 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} F_1(\lambda), & F_2(\mu), & F_3(\nu) \\ \lambda^2, & \mu^2, & \nu^2 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} + 2h\begin{vmatrix} \lambda^4, & \mu^4, & \nu^4 \\ \lambda^2, & \mu^2, & \nu^2 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

gebracht werden kann.

Der Gleichung wird, wie man leicht findet, durch

$$L\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)^2 = 2F_1(\lambda) + 2h\lambda^4 + b_1\lambda^2 + b^2$$

$$M\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)^2 = 2F_2(\mu) + 2h\mu^4 + b_1\mu^2 + b^2$$

etc.

genügt. Bezeichnet man der Kürze wegen die rechten Seiten dieser Gleichungen mit $LR_1^2$, $MR_2^2$, $NR_3^2$, so ist

$$V = C + \int R_1\, d\lambda + \int R_2\, d\mu + \int R_3\, d\nu$$

eine vollständige Lösung.

§ 477. **Beispiele.** Beisp. 1. Man zeige, dass die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung für $V$ in dem in Beisp. 1, § 467 gegebenen Problem

$$\tfrac{5}{14}(\partial V/\partial q)^2 - gq = h$$

ist. Man integrire sie und leite daraus die Bewegung ab.

Beisp. 2. Wir wollen nun zunächst den complicirteren Fall betrachten, in welchem zwei Coordinaten vorkommen. Das einfachste Beispiel ist die Bewegung eines Projectils unter dem Einfluss der Schwere.

Sind $x$, $y$ seine Coordinaten, so kann man die Gleichung der lebendigen Kraft $\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = -gy + h$ schreiben. Nach der Regel in § 468 lautet die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2}(\partial V/\partial x)^2 + \tfrac{1}{2}(\partial V/\partial y)^2 = -gy + h.$$

Bei ihrer Integration beachte man, dass alle Coefficienten auf der linken Seite constant sind und dass $U$ nur eine Function von $y$ ist. Nach § 476 nehmen wir daher $V = W + bx$ an. Durch Substitution und Integration erhält man $W$ und so schliesslich

$$V = bx - \frac{1}{3g}(2h - b^2 - 2gy)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Der Jacobi'schen Regel zufolge ist die Bewegung durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \partial V/\partial b &= x + \frac{b}{g}(2h - b^2 - 2gy)^{\frac{1}{2}} = -a_1 \\ \partial V/\partial h &= -\frac{1}{g}(2h - b^2 - 2gy)^{\frac{1}{2}} = t + \varepsilon \end{aligned}\right\}$$

definirt. Sie lassen sich leicht auf die gewöhnlichen Formeln für die Bewegung eines Geschosses reduciren.

Beisp. 3. Ein Massenpunkt beschreibt eine Bahn um das Centrum einer Kraft, die nach dem Newton'schen Gesetz anzieht. Wenn $r$, $\theta$ seine Polarcoordinaten in Bezug auf das Kraftcentrum als Coordinatenanfang sind, zu zeigen, dass die Hamilton'sche Gleichung

$$(\partial V/\partial r)^2 + (\partial V/r\partial\theta)^2 = 2\mu/r + 2h$$

lautet.

Man zeige auch, dass sich ein vollständiges Integral, wie in dem letzten Beispiel, dadurch ermitteln lässt, dass man $V = W + b\theta$ setzt.

## Variation der Constanten.

§ 478. **Das Lagrange'sche Theorem.** Die Coordinaten eines Systems seien $q_1, q_2, \ldots, q_n$ und die entsprechenden Impulscoordinaten $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Wenn die Hamilton'sche Function

$$H = f(q_1 \ldots q_n,\ p_1 \ldots p_n,\ t) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

ist, so kann man den Bewegungsgleichungen die kanonische Form

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial q},\quad q' = \frac{\partial H}{\partial p} \text{ (cf. Bd. 1, § 414)} \quad \ldots \quad (2)$$

geben, worin die Accente Differentiationen nach der Zeit bezeichnen.

Diesen Buchstaben mögen zwei unabhängige Variationen gegeben werden, die wir durch die Symbole $\delta$ und $\varDelta$ darstellen wollen. Man kann sich denken, sie würden dadurch hervorgebracht, dass man die Anfangsbedingungen auf zwei verschiedene Arten variirt. Es ist dann

$$\delta H = \sum\left(\frac{\partial H}{\partial p}\delta p + \frac{\partial H}{\partial q}\delta q\right) = \Sigma\,(q'\delta p - p'\delta q) \quad \cdot \cdot \quad (3),$$

wobei die Zeit $t$ nicht variirt wird. Führt man die Operation $\Delta$ auf beiden Seiten der Gleichung aus, so erhält man

$$\Delta\delta H = \Sigma(\Delta q'\delta p - \Delta p'\delta q + q'\Delta\delta p - p'\Delta\delta q) \quad . \quad . \quad (4).$$

Dreht man dagegen die Reihenfolge der Operationen um, so ergibt sich

$$\delta\Delta H = \Sigma(\delta q'\Delta p - \delta p'\Delta q + q'\delta\Delta p - p'\delta\Delta q) \quad . \quad . \quad (5).$$

Zieht man ab und beachtet, dass $\delta\Delta = \Delta\delta$ ist, so wird

$$\Sigma(\Delta q'\delta p - \delta q'\Delta p - \Delta p'\delta q + \delta p'\Delta p) = 0.$$

Da die beiden Operationen $\Delta$ und $\delta$ von $d/dt$ unabhängig sind, so erhält man daraus

$$\frac{d}{dt}\Sigma(\Delta q\delta p - \Delta p\delta q) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Der totale Differentialquotient nach $t$ der über alle Coordinaten summirten Grösse ist also Null; diese Grösse ist daher constant.

Wir wollen annehmen, die Coordinaten $q_1$, etc. und ihre Impulscoordinaten $p_1$, etc. seien durch Integration der Bewegungsgleichungen gefunden worden und jede sei als Function von $t$ und den Integrationsconstanten z. B. $a$, $b$, $c$, etc. ausgedrückt. Diese Constanten mögen nun zwei unabhängige Variationen erhalten, die durch $\delta a$, $\Delta a$, etc. dargestellt werden und wobei die Zeit nicht variirt wird. Durch einfache Differentiation erhält man alsdann die entsprechenden Variationen $\delta q$, $\Delta q$, etc. als Functionen der Constanten $a$, etc. und ihrer Variationen und von $t$. *Das Theorem behauptet, dass bei ihrer Substitution in den Ausdruck*

$$\Sigma(\Delta q\delta p - \Delta p\delta q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

*die Zeit $t$ aus dem Resultat verschwindet, das Resultat also nur eine Function der Constanten und ihrer Variationen ist.*

$t_0$ sei irgend eine andre Zeit als $t$ und $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\beta_1 \ldots \beta_n$ die Werthe von $p_1$, etc., $q_1$, etc. zu dieser Zeit. So kann man z. B. mit $t_0$ die Zeit der Anfangsbewegung bezeichnen und mit $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\beta_1 \ldots \beta_n$ die Anfangswerthe der Variablen $p_1$, etc., $q_1$, etc. Man hat dann

$$\Sigma(\Delta q\delta p - \Delta p\delta q) = \Sigma(\Delta\beta\delta\alpha - \Delta\alpha\delta\beta) \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Lagrange leitet das Theorem aus seinen eignen allgemeinen Bewegungsgleichungen ab; siehe S. 304, Bd. 1 seiner *Mécanique Analytique*. Der eben gegebene Beweis rührt von Boole her; siehe das *Cambridge Mathematical Journal*, Bd. 11, S. 100.

§ 479. **Verallgemeinerung des Lagrange'schen Theorems.** In dem Lagrange-schen Theorem sind die Grössen $q$, $q + \Delta q$, $q + \delta q$ *gleichseitige* Werthe der Coordinate $q$. Manchmal empfiehlt es sich aber, auch die Zeit variiren zu lassen, grade wie wir in der Variationsrechnung der Abscisse sowohl wie der Ordinate eine Variation ertheilen. Es mögen also $q$, $q + \Delta q$, $q + \delta q$ die Werthe irgend einer

Coordinate bei den ungestörten und variirten Bewegungen zu den Zeiten $t$, $t+\Delta t$ bez. $t+\delta t$ darstellen, wo $\Delta t$ und $\delta t$ willkürliche kleine Functionen der Zeit sind. Bei einer solchen Annahme muss das Lagrange'sche Theorem so abgeändert werden, dass $\Delta q - q'\Delta t$ und $\delta q - q'\delta t$ etc. an die Stelle von $\Delta q$ und $\delta q$ etc. kommt; siehe § 445. Ebenso schreiben wir $\Delta\alpha - \alpha'\Delta t_0$ etc. statt $\Delta\alpha$ etc., wenn $\Delta t_0$ und $\delta t_0$ die willkürlichen Aenderungen zur Anfangszeit sind.

$H_0$ stelle ferner dieselbe Function von $t_0$, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\beta_1 \ldots \beta_n$ vor, welche $H$ von $t$, $p_1 \ldots p_n$, $q_1 \ldots q_n$ ist. Substituirt man dann in (8) und beachtet, dass

$$\Delta H = \Sigma(q'\Delta p - p'\Delta q) + H'\Delta t \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

ist, und ähnliche Ausdrücke für $\delta H$, $\Delta H_0$, $\delta H_0$ gelten, so wird

$$\Sigma(\Delta q\delta p - \Delta p\delta q) + \Delta H\delta t - \Delta t\delta H = \Sigma(\Delta\beta\delta\alpha - \Delta\alpha\delta\beta) + \Delta H_0\delta t_0 - \Delta t_0\delta H_0 \quad (10).$$

Wenn die Bedingungen die Zeit nicht explicite enthalten, so ist $H$ keine Function von $t$ und mithin $H = H_0 = h$. Die Gleichung (10) wird dann

$$\Sigma(\Delta q\delta p - \Delta p\delta q) + \Delta h\delta(t-t_0) - \Delta(t-t_0)\delta h = \Sigma(\Delta\beta\delta\alpha - \Delta\alpha\delta\beta) \quad (11).$$

§ 480. Als Beispiel zu diesem Theorem stelle das Symbol $\Delta$ einfach $d/dt$ dar. Alsdann ist $\Delta q$ der Unterschied der Werthe der Coordinate $q$ bei der ungestörten Bewegung zu den Zeiten $t$ und $\Delta t$, ohne dass eine Aenderung der Anfangsbedingungen vorgenommen wird. Daraus folgt $\Delta\alpha = 0$, $\Delta\beta = 0$, $\Delta t_0 = 0$, $\Delta H_0 = 0$. Dividirt man Gleichung (10) durch $\Delta t$, so erhält man also

$$\delta H = \Sigma(q'\delta p - p'\delta q) + H'\delta t,$$

eine symbolische Darstellung der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen.

Ebenso kann man $\Delta$ Differentiationen nach einem andern Buchstaben darstellen lassen. $H$ z. B. kann als unabhängige Variabele angesehen und $p_1$, etc., $q_1$, etc. und $t$ durch $H$ und die Integrationsconstanten ausgedrückt werden. Stellt $\Delta$ dann $d/dH$ dar und werden die Constanten nicht variirt, so erhält man die Hamilton'schen Gleichungen mit $H$ an Stelle von $t$, $p$ von $q$ und umgekehrt.

§ 481. Beisp. 1. Unter der Annahme $H = \frac{1}{2}p^2 - qt$, $H_0 = \frac{1}{2}\alpha^2 - \beta t_0$ integrire man die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen und drücke $p, q, H$ durch $t$ und die Anfangswerthe von $p$ und $q$ aus. Daraus leite man durch Substitution sowohl das Lagrange'sche Variationstheorem als seine Verallgemeinerung ab.

Beisp. 2. $q_1, q_2, \ldots, q_n$ seien die Coordinaten eines dynamischen Systems und $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die entsprechenden Impulscoordinaten. Paarweise zusammengenommen seien $(p_1 q_1)$, $(p_2 q_2)$, ... die Cartesischen rechtwinkligen Coordinaten von $n$ sich bewegenden Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$, deren Lage in einer Ebene zur Zeit $t$ mithin die Lage des Systems bestimmt. Wenn den Anfangswerthen der $p$ und $q$ irgend zwei kleine willkürliche Aenderungen gegeben werden, so mögen diese Punkte zu derselben Zeit $t$ die Lagen $Q_1, Q_2, \ldots, R_1, R_2, \ldots$ einnehmen. Man beweise, dass die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $P_1 Q_1 R_1$, $P_2 Q_2 R_2$, etc. für die ganze Bewegung constant ist.

Man beweise auch, wenn die Hamilton'sche Function $H$ als Function der Cartesischen oder Polarcoordinaten der Punkte $P_1, P_2, \ldots$ ausgedrückt wird, dass $H$ wie die Stromfunction in der Hydrodynamik wirkt, d. h. dass ihre partiellen Differentialquotienten nach den Coordinaten, mit den richtigen Vorzeichen versehen, die Componenten der Geschwindigkeiten der Punkte $P_1, P_2$, etc. in senkrechter Richtung liefern.

Beisp. 3. *Brassinne's Verallgemeinerung der Lagrange'schen Variationsformel.* Wenn man annimmt, die Lagrange'sche Function $L$ sei eine Function der

typischen Variabelen $q$, $q'$, $q''$, und die Differentialgleichungen der Bewegung hätten die Form

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial q''} = 0,$$

zu zeigen, dass, wenn die Zeit nicht variirt wird, die Lagrange'sche Variationsformel die Gestalt $(\Delta q \delta p - \Delta p \delta q) + (\Delta q' \delta r - \Delta r \delta q') + (\Delta r' \delta q - \Delta q \delta r')$ = Constante annimmt, worin $p = \partial L/\partial q'$, $r = \partial L/\partial q''$ ist. Liouville's Journal, Bd. 16, 1851.

Brassinne leitet das Resultat aus den Lagrange'schen Gleichungen ab, es ergibt sich aber leichter aus den entsprechenden Hamilton'schen Formen. Folgt man der Boole'schen Methode, § 478, so erhält man es durch Gleichsetzung von $\delta \Delta H$ und $\Delta \delta H$.

§ 482. **Normale Transformationen.** Wir haben angenommen, die Constanten $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\beta_1 \ldots \beta_n$ seien die Werthe der Variablen $p_1 \ldots p_n$, $q_1 \ldots q_n$ zu irgend einer Zeit $t = t_0$. Diese Einschränkung ist jedoch nicht nöthig. Die $2n$ unabhängigen Integrale der Bewegungsgleichungen seien

$$f_1(p_1 \ldots p_n, q_1 \ldots q_n, t) = f_1(\alpha_1 \ldots \alpha_n, \beta_1 \ldots \beta_n, t),\ f_2(\text{etc.}) = f_2(\text{etc.}),\ \text{etc.} = \text{etc.} \quad (A).$$

Offenbar können wir sie auf beliebige Art so miteinander combiniren, dass wir zu $2n$ anderen unabhängigen Gleichungen kommen, die gleichermassen als Integrale dienen können. Schreibt man z. B.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(\alpha_1 \ldots \alpha_n, \beta_1 \ldots \beta_n) &= a_1, \quad \varphi_2(\text{etc.}) = a_2, \text{ etc.} \\ \psi_1(\alpha_1 \ldots \alpha_n, \beta_1 \ldots \beta_n) &= b_1, \quad \psi_2(\text{etc.}) = b_2, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad (B),$$

worin $a_1$, etc., $b_1$, etc. neue $2n$ Constanten sind, so erhält man die neuen Formen der Integrale durch Elimination von $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\beta_1 \ldots \beta_n$ aus (A) und (B). Die resultirenden Formen enthalten zwar $t_0$, es lässt sich aber, wenn es gewünscht wird, ebenfalls entweder dadurch eliminiren, dass man ihm einen bestimmten Werth gibt oder indem man es auf geeignete Art in die Functionen $\varphi_1$, etc., $\psi_1$, etc. einführt. Die erstere Art ist einfacher.

Die einzige Einschränkung, der wir die willkürlichen Functionen $\varphi_1$, etc. für unsern gegenwärtigen Zweck unterwerfen müssen, besteht darin, dass die Variationen der beiden Gruppen von Constanten der Lagrange'schen Variationsformel, nämlich

$$\Sigma(\Delta b \delta a - \Delta a \delta b) = \Sigma(\Delta \beta \delta \alpha - \Delta \alpha \delta \beta) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (12)$$

genügen müssen.

Nimmt man an, dies sei der Fall, und ist $H_0$ durch die neuen Constanten und $t_0$ ausgedrückt, so nimmt die verallgemeinerte Lagrange'sche Variationsformel die Gestalt an

$$\begin{aligned} \Sigma(\Delta q \delta p - \Delta p \delta q + \Delta H \delta t - \Delta t \delta H - \Sigma(\Delta b \delta a - \Delta a \delta b) - \\ - \Delta H_0 \delta t_0 + \Delta t_0 \delta H_0 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (13), \end{aligned}$$

worin die Buchstaben $a_1$, etc., $b_1$, etc. entweder die Werthe der Elemente zu einer willkürlichen Zeit $t_0$ oder Constanten sind, die durch eine normale Transformation aus ihnen abgeleitet werden; dabei werden die Glieder, welche $\delta t_0$ und $\delta H_0$ enthalten, weggelassen, wenn die willkürliche Zeit $t_0$ nicht variirt wird.

Es gibt viele Arten, auf welche man die Beziehungen zwischen den beiden Gruppen von Constanten so wählen kann, dass die Variationsformel (12) ihre Gültigkeit behält. Wir werden gleich beweisen, dass, wenn $K$ eine willkürliche Function der Grössen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\beta_1 \ldots \beta_n$ ist, z. B. die Gleichung (12) erfüllt wird, falls die beiden Gruppen in solcher Beziehung zu einander stehen, dass jedes $b = \partial K/\partial a$ und jedes $\alpha = \partial K/\partial \beta$ ist.

*Donkin, Phil. Trans., 1855 hat die Transformation normal genannt, wenn Grössen* $(\alpha_1 \ldots)$, $(\beta_1 \ldots)$ *mittelst solcher Beziehungen in andre* $(a_1 \ldots)$, $(b_1 \ldots)$ *verwandelt werden, dass jedes* $b = \partial K / \partial a$ *und jedes* $\alpha = \partial K / \partial \beta$ *ist. Wir wollen jedoch die Bedeutung dieses Ausdrucks derart erweitern, dass wir alle Transformationen, welche der Gleichung* (12) *genügen, einschliessen.*

§ 483. **Conjugirte Elemente.** Wir bemerken, dass die Elemente oder Buchstaben in den Gleichungen (10) oder (13) paarweise auftreten, so dass man sie bei der Anwendung des Theorems der Bequemlichkeit halber in zwei Reihen auf folgende Art schreiben kann

$$\begin{matrix} q_1, q_2, \ldots q_n, & H_0, & b_1, & b_2, \ldots & b_n, H, \\ p_1, p_2, \ldots p_n, & -t_0, & -a_1, & -a_2, \ldots & -a_n, t, \end{matrix}$$

worin eine oder zwei Verticalreihen, welche $H$, $t$; $H_0$, $t_0$ enthalten, weggelassen werden, wenn man $t$ oder $t_0$ nicht variiren will. Die hier in einer Verticalreihe stehenden Buchstaben oder Elemente werden in der Regel *conjugirt* genannt. Sind $x$, $y$ irgend zwei conjugirte Elemente, so kann man die Gleichung (13) kurz schreiben

$$\Sigma(\Delta x \delta y - \Delta y \delta x) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Wir bemerken ferner, *dass das Lagrange'sche Theorem auch bei Vertauschung zweier conjugirter Elemente seine Gültigkeit behält, vorausgesetzt dass man eines der Vorzeichen ändert.* Man kann z. B. die Buchstaben auch so anordnen

$$\begin{matrix} q_1, \ldots q_n, & H_0, & a_1, \ldots a_n, H, \\ p_1, \ldots p_n, & -t_0, & b_1, \ldots b_n, t. \end{matrix}$$

Es ist klar, dass die Wirkung der Aenderung in der Anordnung von $(a, b)$ genau durch die Aenderung des Vorzeichens aufgehoben wird.

§ 484. **Zwei Ausdruckweisen für die Lösungen.** Nimmt man an, $H$ sei eine gegebene Function von $p_1$ etc., $q_1$ etc. und $t$, so kann man die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen bilden; sie mögen integrirt und die Integrationsconstanten entweder durch die Anfangselemente zur Zeit $t_0$ oder ihre durch $a_1$ etc., $b_1$ etc dargestellten Werthe ansgedrückt sein. Wir erhalten so $2n$ Gleichungen, welche die Variabelen $p_1$ etc., $q_1$ etc. mit den $2n$ constanten Elementen und den beiden Zeiten $t$ und $t_0$ verbinden. Wenn es nöthig ist, können wir zu ihnen die beiden Gleichungen hinzufügen, welche $H$ und $H_0$ mit denselben Buchstaben verbinden. Diese $2n + 2$ Gleichungen kann man auf die verschiedenste Art miteinander combiniren und mit gewissen Ausnahmen beliebige $2n + 2$ Buchstaben durch die übrigen $2n + 2$ ausdrücken, wobei die letzteren die unabhängigen Variabelen sind. Zwei Combinationen werden allgemein benutzt, obwohl man sich auch noch andere denken kann.

(1) Sind die Elemente in zwei Zeilen geordnet und stehen ihre conjugirten Elemente in derselben Columne, wie in § 483, so lassen sich die Elemente in jeder Zeile als Functionen derjenigen in der anderen betrachten.

(2) Lässt man die Verticalreihen, welche $H$, $t$ und $H_0$, $t_0$ enthalten, weg und ordnet die übrigen Verticalreihen so, dass die $p$ und die $q$ auf der einen Seite der verticalen Mittellinie und die $a$ und $b$ auf der anderen stehen, so lassen sich die Buchstaben auf jeder Seite der Mittellinie als Functionen derer auf der andern Seite und ausserdem von $t$ und $t_0$ ansehen.

§ 485. **Verschiedene Potentialfunctionen.** Wir wollen die Buchstaben in der Ordnung

$$q_1, \ldots q_n, \quad b_1, \ldots b_n, \quad t, \quad t_0,$$
$$p_1, \ldots p_n, \quad -a_1, \ldots -a_n, \quad -H, \quad H_0$$

schreiben und die Elemente in der oberen Zeile als die unabhängigen Variabelen ansehen. Die Operation $\Delta$ wollen wir so wählen, dass die Variation eines jeden Elementes in der oberen Zeile mit Ausnahme eines einzigen Null ist und dieses Eine sei $q_r$. Die Variationen der Elemente in der unteren Zeile in Folge von $\Delta$ sind nicht Null, sondern, wenn man irgend eines, z. B. $p$, nimmt, $\Delta p = \Delta q_r \cdot \partial p / \partial q_r$. Ebenso wollen wir die Operation $\delta$ so wählen, dass die Variation eines jeden Elementes in der oberen Zeile mit Ausnahme eines einzigen, z. B. $q_s$, Null wird, und alsdann, wie zuvor, $\delta p = \delta q_s \cdot \partial p / \partial q_s$ ist. Das durch Gleichung (14) ausgedrückte Theorem wird dann

$$\Delta q_r \delta p_r - \Delta p_s \delta q_s = 0.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\frac{\partial p_r}{\partial q_s} = \frac{\partial p_s}{\partial q_r}.$$

Durch Vertauschen conjugirter Elemente und Aenderung des Vorzeichens des einen Elementes erhält man eine Anzahl ähnlicher Gleichungen. In welche Ordnung man die Reihen aber auch auf diese Art bringen mag, jedenfalls sind, *wenn die Elemente in einer der Horizontalreihen zu unabhängigen Variabelen genommen werden, die Differentialquotienten irgend zweier abhängigen Elemente in Bezug auf das zu dem anderen conjugirte Element einander gleich.*

§ 486. Die Gleichung zwischen diesen Differentialquotienten drückt aus, dass

$$p_1 \partial q_1 + \cdots + p_n \partial q_n - a_1 \partial b_1 - \text{etc.} - H \partial t + H_0 \partial t_0$$

ein vollständiges Differential einer Function der Coordinaten $q_1 \cdots q_n$, $b_1 \cdots b_n$, $t$ und $t_0$ ist. Wenn $S$ diese Function bezeichnet, so bestehen die typischen Gleichungen

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad -a = \frac{\partial S}{\partial b}, \quad -H = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad H_0 = \frac{\partial S}{\partial t_0}.$$

Ebenso sieht man, wenn die conjugirten Elemente $(-H, t)$, $(H_0, t_0)$ miteinander vertauscht werden und die Aenderung der Vorzeichen richtig vorgenommen wird, dass

$$p_1 \partial q_1 + \text{etc.} - a_1 \partial b_1 - \text{etc.} + t \partial H - t_0 \partial H_0$$

ein vollständiges Differential einer Function der Coordinaten $q_1$ etc., $b_1$ etc., $H$ und $H_0$ ist. Bezeichnet man diese Function mit $V$, so erhält man

$$p = \frac{\partial V}{\partial q}, \quad -a = \frac{\partial V}{\partial b}, \quad t = \frac{\partial V}{\partial H}, \quad -t_0 = \frac{\partial V}{\partial H_0}.$$

Um den Sinn der hier $S$ und $V$ genannten Functionen zu erkennen, erinnern wir an die Bedeutung, die den Buchstaben $L$ und $H$ in § 442 beigelegt wurde. Setzt man $L$ für die Lagrange'sche Function und bedenkt, dass $H$ die zu ihr reciproke Function ist, Bd. 1, § 410, so hat man $L + H = \Sigma p q'$. Aus der Gleichung, welche das totale Differential von $S$ liefert, ergibt sich

$$dS/dt = \Sigma p q' - H = L.$$

Wenn die constanten Elemente die Anfangswerthe von $q_1$ etc., $p_1$ etc. sind, so

folgt ebenso $dS/dt_0 = -L_0$, wo $L_0$ den Anfangswerth von $L$ bedeutet. Wir haben also $S = \int L\,dt$, worin die Grenzen $t = t_0$ und $t = t$ sind.

Vergleicht man ferner die totalen Differentiale von $S$ und $V$, so ist offenbar

$$d(S - V) = -d(Ht) + d(H_0 t_0),$$

woraus sich $S = V - Ht + H_0 t_0$ ergibt. Man kommt so zu demselben Werth von $V$, wie in § 443.

§ 487. Offenbar kann man auch noch viele andre Functionen ausser $S$ und $V$ erhalten, die analoge Eigenschaften besitzen. Man hat nur zwei conjugirte Elemente miteinander zu vertauschen und das Vorzeichen des einen zu ändern, um sofort aus der neuen Anordnung eine neue Function zu bekommen. Die Beziehungen zwischen diesen Functionen lassen sich allgemeiner auf die folgende Art ausdrücken.

Zwei beliebige Gruppen von Variabelen mögen durch die beiden Reihen dargestellt werden

$$x_1, \quad x_2, \ldots x_n,$$
$$\xi_1, \quad \xi_2, \ldots \xi_n.$$

Zuerst möge jedes Element $\xi_r$ der unteren Reihe durch Differentiation einer Function $A_1$ der Elemente in der oberen Reihe nach dem zu $\xi_r$ conjugirten Element nämlich $x_r$ erhalten werden. Diese Reihe von Gleichungen lässt sich typisch $\xi = \frac{\partial A_1}{\partial x}$ schreiben.

Alsdann ist

$$\varDelta A_1 = \Sigma \xi \varDelta x;$$

daher

$$\delta \varDelta A_1 = \Sigma(\delta \xi \varDelta x + \xi \delta \varDelta x)$$

und ähnlich

$$\varDelta \delta A_1 = \Sigma(\varDelta \xi \delta x + \xi \varDelta \delta x).$$

Setzt man die Resultate, wie in § 478, einander gleich, so wird $\Sigma(\varDelta x \delta \xi - \varDelta \xi \delta x) = 0$, was dem Lagrange'schen Theorem entspricht.

Auf dieselbe Art, wie in § 485, ergibt sich, dass jedes $x$ der Differentialquotient einer Function $A_2$ der Elemente in der unteren Reihe nach seinem conjugirten Element, nämlich $\xi$, ist. So hat man $x = \frac{\partial A_2}{\partial \xi}$.

Da $\partial A_1 = \Sigma \xi \partial x$ und $\partial A_2 = \Sigma x \partial \xi$ ist, so erhält man durch Addition und Integration $A_1 + A_2 = \Sigma x \xi$.

*$A_1$ und $A_2$ sind daher* nach der Definition in Bd. 1, § 410 *reciproke Functionen.*

Ferner wollen wir die Ordnung eines einzelnen Paares conjugirter Elemente umdrehen und das Schema in der Form

$$x_1, \quad x_2 \ldots x_{n-1}, \qquad \xi_n,$$
$$\xi_1, \quad \xi_2 \ldots \xi_{n-1}, \quad -x_n$$

schreiben; alsdann ist $\xi_r = \partial B_n / \partial x_r$ von $r = 1$ bis $r = n - 1$ und $-x_n = \partial B_n / \partial \xi_n$, worin $B_n$ eine Function der Elemente $x_1 \ldots x_{n-1}$ und $\xi_n$ bedeutet. Da

$$dB_n = \xi_1 dx_1 + \ldots + \xi_{n-1} dx_{n-1} - x_n d\xi_n$$

ist, so hat man $B_n = A_1 - x_n \xi_n$. Aus Bd. 1, § 418 geht hervor, *dass $B_n$ die modificirte Function von $A_1$ für das conjugirte Paar $(x_n, \xi_n)$ ist.*

§ 488. Die Beziehung zwischen den constanten Elementen $a_1 \dots a_n$, $b_1 \dots b_n$ und den Anfangswerthen von $p_1 \dots p_n$, $q_1 \dots q_n$ lässt sich jetzt auf geeignete Art ausdrücken. Setzt man $\alpha_1 \dots \alpha_n$, $\beta_1 \dots \beta_n$ für diese Anfangswerthe, so folgt aus § 482

$$\Sigma(\varDelta b \delta a - \varDelta a \delta b) - \Sigma(\varDelta \beta \delta \alpha - \delta \beta \varDelta \alpha) = 0.$$

Ordnet man nun die Buchstaben in der folgenden Art

$$\begin{matrix} a_1, & \dots a_n, & \alpha_1, & \dots & \alpha_n, \\ b_1, & \dots b_n, & -\beta_1, & \dots & -\beta_n, \end{matrix}$$

so ist jeder Buchstabe in jeder Horizontalreihe der Differentialquotient einer gewissen Function nach seinem conjugirten Buchstaben. Wenn z. B. $K$ eine beliebige Function der Buchstaben in der oberen Reihe ist, so wird $b = \partial K / \partial a$ und $-\beta = \partial K / \partial \alpha$. Aus einer beliebigen anderen Anordnung der Buchstaben ergeben sich entsprechende andere Regeln.

§ 489. **Kanonische Elemente.** Wir kehren nun zu der Lagrange'schen Gleichung zurück und zeigen, wie man durch eine andre Art der Behandlung derselben zu einer anderen Gruppe von Beziehungen kommen kann.

Wir wollen den Buchstaben die Ordnung

$$\begin{array}{l|l} p_1, \; p_2 \dots p_n & b_1, \; b_2 \dots b_n \\ q_1, \; q_2 \dots q_n & a_1, \; a_2 \dots a_n \end{array}$$

geben und die Elemente auf der einen Seite des verticalen Striches als Functionen derjenigen auf der anderen und ausserdem von $t$ und $t_0$ ansehen. Da wir das Lagrange'sche Variationstheorem benutzen werden, so müssen die Constanten entweder die Anfangswerthe der Variablen oder aus ihnen durch eine normale Transformation abgeleitet sein. Da die Zeit in dem zunächst Folgenden nicht variirt werden wird, so ist das Auftreten von $t$ oder $t_0$ nicht wesentlich.

Wir werden nun beweisen, *dass der partielle Differentialquotient eines Elementes in einer Reihe auf der einen Seite des Striches nach einem Element in der anderen Reihe auf der anderen Seite des Striches dem partiellen Differentialquotienten des zu dem letzteren conjugirten Elementes nach dem conjugirten zu dem ersteren gleich ist.*

Zu diesem Zweck benutzen wir das Lagrange'sche Theorem. Das Symbol $\varDelta$ bedeute, dass die Variation eines jeden Buchstaben auf der linken Seite mit Ausnahme von $p_r$ Null ist; $\varDelta$ stellt also $\varDelta p_r \cdot \partial / \partial p_r$ dar. $\delta$ bedeute, dass die Variation eines jeden Buchstaben auf der rechten Seite mit Ausnahme von $b_s$ Null ist; $\delta$ also $\delta b_s \cdot \partial / \partial b_s$ darstellt. Man erhält dann $\varDelta p_r \delta q_r - \varDelta a_s \delta b_s = 0$, daher

$$\frac{\partial p_r}{\partial a_s} = \frac{\partial b_s}{\partial q_r},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Vertauscht man die conjugirten Elemente auf der rechten Seite des verticalen Striches miteinander und ändert zugleich die Vorzeichen einer der Horizontalreihen, so ergibt sich sofort $\dfrac{\partial p_r}{\partial b_s} = -\dfrac{\partial a_s}{\partial q_r}$.

Diese Art, die Gleichheit der Differentialquotienten aus dem Lagrangeschen Theorem abzuleiten, rührt von Donkin her.

§ 490. Wir wollen nun ein neues von **Poisson** angegebenes Symbol einführen. Sind $u$, $v$ zwei beliebige Functionen der Variabelen $p_1 \dots p_n$, $q_1 \dots q_n$, so soll sein

$$(u, v) = \sum \left( \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} - \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} \right),$$

worin sich die Summirung über alle Werthe des $i$ von $i = 1$ bis $i = n$ erstreckt. Man kann auch die conjugirten Elemente $(H, t)$ einschliessen, wenn $u$, $v$ Functionen von $H$ oder $t$ sind; es ist dies aber nur dann nöthig, wenn es ausdrücklich erwähnt wird. Beim Gebrauch der abgekürzten Bezeichnung $(u, v)$ beachte man die Reihenfolge der Buchstaben. Der erste Factor auf der rechten Seite ist $\partial u / \partial p$, nicht $\partial u / \partial q$.

Es gibt noch eine andere Summirung, die **Lagrange** durch dasselbe Symbol dargestellt hat. Wir wollen aber, um Verwechselungen zu verhüten, seine Bezeichnung etwas abändern. Sind $u$ und $v$ zwei Grössen und die Variabelen $p_1$, etc., $q_1$, etc. Functionen von ihnen, so soll sein

$$[u, v] = \sum \left( \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} \right),$$

worin die Summirung sich über alle Werthe von $i$ erstreckt, während $u$, $v$ in jedem Glied dieselben bleiben.

Wir wollen das **Lagrange**'sche Variationstheorem wieder anwenden und den Operatoren $\Delta$ und $\delta$ dabei eine neue Bedeutung geben. Sind die Buchstaben auf der rechten Seite des verticalen Striches die unabhängigen Variabelen, § 489, so bezeichne $\Delta$ die Differentiation nach $b_s$ und $\delta$ diejenige nach $a_r$. Man erhält dann (§ 478)

$$[a_r, b_s] = \sum_i \left( \frac{\partial p_i}{\partial a_r} \frac{\partial q_i}{\partial b_s} - \frac{\partial p_i}{\partial b_s} \frac{\partial q_i}{\partial a_r} \right) = 1 \text{ oder } 0,$$

je nachdem $a_r$, $b_s$ conjugirte Elemente sind oder nicht.

Es wurde bereits gezeigt, dass

$$\frac{\partial p_i}{\partial b_s} = -\frac{\partial a_s}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial a_r} = \frac{\partial b_r}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial a_r} = -\frac{\partial b_r}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial b_s} = \frac{\partial a_s}{\partial p_i}$$

ist.

Substituirt man diese Werthe, so wird

$$(a_s, b_r) = \sum_i \left( \frac{\partial a_s}{\partial p_i} \frac{\partial b_r}{\partial q_i} - \frac{\partial b_r}{\partial p_i} \frac{\partial a_s}{\partial q_i} \right) = 1 \text{ oder } 0,$$

worin die rechte Seite die Einheit oder Null ist, je nachdem $a_r$, $b_s$ conjugirte Elemente sind oder nicht. Ebenso ist $(b_r, b_s) = 0$, $(a_r, a_s) = 0$.

Durch Integration der dynamischen Gleichungen erhält man $2n$ Gleichungen, welche die Werthe von ($p_1$ etc.), ($q_1$ etc.) als Functionen der Integrationsconstanten ($a_1$ etc.), ($b_1$ etc.) und von $t$ liefern. Wenn diese Constanten so gewählt werden, dass sie die Anfangswerthe von ($p_1$ etc.), ($q_1$ etc.) oder irgend welche Constanten sind, die sich durch eine normale Transformation aus ihnen ergeben, so ist, wie eben bewiesen wurde,

$$(a, b) = 0 \text{ oder } 1 \quad \dots\dots\dots \quad (\text{I}).$$

Sind aber die Constanten lediglich solche, wie sie bei jeder Integration auftreten, so kann es vorkommen, dass sie den Beziehungen (I) nicht genügen. Um diese Fälle zu unterscheiden, *nennt man die Constanten kanonische, wenn sie so geordnet sind, dass sie die Bedingungen* (I) *erfüllen.*

§ 491. Man kann die Beziehungen (I) auch noch auf andere Art beweisen, welche den Vortheil hat, zu zeigen, wie eng sie mit den in § 487 bereits bewiesenen zusammenhängen.

Zwei Gruppen von conjugirten Variabelen mögen durch die beiden Reihen

$$x_1, x_2 \ldots x_n$$
$$\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$$

dargestellt werden, und sie seien durch die $n$ Beziehungen

$$F_1(x_1 \ldots x_n, \ \xi_1 \ldots \xi_n) = 0, \quad F_2 = 0, \ \text{etc.} = 0$$

miteinander verbunden. Die $\frac{1}{2}n(n-1)$ typisch durch $\partial\xi_r/\partial x_s = \partial\xi_s/\partial x_r$ dargestellten Gleichungen sind dann für alle Werthe von $r$ und $s$ den $\frac{1}{2}n(n-1)$ durch

$$(F_r, F_s) = \sum\left(\frac{\partial F_r}{\partial x_i}\frac{\partial F_s}{\partial \xi_i} - \frac{\partial F_s}{\partial x_i}\frac{\partial F_r}{\partial \xi_i}\right) = 0$$

dargestellten Gleichungen äquivalent. Darin gibt $\Sigma$ die Summirung für alle Werthe von $i$ an. Ist eine der beiden Gruppen von Gleichungen gegeben, so folgt die andere aus ihr. Einen Beweis dieses Satzes findet man in Forsyth's *Differential Equations* unter dem Titel *Jacobi's general method*, Art. 211.

Um dieses Theorem auf den vorliegenden Fall anzuwenden, seien die beiden Gruppen von Variabelen

$$q_1 \ldots q_n, \quad a_1 \ldots a_n,$$
$$p_1 \ldots p_n, \quad b_1 \ldots b_n,$$

so dass also $x$ jedem Buchstaben in der oberen und $\xi$ jedem in der unteren Reihe entspricht. Die $2n$ Relationen zwischen ihnen seien

$$F_1 = \varphi_1 - a_1 = 0, \qquad F_2 = \varphi_2 - a_2 = 0, \ \text{etc.},$$
$$F_{n+1} = \varphi_{n+1} - b_1 = 0, \qquad F_{n+2} = \varphi_{n+2} - b_2 = 0, \ \text{etc.},$$

worin jedes $\varphi$ eine Function der Variabelen $q_1 \ldots q_n$, $p_1 \ldots p_n$ und $t$ ist. Bedenkt man nun, dass sich die Summe $(F_r, F_s)$ über alle conjugirten Buchstaben erstreckt, während die Summe $(\varphi_r, \varphi_s)$ nur für die $p$ und $q$ gilt, so erhält man $(F_r, F_s) = (\varphi_r, \varphi_s) = 1$ oder 0, worin $r > s$ und 1 oder 0 zu nehmen ist, je nachdem $b_r$, $a_s$ conjugirte Elemente sind oder nicht. Substituirt man für $\varphi_r$, $\varphi_s$, so lässt sich die Gleichung $(F_r, F_s) = 0$ in der Form $(b, a) = -1$ oder 0 schreiben.

Daraus ergibt sich, dass die folgenden beiden Sätze gleichwerthig sind:

(1) $p_1 dq_1 + \cdots + b_1 da_1 + \cdots =$ einem vollständigen Differential.

(2) Die Constanten sind derart, dass $(a, b)$ die Einheit oder Null ist, je nachdem $a$ und $b$ conjugirt sind oder nicht.

In § 487 ist ferner gezeigt worden, dass der erste Satz dem folgenden äquivalent ist

(3) $$\Sigma(\Delta p\,\delta q - \Delta q\,\delta p) - \Sigma(\Delta a\,\delta b - \Delta b\,\delta a) = 0.$$

Gibt man in (3) den $p$ und $q$ ihre Anfangswerthe, so können die Constanten, wenn sie kanonisch sind, d. h., wenn der zweite Satz gilt, aus den Anfangswerthen durch eine normale Transformation abgeleitet werden.

Es ist ferner klar, dass, wenn $a$, $b$ irgend zwei Constanten einer kanonischen Gruppe bedeuten, die durch $(a, b)$ und $[a, b]$ dargestellten Summirungen einander gleich sind.

§ 492. Beisp. **Das Helmholtz'sche Theorem.** Die natürliche Bewegung eines konservativen Systems würde es aus einer Lage $A$ in eine Lage $B$ in einer Zeit $t$ bringen; das System würde auch die umgekehrte Bewegung von $B$ nach $A$ in derselben Zeit machen. Seine Coordinaten und Impulscoordinaten in $A$ und $B$ seien beziehungsweise $b_1 \ldots b_n$, $a_1 \ldots a_n$ und $q_1 \ldots q_n$, $p_1 \ldots p_n$. Man nehme an, das System erhalte beim Durchgang durch die Lage $A$ einen kleinen Stoss, in Folge dessen sich die Impulscoordinate $a_r$ um $\delta a_r$ vergrössert, während alle übrigen Elemente ungeändert bleiben, und die Coordinaten hätten sich dadurch nach einer Zeit $t$ um $\delta q_1, \ldots \delta q_n$ geändert. Man nehme ferner an, dem System würde, wenn es bei der umgekehrten Bewegung von $B$ nach $A$ durch die Lage $B$ geht, ein kleiner Stoss gegeben, durch welchen die Impulscoordinate $p_s$ um $\Delta p_s$ vergrössert wird, und $\Delta b_1, \ldots \Delta b_n$ seien die entsprechenden Aenderungen der Coordinaten nach einer Zeit $t$. Alsdann ist $\delta q_s / \delta a_r = \Delta b_r / \Delta p_s$. Crelle's Journal, Bd. 100. Cf. Thomson und Tait, *Natural Philosophy*, 2. Aufl. Bd. 1, Nr. 334.

Prof. Lamb gibt bei der Besprechung dieses Theorems eine Anzahl Anwendungen auf die Akustik, Optik, etc. Siehe *Reciprocal Theorems in Dynamics*, Bd. 19 der *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1888.

§ 493. **Das Poisson'sche Theorem.** *Wenn irgend zwei Integrale der Bewegungsgleichungen die Form*

$$c_1 = \varphi_1(p_1 \text{ etc.}, q_1 \text{ etc. } t), \quad c_2 = \varphi_2(p_1 \text{ etc.}, q_1 \text{ etc. } t)$$

*haben und man betrachtet $c_1$ und $c_2$ als Functionen von $p_1$, etc., $q_1$, etc., während $t$ constant bleibt, so ist die Grösse $(c_1, c_2)$ während der Bewegung constant.*

Da nicht mehr als die richtige Anzahl von Integralen der Bewegungsgleichungen existiren können, so muss es möglich sein, diese beiden aus den $2n$ Integralen abzuleiten, wenn man die Anfangswerthe für die willkürlichen Constanten setzt. Sind ($\alpha_1$ etc.), ($\beta_1$ etc.) diese Anfangswerthe, so ist daher

$$c_1 = f(\alpha_1 \text{ etc.}, \beta_1 \text{ etc.}), \quad c_2 = F(\alpha_1 \text{ etc.}, \beta_1 \text{ etc.}),$$

worin ($\alpha_1$ etc.), ($\beta_1$ etc.) als bekannte Functionen von ($p_1$ etc.), ($q_1$ etc.) anzusehen sind.

Nun ist

$$\frac{\partial c_1}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial p} + \text{etc.},$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial q} + \text{etc.};$$

daher

$$\frac{\partial c_1}{\partial p}\frac{\partial c_2}{\partial q} - \frac{\partial c_1}{\partial q}\frac{\partial c_2}{\partial p} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial F}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\right)\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial p}\frac{\partial \alpha_2}{\partial q} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q}\frac{\partial \alpha_2}{\partial p}\right);$$

also

$$(c_1, c_2) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial F}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\right)(\alpha_1, \alpha_2).$$

Da die Integrale $\alpha_1, \alpha_2$ etc. kanonisch sind, so ist $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ oder $\pm 1$. Auch sind ihre Coefficienten in dieser Reihe sämmtlich Functionen von $\alpha_1, \alpha_2$ etc. und daher constant. Daraus folgt dass $(c_1, c_2)$ während der Bewegung constant ist.

Aus dem Poisson'schen Theorem ergibt sich: *Wenn zwei Integrale, z. B. $c_1 = \varphi$, $c_2 = \psi$, der Differentialgleichungen bekannt sind, so muss immer die Beziehung $c_3 = (\varphi, \psi)$ entweder ein drittes Integral der Bewegungsgleichungen oder eine Identität, oder aus den beiden bereits bekannten Integralen ableitbar sein.*

§ 494. *Ein anderer Beweis.* Da das Integral $c_1 = \varphi_1(p_1 \text{ etc. } q_1 \text{ etc. } t)$ den Hamilton'schen Gleichungen genügt, so erhält man ein identisches Resultat,

wenn man es total differenzirt und für $p'$ und $q'$ ihre durch die **Hamilton'schen** Gleichungen gegebenen Werthe einsetzt.

Man findet so

$$0 = \sum\left(-\frac{\partial c_1}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial c_1}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \frac{\partial c_1}{\partial t} \quad \cdots\cdots \quad (1).$$

*Dieser Gleichung kann man auch die knappe Form* $0 = (H, c_1) + \partial c_1/\partial t$ *geben; sie gibt die Bedingung an, unter welcher* $c_1 = \varphi$ (etc.) *ein Integral der Bewegungsgleichungen ist.*

Es sei

$$A = \sum\left[\frac{\partial c_1}{\partial q_s}\frac{\partial c_2}{\partial p_s} - \frac{\partial c_1}{\partial p_s}\frac{\partial c_2}{\partial q_s}\right];$$

wir haben zu beweisen, dass der totale Differentialquotient $d \cdot A/dt$ Null ist, wenn $A$ als eine Function von $p_1$, $q_1$, etc. und $t$ angesehen wird. Nun ist

$$\frac{d \cdot A}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum\left\{\frac{\partial A}{\partial p_r}p_r' + \frac{\partial A}{\partial q_r}q_r'\right\}.$$

Die Buchstaben $p_1$, $q_1$, etc. werden in den Ausdruck für $A$ nur durch $c_1$ und $c_2$ eingeführt. Betrachtet man nur den Theil von $d \cdot A/dt$, welcher die Folge der Variation von $c_1$ ist, so findet man den Theil, welcher aus der Variation von $c_2$ hervorgeht, durch Vertauschung von $c_1$ mit $c_2$ und Aenderung des Vorzeichens des Ganzen. Der vollständige Werth von $d . A/dt$ ist die Summe dieser beiden Theile.

Der aus der Variation von $c_1$ entstehende Theil von $d \cdot A/dt$ ist

$$\sum\left[\frac{\partial c_2}{\partial p_s}\left\{\frac{\partial}{\partial q_s}\frac{\partial c_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 c_1}{\partial p_r \partial q_s}\frac{\partial H}{\partial q_r} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial q_r \partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_r}\right\} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial c_2}{\partial q_s}\left\{\frac{\partial}{\partial p_s}\frac{\partial c_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 c_1}{\partial p_r \partial q_s}\frac{\partial H}{\partial q_r} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial q_r \partial p_s}\frac{\partial H}{\partial p_r}\right\}\right].$$

Substituirt man für $\partial c_1/\partial t$ seinen durch die Identität (1) gegebenen Werth, so wird dies

$$\sum\left[\frac{\partial c_2}{\partial p_s}\left\{\frac{\partial c_1}{\partial p_r}\frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_r} - \frac{\partial c_1}{\partial q_r}\frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial q_s}\right\} - \frac{\partial c_2}{\partial q_s}\left\{\frac{\partial c_1}{\partial p_r}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_r} - \frac{\partial c_1}{\partial q_r}\frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial q_s}\right\}\right].$$

Vertauscht man nun $c_1$ mit $c_2$, so erhält man dasselbe Resultat. Werden mithin die beiden Theile von $d \cdot A/dt$ addirt und die Vorzeichen entgegengesetzt genommen, so ist ihre Summe Null.

§ 495. **Beispiele.** Beisp. 1. Wenn $c_1 = H$ die Gleichung der lebendigen Kraft und $c_2 = \varphi_2$ (etc.) ein anderes Integral ist, welches $t$ nicht enthält, zu beweisen, dass $(c_1, c_2)$ identisch Null ist. Wenn aber das Integral $c_2$ die Zeit $t$ enthält und in der Form $c_2 = \varphi_2$ (etc.) $- t$ geschrieben wird, so ist $(c_1, c_2)$ identisch die Einheit. [Bertrand, siehe Liouville's Journal, 1852 und Lagrange, *Méc. Notes*].

Die Resultate folgen aus $(H, c) + \partial c/\partial t = 0$.

Beisp. 2. Wenn $c_1 = \varphi_1$ (etc.) ein Integral ist, welches $t$ nicht enthält, so muss es wenigstens ein anderes Integral $c_2 = \varphi_2$ (etc.) derart geben, dass $(c_1, c_2)$ nicht Null wird.

Wir wollen annehmen, es sei möglich und $(c_1, c_i) = 0$ für alle Integrale $c_1 \ldots c_{2n}$. Diese Gleichheit kann man als eine Differentialgleichung zur Ermittlung von $c_i$ ansehen; sie muss alle Lösungen von $(H, c_i) = 0$ in sich fassen, da

diese letztere Gleichung ausdrückt, dass $c_i$ ein Integral der Bewegungsgleichungen ist, welches $t$ nicht explicite enthält. Zwei lineare Gleichungen aber, welche dieselbe Anzahl von Variabelen haben, können nicht dieselben Integrale besitzen, ohne identisch zu sein. Mithin ist $c_1$ oder $\varphi_1$ eine Function von $H$ und das gegebene Integral die Gleichung der lebendigen Kraft. Wenn aber $c_1$ die Gleichung der lebendigen Kraft ist, so gibt es ein Integral, welches mit $c_1$ combinirt, die Einheit zum Resultat hat, d. h. dasjenige, in welchem die Constante an die Zeit gebunden ist. [Bertrand.]

§ 496. Wir wollen nun beweisen, *dass die in Jacobi's vollständiger Lösung eingeführten Constanten eine kanonische Gruppe bilden.* Aus § 470 ist ersichtlich: wenn die Elemente nach dem Schema

$$\begin{array}{c|c} q_1 \ldots q_n & h, \quad b_1 \ldots b_{n-1}, \\ p_1 \ldots p_n & t+\varepsilon, \; -a_1 \cdots -a_{n-1} \end{array}$$

geschrieben werden, so ist jedes Element in der unteren Reihe der partielle Differentialquotient einer Function $f$ nach seinem conjugirten Element. Folglich gilt das Lagrange'sche Theorem für dieses Schema von Elementen, wenn man $t+\varepsilon$ als eines derselben behandelt, § 487. Wenn aber die Elemente auf der rechten Seite als Functionen derjenigen auf der linken angesehen werden, so liefert das Lagrange'sche Theorem alles Nöthige, um die Beziehungen $(a, b) = 0$ oder 1 zu erhalten. Da $t$ und $\varepsilon$ in der Combination $t + \varepsilon$ auftreten, so reduciren sich diese Beziehungen auf

$$(a, b) = 0 \text{ oder } 1, \quad (b, \varepsilon) = 0, \quad (h, \varepsilon) = 1.$$

Die Constanten sind daher kanonisch. Der Satz rührt von Donkin her.

Beisp. Wenn wieder das Beispiel der Bewegung eines Geschosses wie in § 477 gegeben ist, zu zeigen, dass die vier aus Jacobi's vollständiger Lösung abgeleiteten Integrale

$$-a_1 = q_1 + p_1 p_2/g, \quad b_1 = p_1,$$
$$2h = p_1^2 + p_2^2 + 2gq_2, \quad t + \varepsilon = -p_2/g$$

sind. Man weise nach, dass diese Constanten kanonisch sind.

§ 497. Beisp. *Das Bertrand'sche Theorem.* Es sei

$$\alpha = \varphi(p_1 \text{ etc.}, q_1 \text{ etc.}, t)$$

ein Integral der Bewegungsgleichungen und $\beta$, $\gamma$, $\delta$ seien drei andere derselben Art. Man bilde die Determinante, deren erste Horizontalreihe $\partial\alpha/\partial p_r$, $\partial\alpha/\partial q_r$, $\partial\alpha/\partial p_s$, $\partial\alpha/\partial q_s$ ist und deren andere drei Horizontalreihen sich aus der ersten ergeben, wenn man $\beta$, $\gamma$, $\delta$ für $\alpha$ setzt. Es möge $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ die Summe dieser Determinanten für alle Werthe von $r$ und $s$ darstellen. Man beweise, dass $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ während der Bewegung constant bleibt. [*Comptes Rendus*, 1852.]

Brioschi gibt einen kurzen Beweis, indem er $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ in eine Reihe von Determinanten entwickelt, von denen jede zwei Horizontalreihen hat. Die Entwicklung ist

$$2(\alpha, \beta)(\gamma, \delta) + 2(\alpha, \gamma)(\delta, \beta) + 2(\alpha, \delta)(\beta, \gamma),$$

welche nach dem Poisson'schen Theorem constant ist. Sind die Constanten kanonisch, so reducirt sie sich auf 2 oder 0, je nachdem zwei Paare conjugirter Elemente vorkommen oder nicht. Er zeigt auch, dass

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \xi) = 3(\alpha, \beta)(\gamma\delta\eta\xi) = 3(\alpha, \gamma)(\beta\delta\xi\eta)$$
$$+ 3(\alpha, \delta)(\alpha\gamma\eta\xi) + 3(\alpha, \eta)(\beta\gamma\xi\delta) + 3(\alpha, \xi)(\beta\gamma\delta\eta)$$

ist. Tortolini, *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, Bd. 4, 1853.

§ 498. **Die Eigenschaften von** $(u, v)$. Da das Symbol $(u, v)$ in der theoretischen Dynamik sehr wichtig ist, so empfiehlt es sich, die folgenden Eigenschaften zu beachten:

(1) $(u, v) = -(v, u)$.

(2) $(u, u) = 0$.

(3) $(p_i q_i) = 1$ und $(p_i q_j) = 0$.

(4) Wenn $U = f(u_1, u_2 \dots u_n)$, $V = F(u_1, u_2 \dots u_n)$ ist, worin $u_1$, etc. Functionen der Elemente ($p_1$, etc.), ($q_1$, etc.) bezeichnen, so ist

$$(U, V) = \sum \left( \frac{\partial U}{\partial u_r} \frac{\partial V}{\partial u_s} - \frac{\partial U}{\partial u_s} \frac{\partial V}{\partial u_r} \right) (u_r, u_s),$$

worin $\Sigma$ die Summirung für alle Werthe von $r$ und $s$ angibt. Bertrand, siehe die Anmerkungen zur *Mécanique Analytique* von Lagrange, 1853.

(5) Ein allgemeineres Theorem ist das folgende:

Es sei

$$U = f(p_1 \dots p_n, \ q_1 \dots q_n, \ u_1 \dots u_n),$$

$$V = F(p_1 \dots p_n, \ q_1 \dots q_n, \ u_1 \dots u_n).$$

Alsdann ist

$$(U, V) = (U; V) + \sum \left\{ \frac{\partial U}{\partial u_r} (u_r, V) + \frac{\partial V}{\partial u_r} (U, u_r) \right\} + R,$$

worin $(U; V)$ die partiellen Differentialquotienten von $U$ und $V$ nach $p$ und $q$ enthält und $R$ das in Theorem (4) gegebene Resultat bezeichnet. Dieser Satz rührt von Imschenetsky her; siehe die Uebersetzung aus dem Russischen in's Französische in Grunert's Archiv, 1869.

(6) Sind $u$ und $v$ Functionen von ($p_1$, etc.), ($q_1$ etc.) und einem Buchstaben $x$, so folgt aus den Regeln für die Differentiation der Determinanten, dass

$$\frac{d}{dx}(u, v) = \left( \frac{du}{dx}, v \right) + \left( u, \frac{dv}{dx} \right)$$

ist. Verfährt man nun so, wie bei dem Leibnitz'schen Theorem, so wird

$$\frac{d^n}{dx^n}(u, v) = \left( \frac{d^n u}{dx^n}, v \right) + n \left( \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}, \frac{dv}{dx} \right) + n \frac{n-1}{2} \left( \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}}, \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + \text{etc.}$$

Imschenetsky.

(7) Sind $u$, $v$, $w$ drei Functionen der Variabelen, so ist

$$(u, (v, w)) + ((v, (w, u)) + (w, (u, v)) = 0,$$

Jacobi, Crelle's Journal, LX, S. 42. Einen Beweis findet man in Forsyth's *Differential Equations*.

§ 499. **Transformation der Coordinaten.** Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen lassen sich in der typischen Form

$$p' = -\partial H / \partial q, \quad q' = \partial H / \partial p \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

schreiben. Wenn wir nun die Coordinaten $q_1 \dots q_n$ mit andern $Q_1 \dots Q_n$ vertauschen, die mit den ersten durch Gleichungen von der Form $q = f(Q_1 \dots Q_n)$ verbunden sind, so haben, wie wir aus dynamischen Betrachtungen wissen, die transformirten Gleichungen die typische Gestalt

$$P' = -\partial H / \partial Q, \quad Q' = \partial H / \partial P \quad \dots \dots \dots \quad (2),$$

worin $P_1 \dots P_n$ die den $Q_1 \dots Q_n$ entsprechenden Impulscoordinaten sind und aus dem transformirten Werth der lebendigen Kraft auf dieselbe Art, wie zuvor, abgeleitet werden können.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob man nicht eine allgemeinere Transformation, wie z. B.

$$q_1 = f_1(Q_1 \dots Q_n,\ P_1 \dots P_n),\ \text{etc.} \quad \dots \dots \quad (3),$$

$$p_1 = F_1(Q_1 \dots Q_n,\ P_1 \dots P_n),\ \text{etc.} \quad \dots \dots \quad (4)$$

finden kann, welche derart ist, dass die Hamilton'schen Gleichungen (1), wenn sie so transformirt werden, die Form (2) annehmen. Wir nehmen an, $H$ sei eine gegebene Function von ($p_1$, etc.), ($q_1$, etc.) und von $t$, die Transformationsformeln (3) und (4) enthielten aber $t$ nicht explicite.

Da man die Hamilton'schen Gleichungen (§ 479) in der Form

$$\Sigma(\Delta q \delta p - \Delta p \delta q) + \Delta H \delta t - \Delta t \delta H = \text{Constante} \quad \dots \quad (5)$$

schreiben kann, so lässt sich die Transformation offenbar ausführen, wenn man

$$\Sigma(\Delta q \delta p - \Delta p \delta q) = \Sigma(\Delta Q \delta P - \Delta P \delta Q) \quad \dots \dots \quad (6)$$

nimmt, worin $\Delta$ und $\delta$ die ihnen in § 478 gegebene Bedeutung haben.

Ordnet man die Buchstaben nach dem Schema

$$\begin{matrix} p_1 \dots p_n, & -P_1 \dots -P_n, \\ q_1 \dots q_n, & Q_1 \dots \quad Q_n, \end{matrix}$$

so ergibt sich aus § 487 die folgende Regel, die ursprünglich von Jacobi herrührt (man sehe seine Dynamik): *Nimmt man irgend eine beliebige Function $\psi(q_1 \dots q_n, Q_1 \dots Q_n)$ der gegebenen Coordinaten und der neu einzuführenden, so sind die gesuchten Relationen* (3) *und* (4) *den typischen Beziehungen $p = \partial\psi/\partial q$ und $-P = \partial\psi/\partial Q$ äquivalent.*

Andere Regeln lassen sich durch Vertauschung der conjugirten Elemente und die nöthige Zeichenänderung aufstellen. Nimmt man z. B. die Anordnung

$$\begin{matrix} q_1 \dots q_n, & P_1 \dots P_n, \\ p_1 \dots p_n, & Q_1 \dots Q_n, \end{matrix}$$

so erhält man die zu (3) und (4) äquivalenten Transformationsformeln dadurch, *dass man $q = \partial\psi/\partial p$ und $P = \partial\psi/\partial Q$ setzt, worin $\psi$ eine willkürliche Function von $p_1 \dots p_n$, $Q_1 \dots Q_n$ ist.* Auch diese Regel hat Jacobi angegeben, siehe *Comptes Rendus*, 1837, Tome V, S. 66.

§ 500. **Beispiele.** Beisp. 1. Die willkürliche Function $\psi$ sei

$$\psi = p_1 f_1(Q_1 \dots Q_n) + p_2 f_2(Q_1 \dots Q_n) + \cdots \quad \dots \quad (1).$$

Nach Jacobi's zweiter Regel sind dann die gesuchten Transformationsformeln

$$q_i = f_i(Q_1 \dots Q_n) \quad \dots \dots \quad (2),$$

$$P_i = p_1 \partial f_1/\partial Q_i + p_2 \partial f_2/\partial Q_i + \cdots \quad \dots \dots \quad (3).$$

Es sind dies die gewöhnlichen Transformationsformeln, wenn man von einer Gruppe von Coordinaten $q_1 \dots q_n$ zu einer anderen $Q_1 \dots Q_n$ übergehen will.

Erinnert man sich an die Definition von $p_1$, $p_2$, etc. und beachtet, dass $Q_1'$, $Q_2'$, etc. in (2) nicht auftreten, so findet man leicht

$$\partial T/\partial Q_i' = p_1 \partial q_1'/\partial Q_i' + p_2 \partial q_2'/\partial Q_i' + \text{etc.}$$

Daraus und durch Differentiation von (2) erhält man die rechte Seite von (3). Es ergibt sich mithin, dass in diesem Fall $P_i$ die der Coordinate $Q_i$ entsprechende Impulscoordinate ist.

Beisp. 2. Ein System hängt von zwei Paaren von Elementen, nämlich $(p_1, q_1)$ und $(p_2, q_2)$, ab; man nehme an, die Jacobi'sche willkürliche Function sei $2\beta\psi = (q_1 - Q_1)^2 + (q_2 - Q_2)^2$, finde daraus die Transformationsformeln und untersuche, was aus ihnen wird, wenn $\beta = 0$ ist.

Beisp. 3. **Die Donkin'sche Regel.** Bei der Jacobi'schen Regel darf die willkürliche Function $\psi$ die Zeit $t$ nicht explicite enthalten. Wenn man voraussetzt, $\psi$ sei eine beliebige Function von $p_1$, etc., $Q_1$, etc. und $t$, zu beweisen, dass die in der typischen Form $q = \partial\psi/\partial p$, $P = \partial\psi/\partial Q$ geschriebenen Transformationsformeln die Differentialgleichungen in andere verwandeln, die zwar immer noch die Hamilton'sche Gestalt haben, in denen aber $H - \partial\psi/\partial t$ statt $H$ steht. [Phil. Trans. 1855.]

Es sei $x$ eine solche Function der Variabelen und von $t$, dass die Gleichung (6) in § 499 ihre Gültigkeit behält, wenn man $\Sigma(\Delta t\delta x - \Delta x\delta t)$ zu ihrer rechten Seite addirt. Die Möglichkeit dieser Annahme wird dadurch bewiesen, dass man die richtige Form für $x$ findet. Das zweite Schema erhält dadurch insofern eine Abänderung, als noch ein Paar von Elementen hinzutritt, nämlich $x$ zur oberen und $t$ zur unteren Reihe. Auf dieselbe Art, wie früher, schliesst man dann, dass $x = \partial\psi/\partial t$ ist, umgekehrt. Aus Gleichung (5) geht dann hervor, dass $H - x$ statt $H$ in den Hamilton'schen Gleichungen gesetzt werden muss.

Beisp. 4. *Die Mathieu'sche Regel.* Wenn die Variabelen ($p_1$, etc.), ($q_1$, etc.) mit ($P_1$, etc.), ($Q_1$, etc.) mittelst solcher Beziehungen verbunden werden, dass $\Sigma p\delta q = \Sigma P\delta Q$ ist, zu beweisen, dass die Hamilton'schen Gleichungen bei der Transformation ihre Gestalt behalten. Daraus leite man die folgende Regel zur Ermittelung von Transformationsformeln ab. Man nehme eine beliebige Function der alten und neuen Coordinaten z. B. $\psi(q_1$, etc. $Q_1$, etc.) an und setze sie gleich Null. Die gesuchten Beziehungen kann man typisch $p = \mu\partial\psi/\partial q$ und $-P = \mu\partial\psi/\partial Q$ schreiben. Man erhält so $2n+1$ Gleichungen zur Ermittelung von ($P_1$, etc.), ($Q_1$, etc.) und $\mu$. [*Liouville's Journal,* Vol. XIX, 1874.]

Zum Beweis des ersten Theiles dieses Theorems bemerkt Mathieu, dass man den Hamilton'schen Gleichungen die Gestalt

$$\delta H = \Sigma\{\delta(pq') - \partial/\partial t(p\delta q)\}$$

geben kann. Wählt man mithin für alle Variationen $\Sigma p\delta q = \Sigma P\delta Q$, so bleibt die Hamilton'sche Form ungeändert.

Um den zweiten Theil zu beweisen, gibt Mathieu an, die Gleichung $\Sigma p\delta q = \Sigma P\delta Q$ führe zu $2n$ Gleichungen, die sich typisch

$$p_1\frac{\partial q_1}{\partial Q_i} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial Q_i} + \text{etc.} = P_i \quad \text{(I)},$$

$$p_1\frac{\partial q_1}{\partial P_i} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial P_i} + \text{etc.} = 0 \quad \text{(II)}$$

schreiben lassen, worin $i$ alle Werthe von 1 bis $n$ hat. Aus der Gruppe (II) ergibt sich durch Elimination, dass die Functionaldeterminante von $q_1 \ldots q_n$ in Bezug auf $P_1 \ldots P_n$ Null ist. Die $n$ Gleichungen (3) in § 499 sind daher derart, dass nach Elimination von $n-1$ der $P$ auch das $n$te verschwindet und eine Gleichung zurückbleibt, welche nur $q_1 \ldots q_n$ und $Q_1 \ldots Q_n$ enthält. Diese Gleichung bezeichnet er mit $\psi = 0$. Differenzirt man $\psi = 0$ abwechselnd nach $P_1 \ldots P_n$, so ergeben die Gleichungen (II), $p_i = \mu\partial\psi = \partial q_i$. Durch Substitution in (I) folgt dann $P_i = -\mu\partial\psi/\partial Q_i$. Es ist zu beachten, dass die unbekannte Grösse $\mu$ nicht der Einschränkung unterliegt, dass sie nur eine Function von $q_1 \ldots q_n$, $Q_1 \ldots Q_n$ sein darf.

§ 501. Der Vortheil bei der Vertauschung der Variabelen $p_1$ etc., $q_1$ etc. mit anderen $P_1$ etc., $Q_1$ etc. liegt darin, dass sich bei geeigneter Wahl der willkürlichen Function $\psi$ der Ausdruck für $H$ vereinfachen lässt und dabei doch die Hamilton'sche Form der Differentialgleichungen bestehen bleibt. Die Buchstaben $(P_1, Q_1)$, $(P_2, Q_2)$ etc. behalten zwar, so weit es die Differentialgleichungen angeht, ihren dualen Charakter bei, dagegen ist es nicht nöthig, dass $P$ die $Q$ entsprechende Impulscoordinate darstelle. Soll dieser Fall eintreten, so müssen noch andere Bedingungen erfüllt werden.

Beisp. 1. Man nehme an, $H$ sei keine explicite Function von $t$ und die Transformationsformeln enthielten nur die alten und neuen Coordinaten, nicht aber $t$, und zeige, dass sich die lebendige Kraft $T$ und die Kräftefunction $U$ durch $Q_1$, $Q_2$ etc. und $Q_1'$, $Q_2'$ etc. ausdrücken lässt. Man zeige auch, dass, wenn jedes $P$ die jedem $Q$ entsprechende Impulscoordinate d. h. $P = \partial L/\partial Q'$ sein soll, es nöthig ist und ausreicht, wenn

$$\Sigma p \delta q = \Sigma P \delta Q$$

ist.

Man beachte zum Beweise, dass sich, wenn $L$ und $M$ die reciproken Functionen von $H$ in Bezug auf $(p_1$, etc.) bez. $(P_1$, etc.) sind, die typischen Gleichungen $p = \partial L/\partial q'$, $P = \partial M/\partial Q'$ ergeben. Um den zweiten Theil des Beispieles zu beweisen, braucht man nur $M = L$ zu machen. Nach der Definition einer reciproken Function muss dann $\Sigma p q' = \Sigma P Q'$ sein und daraus ergibt sich $\Sigma p \delta q = \Sigma P \delta Q$, weil $t$ nirgends explicite auftritt.

Beisp. 2. Man zeige, dass bei der Jacobi'schen ersten Regel, § 499, die $P$ im Allgemeinen die den $Q$ entsprechenden Impulscoordinaten nicht darstellen.

Wäre es der Fall, so würde eine Beziehung zwischen den $q$ und den $Q$ allein bestehen, § 500, Beisp. 4. Die Jacobi'schen Formeln lassen dies aber nicht zu.

§ 502. **Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen mit unbestimmten Multiplicatoren.** Es seien $q_1 \dots q_n$, $p_1 \dots p_n$ die Coordinaten und Impulscoordinaten des Systems, $L$ die Lagrange'sche und $H$ ihre reciproke Function. Nach dem Princip der virtuellen Momente erhält man, wie in Bd. 1, § 397

$$\sum \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'} - \frac{\partial L}{\partial q}\right) \delta q = 0 \quad \dots \dots \quad (1),$$

für alle Variationen, die mit den geometrischen Beziehungen vereinbar sind Nach der Definition der reciproken Functionen ist ferner

$$H + L = \Sigma p q' \quad \dots \dots \quad (2),$$

und, wenn man die totale Variation, wie in Bd. 1, § 410, davon bildet,

$$\delta H = -\sum \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \sum\left(-\frac{\partial L}{\partial q'} + p\right)\delta q' + \Sigma q' \delta p \quad \dots \quad (3).$$

Erinnert man sich, dass nach der Definition $p = \partial L/\partial q'$ ist und eliminirt $\Sigma(\partial L/\partial q)\delta q$ mit Hülfe von (1), so wird

$$\delta H = -\Sigma p' \delta q + \Sigma q' \delta p \quad \dots \dots \quad (4).$$

*Wenn alle p und q unabhängig sind, so lassen sich daraus die Hamilton'schen Gleichungen unmittelbar ableiten.* Bestehen jedoch Bedingungsgleichungen zwischen den Variabelen, so kann man die Methode der unbestimmten Multiplicatoren benutzen. Es mögen $r$ Bedingungsgleichungen existiren und sie seien durch

$$f_i(p_1 \dots p_n, \ q_1 \dots q_n) = 0 \quad \dots \dots \quad (5)$$

gegeben, worin $i$ alle Werthe von $i = 1$ bis $i = r$ annimmt. Differenzirt man sie, multiplicirt mit $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$ und zieht sie von (4) ab, so kommt

$$\delta H = \sum \left\{ -p' - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q} - \text{etc.} \right\} \delta q + \sum \left\{ q' - \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial p} - \text{etc.} \right\} \delta p \quad (6),$$

worin $\Sigma$ die Summirung für alle Coordinaten angibt. Daraus ergeben sich die folgenden $n$ Gleichungen, welche die typische Gestalt

$$\left. \begin{aligned} -p' &= \frac{\partial H}{\partial q} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q} + \text{etc.} \\ q' &= \frac{\partial H}{\partial p} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial p} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial p} + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

haben. Setzt man

$$K = H + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

so erkennt man, dass die Gleichungen (7), wenn man (5) zu Hülfe nimmt, die Form

$$p' = -\partial K / \partial q, \quad q' = \partial K / \partial p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

annehmen. Die $r$ durch (5) und die $2n$ durch (7) oder (9) dargestellten Gleichungen reichen hin, um die $r$ Multiplicatoren und die $2n$ Coordinaten und Impulscoordinaten zu bestimmen.

§ 503. Die Werthe der $r$ Multiplicatoren $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ kann man folgendermassen finden. Man differenzire (5) und erhält

$$\Sigma q' \partial f / \partial q + \Sigma p' \partial f / \partial p = 0.$$

Substituirt man aus (7) die Werthe von $p'$ und $q'$, so wird

$$(H, f) + \lambda_1 (f_1, f) + \lambda_2 (f_2, f) + \cdots = 0 \quad \ldots\ldots \quad (10),$$

worin das Symbol $(u, v)$ die ihm in § 490 gegebene Bedeutung hat. Setzt man in der typischen Gl. (10) nacheinander $f_1 \ldots f_r$ für $f$ ein, so ergeben sich $r$ lineare Gleichungen zur Ermittelung der Multiplicatoren. Substituirt man ihre Werthe in (7), so kommt man zu $2n$ Gleichungen, aus denen sich die Coordinaten ableiten lassen. Die Gleichungen (10) hat Mathieu in Liouville's *Journal,* 1874 gegeben.

§ 504. Es wurde angenommen, die Bedingungsgleichungen (5) enthielten sowohl die Impulscoordinaten als die Coordinaten, weil dies die Untersuchung symmetrischer gestaltete; in den meisten Fällen jedoch fehlen die Impulscoordinaten und werden damit die Resultate entsprechend einfacher.

§ 505. **Variation der Elemente.** Es mögen zwei dynamische Probleme gegeben und in dem einen möge die Hamilton'sche Function $H$, in dem anderen $H + K$ sein. Ihre Differentialgleichungen sind dann beziehentlich

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad q' = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial K}{\partial q}, \quad q' = \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial K}{\partial p} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Die Integrale des ersten Problems seien

$$c_1 = f_1(p_1, \text{etc.}, q_1, \text{etc.}, t), \quad c_2 = f_2(p_1, \text{etc.}, q_1, \text{etc.}, t), \text{ etc.} \quad \ldots \quad (3).$$

Betrachtet man $c_1, c_2$, etc., d. h. die Constanten des Lösung des ersten Problems, als Functionen von $p_1$, etc., $q_1$, etc. und $t$, so kann man annehmen, die Lösung des zweiten Problems werde durch Integrale von derselben Form (3) wie die des

ersten dargestellt. Wir wollen nun untersuchen, was für Functionen $c_1$, $c_2$, etc. von $p_1$, etc., $q_1$, etc. und $t$ sind. Die Function $K$ heisst *die Störungsfunction* und ist gewöhnlich klein im Vergleich zu $H$.

Da die Gleichungen (3) die Integrale der Differentialgleichungen (1) sind, wenn man $c_1$, etc. als Constante betrachtet, so erhält man durch Substitution aus (3) in (1) identische Gleichungen. Differenzirt man mithin (3) und substituirt für $p'$ und $q'$ ihre Werthe aus (1), so findet man die typische Gleichung

$$0 = -\frac{\partial c}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial c}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial c}{\partial t} \quad \text{(4)},$$

worin $c$ die Stelle aller Constanten $c_1$, $c_2$, etc. vertritt. Siehe § 494.

Werden aber $c_1$, $c_2$, ... als variabel angesehen, so sind die Gleichungen (3) die Integrale der Differentialgleichungen (2). Wiederholt man dasselbe Verfahren, so wird

$$c' = -\frac{\partial c}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial c}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial p}\frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial c}{\partial q}\frac{\partial K}{\partial p} + \cdots,$$

worin die Differentialquotienten auf der linken Seite totale sind.

Benutzt man nun die Identitäten (4), so findet man

$$c_1' = -\frac{\partial c_1}{\partial p}\frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial c_1}{\partial q}\frac{\partial K}{\partial p} \quad \text{(5)}$$

und ähnliche Ausdrücke für $c_2'$, etc.

*Ist K als Function von p, q, etc. und t gegeben,* so hat man $dc_1/dt$, etc. als Functionen von $p$, $q$, etc. und $t$ ausgedrückt. Verbindet man diese Gleichungen mit denen unter (3), so erhält man $c_1$, $c_2$ ... als Functionen von $t$.

*Ist K als Function von $c_1$, $c_2$, ... und t gegeben,* so kann man so fortfahren

$$\frac{\partial K}{\partial p} = \frac{\partial K}{\partial c_1}\frac{\partial c_1}{\partial p} + \frac{\partial K}{\partial c_2}\frac{\partial c_2}{\partial p} + \cdots,$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\partial K}{\partial c_1}\frac{\partial c_1}{\partial q} + \frac{\partial K}{\partial c_2}\frac{\partial c_2}{\partial q} + \cdots.$$

Durch Substitution in den Ausdruck für $c_1'$ wird

$$c_1' = \sum\left[\frac{\partial c_1}{\partial q}\frac{\partial c_2}{\partial p} - \frac{\partial c_1}{\partial p}\frac{\partial c_2}{\partial q}\right]\frac{\partial K}{\partial c_2} + \sum\left[\frac{\partial c_1}{\partial q}\frac{\partial c_3}{\partial p} - \frac{\partial c_1}{\partial p}\frac{\partial c_3}{\partial q}\right]\frac{\partial K}{\partial c_3} + \cdots \quad \text{(6)},$$

worin $\Sigma$ die Summirung für alle Werthe von $p$, $q$, nämlich $p_1$, $q_1$, $p_2$, $q_2$, etc. verlangt.

Benutzt man die in § 490 erklärte abgekürzte Bezeichnung, so lässt sich dieser Gleichung die einfache Form geben

$$c_1' = (c_2, c_1)\frac{\partial K}{\partial c_2} + (c_3, c_1)\frac{\partial K}{\partial c_3} + \cdots \quad \text{(7)}.$$

§ 506. Die Formeln, welche die Variationen der Constanten liefern, werden bedeutend einfacher, wenn die gewählten Elemente kanonisch sind. In diesem Fall treten die Constanten paarweise auf. Sind diese Paare $c_1$, $c_2$; $c_3$, $c_4$; etc., so ist $(c_2, c_1) = 1$; $(c_1, c_3) = 0$ u. s. w. Die Formeln nehmen dann die Gestalt an

$$\left.\begin{aligned} c_1' &= \partial K/\partial c_2 \\ c_2' &= -\partial K/\partial c_1 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} c_3' &= \partial K/\partial c_4 \\ c_4' &= -\partial K/\partial c_3 \end{aligned}\right\}, \text{ etc.} \quad \text{(8)}.$$

§ 507. Kehrt man zu der allgemeinen Gleichung (7) zurück, in welcher die Constanten keiner Einschränkung unterliegen, so erkennt man, dass die Coefficienten $(c_2, c_1)$ etc. durch einfache Differentiation zu ermitteln sind, wenn $c_1$, $c_2$ etc. als Functionen von $(p_1, q_1)$ etc. und von $t$, wie in (3), ausgedrückt werden. In der Regel wird man es vortheilhafter finden, sie durch die Constanten $c_1$, $c_2$ etc. und $t$ auszudrücken, indem man für $(p_1, q_1)$ etc. ihre durch die Integrale (3) gegebenen Werthe einsetzt.

*Bei der Ausführung dieser Substitution ergibt sich, dass t aus den Ausdrücken verschwindet.* Dies folgt unmittelbar aus dem Poisson'schen Theorem in § 494. *Wenn daher die Störungsfunction durch die Zeit und die Constanten der ungestörten Bewegung gegeben ist, so lassen sich die Variationen dieser durch die störenden Kräfte erzeugten Constanten durch die Differentialquotienten der Störungsfunction ausdrücken, ohne dass t explicite in irgend einem Coefficienten auftritt.*

§ 508. Als Beispiel betrachte man den Fall eines Massenpunktes oder Planeten, der eine Ellipse um ein Kräftecentrum beschreibt. Man nimmt gewöhnlich zu Constanten der elliptischen Bewegung die grosse Axe $2a$, die Excentricität $e$, die Länge eines Scheitels $\omega$, etc. Man nehme nun an, die Bewegung des Massenpunktes werde durch die Anziehung eines andern Massenpunktes gestört; alsdann besteht die Aufgabe der Lagrange'schen Methode bei der Behandlung der Planetentheorie darin, zu ermitteln, wie diese Constanten durch die störenden Kräfte geändert werden. Um dies zu erreichen, wird die Störungsfunction $K$ zuerst durch die Zeit und die Constanten $a$, $e$, $\omega$, etc. ausgedrückt und werden dann zweitens Formeln ermittelt, welche $a'$, $e'$, $\omega'$ etc. als Functionen von $\partial K/\partial a$, $\partial K/\partial e$, etc. liefern. Diese Formeln enthalten $t$ nur mittelbar durch die Störungsfunction und diese bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit beschränkt sich nicht auf diese speciellen Constanten, sondern gilt für alle Constanten, die man zur Bestimmung der elliptischen Bewegung wählen mag. Man beachte auch, dass dies auch dann noch der Fall ist, wenn $K$ nicht lediglich eine Function der Coordinaten $q_1$, $q_2$, etc., sondern sowohl der Coordinaten als der ihnen entsprechenden Impulscoordinaten ist.

§ 509. Die oben gegebenen Gleichungen (6), welche $c_1'$, $c_2'$, etc. durch die Differentialquotienten von $K$ ausdrücken, verdankt man Poisson; die entsprechenden Formeln von Lagrange sind anders gestaltet. Betrachtet man $K$ als Function der Coordinaten und der Impulscoordinaten, so ist

$$\frac{\partial K}{\partial c_1} = \frac{\partial K}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial c_1} + \frac{\partial K}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial c_1} + \text{etc.} + \frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial c_1} + \text{etc.} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (9).$$

Die Lösungen der Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung in der Hamilton'schen Form (1) seien

$$q_1 = F_1(t, c_1, c_2 \text{ etc.}), \quad q_2 = \text{etc.} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (10).$$

Werden sie in (1) substituirt und dabei $c_1$, $c_2$ etc. als Constante behandelt, so erfüllen sie (1) identisch. Wenn man sie daher in (2) einsetzt und dabei $c_1$, $c_2$ etc. als Functionen von $t$ behandelt, so streichen sich alle Glieder als identisch mit Ausnahme derjenigen, die $c_1'$, $c_2'$ etc. und die Terme $\partial K/\partial q$, $\partial K/\partial p$ enthalten. Da die nicht wegfallenden Glieder, welche $c_1'$, $c_2'$ etc. enthalten, nur durch $p'$ und $q'$ auftreten können, so ist

$$-\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\partial p}{\partial c_1}c_1' + \frac{\partial p}{\partial c_2}c_2' + \text{etc.}, \quad \frac{\partial K}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial c_1}c_1' + \text{etc.} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (11).$$

Substituirt man sie in (9), so ergibt sich, dass $c_1'$ aus dem Resultat verschwindet und dass

$$\frac{\partial K}{\partial c_1} = [c_1, c_2] c_2' + [c_1, c_3] c_3' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

ist, worin $[c_1, c_2]$ die ihm in § 490 gegebene Bedeutung hat. Aehnliche Beziehungen gelten für alle Differentialquotienten $\partial K / \partial c_2$, etc., so dass also ebensoviele Gleichungen als Constanten vorhanden sind.

Hält man die Gleichungen (7) und (12) gegeneinander, so sieht man, dass in beiden vorausgesetzt wird, die störende Function $K$ sei als Function der Constanten der ungestörten Bewegung und von $t$ bekannt. Um die Coefficienten in (7) zu ermitteln, müssen die Integrale der ungestörten Bewegung in der Form (3) ausgedrückt werden, d. h. jede Constante muss als Function der Variabelen und der Zeit gegeben sein. Um die Coefficienten in (12) zu ermitteln, müssen die Integrale die Form (10) haben, d. h. alle Variabelen müssen als Function der Zeit und der Constanten gegeben sein. In (7) ferner erhält man $c_1'$, $c_2'$ etc. direct als Function von $\partial K / \partial c$, etc., in (12) dagegen muss erst ein System linearer Gleichungen aufgelöst werden, ehe man $c_1'$, $c_2'$ etc. findet. Sowohl in (7) als in (12) enthalten die Coefficienten $(c_1, c_2)$, $[c_1, c_2]$ etc. die Zeit nicht explicite.

§ 510. Lagrange zeigt, dass diese Gleichungen einfachere Formen annehmen, welche denen unter (8) ähnlich sind, wenn die Constanten die Anfangswerthe der Variabelen $(p_1, q_1)$ etc. bedeuten. Indem er beliebige Constanten, die sich in die Integrationen einführen lassen, als Functionen von ihnen betrachtet, drückt er in seiner *Mécanique Analytique* ihre Variationen durch die Differentialquotienten von $K$ in einer Form aus, welche der von (7) gleicht.

§ 511. Die Methode der Variation der Constanten hat das Besondere, dass die Coordinaten $q_1, \dots q_n$ und die Impulscoordinaten $p_1, \dots p_n$ durch dieselben Functionen von $c_1$, $c_2$ etc. und $t$ ausgedrückt werden, mag nun die fragliche Bewegung die ungestörte oder die variirte sein. Daraus folgt unmittelbar, dass auch die Geschwindigkeiten $q_1', \dots q_n'$ bei beiden Bewegungen durch dieselben Functionen von $c_1$, $c_2$ etc. und $t$ ausgedrückt werden. Um dies zu beweisen, reicht die Bemerkung hin, dass man $q_1'$, $q_2'$ etc. durch $p_1$, $p_2$ etc., $q_1$, $q_2$ etc. ausdrücken kann, weil $p_1 = \partial T / \partial q_1'$, $p_2 = \partial T / \partial q_2'$ etc. ist.

§ 512. Die theoretische Dynamik umfasst ein so grosses Gebiet, dass es unmöglich ist, sie in einem Buch erschöpfend zu behandeln, das so viele Anwendungen enthält. Wir können daher das Donkin'sche Theorem, dass die Kenntniss der Hälfte der Integrale des Hamilton'schen Systems in gewissen Fällen zur Bestimmung des Restes ausreicht (*Phil. Trans.*, 1854, 1855) oder Bour's Methode, die Anzahl der Variabelen zu reduciren, wenn ein Theil der Integrale bekannt ist (*Liouville's Journal*, Bd. 20, 1855), hier nur erwähnen.

## Kapitel XI.

# Präcession und Nutation.

## Ueber das Potential.

§ 513. *Das Potential eines Körpers von beliebiger Form für einen äusseren entfernten Punkt zu finden.*

Der Schwerpunkt $G$ des Körpers werde zum Coordinatenanfang genommen und die $x$-Axe gehe durch den äusseren Punkt $S$. Der Abstand $GS$ sei gleich $\varrho$. $(x, y, z)$ seien die Coordinaten eines Elementes $dm$ des Körpers, das um irgend einen Punkt $P$ beschrieben ist und es sei $PG = r$, alsdann ist $PS^2 = \varrho^2 + r^2 - 2\varrho x$. Das Potential des Körpers ist

$$V = \sum \frac{dm}{PS}, \quad \text{also} \quad V = \sum \frac{dm}{\varrho}\left\{- \frac{2\varrho x - r^2}{\varrho^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum \frac{dm}{\varrho}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{2\varrho x - r^2}{\varrho^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{2\varrho x - r^2}{\varrho^2}\right)^2 + \frac{5}{16}\left(\frac{2\varrho x - r^2}{\varrho^2}\right)^3 + \frac{35}{128}\left(\frac{2\varrho x - r^2}{\varrho^2}\right)^4 + \cdots\right\};$$

ordnet man die Glieder nach fallenden Potenzen von $\varrho$, so wird

$$V = \sum \frac{dm}{\varrho}\left\{1 + \frac{x}{\varrho} + \frac{3x^2 - r^2}{2\varrho^2} + \frac{5x^3 - 3xr^2}{2\varrho^3} + \frac{35x^4 - 30x^2r^2 + 3r^4}{8\varrho^4} + \cdots\right\}.$$

$M$ sei die Masse des Körpers; es ist dann $\Sigma dm = M$. Da ferner der Coordinatenanfang im Schwerpunkt liegt, so wird $\Sigma x dm = 0$.

$A$, $B$, $C$ seien die Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt, $I$ das Trägheitsmoment für die $x$-Axe, welche in unserem Fall die den Schwerpunkt des Körpers mit dem angezogenen Punkt verbindende Gerade ist. Man hat dann

$$\Sigma dm r^2 = \frac{1}{2}(A + B + C),$$

$$\Sigma dm x^2 = \Sigma dm (r^2 - y^2 - z^2) = \frac{1}{2}(A + B + C) - I.$$

Wenn $l$ irgend eine lineare Dimension des Körpers ist und $\varrho$ im Vergleich zu $l$ so gross ist, dass man den Bruch $(l/\varrho)^3$ in dem Potential vernachlässigen kann, so erhält man

$$V = \frac{M}{\varrho} + \frac{A + B + C - 3I}{2\varrho^3}.$$

Will man eine grössere Annäherung an den Werth von $V$ haben, so muss man noch das nächste Glied $\frac{5\Sigma m x^3 - 3\Sigma m x r^2}{2\varrho^4}$ in Rechnung ziehen.

($\xi$, $\eta$, $\zeta$) seien die Coordinaten von $m$ in Bezug auf festliegende rechtwinklige Axen, deren Anfang in $G$ liegt, und ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) seien die Winkel, die $GS$ mit diesen Axen macht. Alsdann ist

$$x = \xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma;$$

also

$$\Sigma m x^3 = \cos^3\alpha\, \Sigma m \xi^3 + 3\cos^2\alpha \cos\beta\, \Sigma m \xi^2 \eta + \cdots.$$

Wenn der Körper für ein System rechtwinkliger sich in $G$ schneidender Axen symmetrisch ist, so hat man $\Sigma m \xi^3 = 0$, $\Sigma m \xi^2 \eta = 0$, etc. $= 0$; das nächste Glied in dem Ausdruck für das Potential verschwindet mithin überhaupt. Der Fehler in dem obigen Ausdruck für $V$ ist daher von derselben Ordnung, wie der Bruch $(l/\varrho)^4$ des Potentiales. Es ist dies bei der Erde der Fall, deren Gestalt und Structur für die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen nahezu symmetrisch sind.

§ 514. In dem Vorigen wurde vorausgesetzt, $S$ liege in sehr grosser Entfernung. *Der Ausdruck für das Potential ist aber auch dann nahezu correct, wenn der Punkt S eine ganz beliebige Lage hat, vorausgesetzt, dass der Körper ein Ellipsoid ist, dessen Schichten gleicher Dichtigkeit concentrische Ellipsoide von kleiner Excentrität sind.*

Man kann, um den Beweis zu führen, ein Theorem über die Anziehungskräfte von Maclaurin benutzen, dass nämlich die Potentiale confocaler Ellipsoide für irgend einen äusseren Punkt ihren Massen proportional sind. Wir wollen zuerst den Fall eines massiven homogenen Ellipsoides betrachten. Man beschreibe ein inneres confocales Ellipsoid von sehr kleinen Dimensionen und $a'$, $b'$, $c'$ seien seine Halbaxen. Weil nun die Excentricität sehr klein ist, so lassen sich $a'$, $b'$, $c'$ so klein annehmen, dass $S$ als ein entfernter Punkt in Bezug auf das innere Ellipsoid angesehen werden kann. Das Potential in Folge des inneren Ellipsoides ist daher

$$V' = \frac{M'}{\varrho} + \frac{A' + B' + C' - 3I'}{2\varrho^3},$$

worin die accentuirten Buchstaben dieselbe Bedeutung in Bezug auf das innere, wie die nicht accentuirten in Bezug auf das äussere Ellipsoid haben. Der Fehler bei diesem Ausdruck ist von derselben Ordnung wie $(a'/\varrho)^4 V'$. Nach dem Maclaurin'schen Theorem ist daher das Potential des gegebenen Ellipsoides

$$V = \frac{M}{\varrho} + \frac{M}{M'}\,\frac{A' + B' + C' - 3I'}{2\varrho^3}$$

und der Fehler von der Ordnung $(a'/\varrho)^4 V$.

Sind $a$, $b$, $c$ die Halbaxen des gegebenen Ellipsoides, so hat man

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 = \lambda^2,$$

also

$$A = M\frac{b^2+c^2}{5} = M\left(\frac{b'^2+c'^2}{5} + \frac{2}{5}\lambda^2\right) = \frac{M}{M'}A' + \frac{2}{5}M\lambda^2$$

und ebenso

$$B = \frac{M}{M'}B' + \frac{2}{5}M\lambda^2, \quad C = \frac{M}{M'}C' + \frac{2}{5}M\lambda^2.$$

Wenn ferner $(\alpha, \beta, \gamma)$ die Richtungswinkel der Linie $GS$ in Bezug auf die Hauptaxen für $G$ sind, so ist

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma = \frac{M}{M'}I' + \frac{2}{5}M\lambda^2.$$

Setzt man ein, so erhält man

$$V = \frac{M}{\varrho} + \frac{A+B+C-3I}{2\varrho^3}.$$

Ist $a > b > c$, so kann man dadurch, dass man das innere Ellipsoid immer mehr abnehmen lässt, $c'$ beliebig klein machen, obgleich in der Grenze die Excentricitäten der beiden Schnitte, die $c'a'$ und $c'b'$ enthalten, der Einheit gleich werden. In diesem Fall wird schliesslich $a' = \sqrt{a^2 - c^2}$. Es sei $\varepsilon$ die Excentricität des Schnittes, der $a$ und $c$, die grösste und kleinste Halbaxe enthält. Es ist dann $a' = a\sqrt{2\varepsilon}$ und der Fehler in dem obigen Ausdruck für $V$ von der Ordnung $4(a/\varrho)^4\varepsilon^2 V$.

Gilt das Theorem für ein beliebiges massives homogenes Ellipsoid, so gilt es auch für eine beliebige homogene Schale, die von concentrischen Ellipsoiden von kleiner Excentricität begrenzt wird. Denn das Potential einer solchen Schale findet man durch Subtraction der Potentiale der begrenzenden Ellipsoide von einander, da $A + B + C$ (siehe Bd. 1) von der Richtung der Axen unabhängig ist.

Schliesslich nehme man an, der Körper sei ein Ellipsoid, dessen Schichten gleicher Dichtigkeit concentrische Ellipsoide von kleiner Excentricität sind und die äussere Grenzschicht sei homogen. Da der Satz dann für jede Schicht gilt, so gilt er auch für den ganzen Körper.

Beisp. Man mache die Probe auf diesen Satz, indem man zeigt, dass die in § 513 angegebenen Glieder der vierten Ordnung von der Ordnung

$$(a/\varrho)^4\varepsilon^2 V$$

sind, wenn der anziehende Körper ein homogenes Ellipsoid ist.

Durch Integration zeige man zuerst, dass die Glieder der vierten Ordnung

$$\frac{3}{8\cdot 35}\frac{M}{\varrho^5}[35(\lambda^2a^2+\mu^2b^2+\nu^2c^2)^2 - 20(\lambda^2a^4+\mu^2b^4+\nu^2c^4)$$
$$-10(\lambda^2a^2+\mu^2b^2+\nu^2c^2)(a^2+b^2+c^2) + (a^2+b^2+c^2)^2 + 2(a^4+b^4+c^4)]$$

sind, worin $(\lambda, \mu, \nu)$ die Richtungscosinusse von $GS$ bedeuten. Ist das Ellipsoid nahezu kugelförmig, so setze man $b/a = 1 - \varepsilon$, $c/a = 1 - \varepsilon'$. Durch Substitution erkennt man leicht, dass nicht nur alle von $\varepsilon$, $\varepsilon'$ unabhängigen Glieder Null sind, sondern dass auch die Glieder, welche die ersten Potenzen von $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ enthalten, verschwinden.

Das Theorem in § 513 verdankt man Poisson, die bequeme Form, in der es hier gegeben wurde, rührt von Mac Cullagh her. Laplace in der *Mécanique Céleste,* Buch V hat nachgewiesen, dass es auch noch dann nahezu gilt, wenn der anziehende Körper sich dicht bei der Erde befindet, vorausgesetzt, dass die Erde ein Ellipsoid ist. Der Beweis in § 515 ist nahezu derselbe wie der von Mac Cullagh, *Transactions of the Royal Irish Academy,* Vol. XXII. Theil I und II. *Science*[1]).

§ 515. Die folgende geometrische Interpretation der Formel in § 513 rührt ebenfalls von MacCullagh her. Den Beweis und einen andern von Rev. R. Townsend findet man in den *Irish Transactions,* 1855.

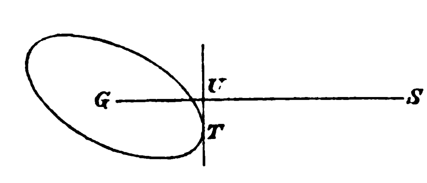
*Ein System materieller Punkte zieht einen Punkt S an, dessen Abstand von dem Schwerpunkt G der anziehenden Masse im Vergleich mit den gegenseitigen Abständen der Massenpunkte sehr gross ist. Wenn eine Berührungsebene senkrecht zu GS an das reciproke Ellipsoid gelegt wird, welche es in T berührt und GS in U schneidet, so liegt die resultirende auf S wirkende Anziehungskraft in der Ebene SGT. Die Componente P der auf S wirkenden Anziehung in der Richtung TU ist gleich* $-\frac{3M}{\varrho^4}GU\cdot UT$*; die in der Richtung UG ist*

$$\frac{M}{\varrho^2}+\frac{3}{2}\,\frac{A+B+C-3I}{\varrho^4}.$$

Diese Theoreme gelten auch dann, wenn man das reciproke Ellipsoid durch ein beliebiges confocales ersetzt. Sind $a$, $b$, $c$ die Halbaxen dieses confocalen Ellipsoids und $p$ das Loth $GU$ auf die Berührungsebene, so erhält man, weil, nach Bd. 1, unter $\lambda$ eine Constante verstanden, $A=Ma^2+\lambda$, $B=Mb^2+\lambda$ ist,

$$V=\frac{M}{\varrho}+\frac{M(a^2+b^2+c^2-3p^2)}{2\varrho^3}.$$

Um zu beweisen, dass die resultirende auf $S$ wirkende Kraft in der Ebene $SGT$ liegt, verrücke man $S$ nach $S'$ so, dass $SS'$ auf dieser Ebene senkrecht steht und gleich $\varrho\,d\psi$ ist. Weil $V$ ein Potential vorstellt, so ist die an $S$ in der Richtung $SS'$ angreifende Kraft $dV/\varrho\,d\psi$. Nach dieser Verrückung schneidet aber die zu $GS'$ senkrechte Berührungsebene die frühere Berührungsebene in der Geraden $TU$, daher ist $dp/d\psi=0$ und also $dV/d\psi=0$.




Um die an $S$ in der Richtung $TU$ angreifende Kraft zu finden, wollen wir $S$ nach $S''$ so verschieben, dass $SS''$ parallel $TU$ und gleich $\varrho\,d\psi$ ist. Da $GU$ senkrecht auf $TU$ steht, so erhält man $TU=dp/d\psi$. Mithin ist

$$P=\frac{1}{\varrho}\frac{dV}{d\psi}=-\frac{3M}{\varrho^4}p\cdot TU$$

und schliesslich

$$R=-\frac{dV}{d\varrho}=\frac{M}{\varrho^2}+\frac{3}{2}\,\frac{A+B+C-3I}{\varrho^4}.$$

Beisp. Man zeige, dass das Product $GU\cdot TU$ für alle confocalen Ellipsoide dasselbe ist.

§ 516. **Beispiele für Anziehungskräfte.** Beisp. 1. Es sei $GP$ eine durch den Schwerpunkt gehende Gerade der Art, dass das Trägheitsmoment für sie dem Mittel aus den drei Hauptträgheitsmomenten für $G$ gleich ist; die Componente

---

1) Der Theil der *Irish Transactions,* welcher der *Science* gewidmet ist, nicht der für die *Letters.*

der Anziehungskraft des Körpers auf irgend einen Punkt $S$ in der Richtung $GS$ kommt alsdann, wenn $S$ in $GP$ liegt, der Anziehungskraft des in seinem Schwerpunkt vereinigten Körpers näher, als wenn $S$ in irgend einer andern durch $G$ gehenden Geraden liegt.

Man zeige auch, dass das Trägheitsmoment für $GP$ dem Mittel aus den Trägheitsmomenten für alle durch $G$ gehende Geraden gleich ist.

Wenn zwei der Hauptträgheitsmomente gleich sind, zu beweisen, dass $GP$ mit der Axe des ungleichen Momentes den Winkel $\arccos\left(1/\sqrt{3}\right)$ macht. Im Fall der Erde hat diese Linie die Breite $54^0 45'$.

§ 517. **Andere Anziehungsgesetze.** Beisp. 2. Wenn die Anziehungskraft irgend eine andere Function der Entfernung, $-\varphi(\varrho)$ ist, statt dem reciproken Quadrat proportional zu sein, so wird das Potential eines Körpers für einen äusseren Punkt $S$ durch $\Sigma m \varphi_1(PS)$ dargestellt, worin $\varphi(\varrho)$ der Differentialquotient von $\varphi_1(\varrho)$ ist. Verfährt man jetzt ebenso, wie in § 513, so wird

$$V = M\varphi_1(\varrho) + \varphi'(\varrho)\frac{A+B+C}{4} - \frac{\varrho}{2}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}\right) I,$$

worin $A$, $B$, $C$ und $I$ dieselbe Bedeutung, wie zuvor, haben.

Sind $(x', y', z')$ die Coordinaten von $S$ in Bezug auf die Hauptaxen für $G$, so ist das Moment der Anziehung von $S$ um die $y$-Axe

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}\cdot(C-A)x'z'.$$

§ 518. *Die Kräftefunction zu finden, welche die Folge der Anziehung eines entfernten Körpers durch irgend einen Körper ist.*

$G$, $G'$ seien die Schwerpunkte der beiden Körper und $GG' = R$. $A, B, C$; $A', B', C'$ seien die Hauptträgheitsmomente der beiden Körper für $G$ bez. $G'$; $I$, $I'$ die Trägheitsmomente für $GG'$ und $M$, $M'$ die Massen der beiden Körper.

$m'$ sei irgend ein Element des Körpers $M'$, das in dem Punkt $S$ liegt, und $GS = \varrho$. Das Potential des Körpers $M$ für $m'$ ist

$$m'\left\{\frac{M}{\varrho} + \frac{A+B+C-3I_1}{2\varrho^3}\right\},$$

worin $I_1$ das Trägheitsmoment des Körpers $M$ für $GS$ bedeutet. Man hat nun diesen Ausdruck für alle Werthe von $m'$ zu summiren. Man erhält

$$M\Sigma\frac{m'}{\varrho} + \Sigma m'\frac{A+B+C-3I_1}{2\varrho^3}.$$

Das erste Glied ergibt auf dieselbe Art wie früher

$$\frac{MM'}{R} + M\frac{A'+B'+C'-3I'}{2R^3}.$$

Was das zweite Glied angeht, so seien $x'$, $y'$, $z'$ die Coordinaten von $m'$ in Bezug auf $G'$ als Coordinatenanfang. Alsdann ist

$$\varrho = R\left(1 + \frac{x'}{R} + \text{den Quadraten von } x', y', z'\right),$$

$$I_1 = I(1 + \alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \text{den Quadraten}),$$

worin $\alpha, \beta, \gamma$ Constanten sind. Substituirt man und bedenkt, dass $\Sigma m'x' = 0$, $\Sigma m'y' = 0$, $\Sigma m'z' = 0$ ist, so erhält man

$$M' \cdot \frac{A+B+C-3I}{2R^3}\left\{1 + \begin{matrix}\text{Gliedern, die von den Quadraten}\\ \text{von } x', y', z' \text{ abhängen}\end{matrix}\right\}.$$

Die gesuchte Kräftefunction ist daher

$$V = \frac{MM'}{R} + M\frac{A'+B'+C'-3I'}{2R^3} + M'\frac{A+B+C-3I}{2R^3}.$$

Der bei der Verwendung dieses Ausdruckes begangene Fehler ist von der Ordnung $(ll'/R^2)^2 V$, worin $l, l'$ beliebige lineare Dimensionen des einen bez. des anderen Körpers sind.

§ 519. **Das Moment der Sonnenanziehung.** *Das Moment der Anziehung der Sonne oder des Mondes um eine der Hauptaxen der Erde für ihren Schwerpunkt zu finden.*

Die Hauptaxen der Erde für ihren Schwerpunkt seien die Bezugsaxen, $\alpha, \beta, \gamma$ die Richtungswinkel des Schwerpunktes $G'$ der Sonne. Bezeichnet alsdann $V$ das Potential der Sonne oder des Mondes für die Erde, so ist

$$V = \frac{MM'}{R} + M\frac{A'+B'+C'-3I'}{2R^3} + M'\frac{A+B+C-3I}{2R^3},$$

worin sich die nicht accentuirten Buchstaben auf die Erde und die accentuirten auf die Sonne oder den Mond beziehen. Bedeutet $\theta$ den Winkel, welchen die durch die Sonne und die $y$-Axe gelegte Ebene mit der $xy$-Ebene macht, so ist $dV/d\theta$ das gesuchte Moment in der Richtung, in welcher man den Körper drehen muss, um $\theta$ zu vergrössern. Aus dem obigen Ausdruck erhält man, da $\theta$ nur in $I$ vorkommt,

$$\frac{dV}{d\theta} = -\frac{3}{2}\frac{M'}{R^3}\frac{dI}{d\theta}.$$

Nun ist $I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$ und, wie aus der sphärischen Trigonometrie bekannt ist,

$$\cos\gamma = \sin\beta\sin\theta, \quad \cos\alpha = \sin\beta\cos\theta;$$

daher

$$\frac{dI}{d\theta} = -2(A-C)\sin^2\beta\sin\theta\cos\theta,$$

$$\left.\begin{matrix}\text{und das gesuchte Moment}\\ \text{um die } y\text{-Axe}\end{matrix}\right\} = -3\frac{M'}{R^3}(C-A)\cos\alpha\cos\gamma.$$

In diesem Ausdruck wird die Masse des anziehenden Körpers durch astronomische Einheiten gemessen. Diese Einheit lässt sich auf folgende Art eliminiren. $n'$ sei die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Sonne um die Erde, $R_0$ ihr mittlerer Abstand, also, wenn $M$ die Masse der Erde ist, $(M'+M)/R_0^3 = n'^2$. $M$ ist nun im Vergleich mit $M'$ so klein, das $M/M'$ von derselben Ordnung ist, wie die bereits

vernachlässigten Glieder. Man kann mithin hier $M'/R_0^3 = n'^2$ setzen und erhält

$$\left.\begin{array}{l}\text{das Moment der Anziehung}\\ \text{der Sonne um die } y\text{-Axe}\end{array}\right\} = -3n'^2(C-A)\cos\alpha\cos\gamma\left(\frac{R_0}{R}\right)^3.$$

$n''$ sei die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Mondes um die Erde; dann ist, wenn $M''$ die Masse des Mondes bedeutet und $R_0'$ den mittleren Abstand, $(M''+M)/R_0'^3 = n''^2$ und wenn $\nu$ das Verhältniss der Masse der Erde zu der des Mondes bezeichnet, $M''(1+\nu)/R_0'^3 = n''^2$, mithin, unter $R'$ den Abstand des Mondes verstanden,

$$\left.\begin{array}{l}\text{das Moment der Anziehung}\\ \text{des Mondes um die } y\text{-Axe}\end{array}\right\} = -\frac{3n''^2}{1+\nu}(C-A)\cos\alpha\cos\gamma\left(\frac{R_0'}{R'}\right)^3.$$

Auf dieselbe Art werden die Momente um die anderen Axen ermittelt. Setzt man $\varkappa$ für den Coefficienten, so wird

$$\text{das Moment um die } x\text{-Axe} = -3\varkappa(B-C)\cos\beta\cos\gamma$$

$$\text{das Moment um die } z\text{-Axe} = -3\varkappa(A-B)\cos\alpha\cos\beta.$$

§ 520. **Beispiele.** Beisp. 1. Die Kräftefunction der Kraftwirkung zwischen einem Körper von beliebiger Gestalt und einem gleichförmigen Ring, welcher die Form eines Kreises hat, dessen Centrum in dem Schwerpunkt des Körpers liegt und dessen Masse mit $M'$ bezeichnet wird, ist

$$V = \frac{MM'}{\varrho} - M'\,\frac{A+B+C-3J}{4\varrho^3},$$

worin $J$ das Trägheitsmoment des Körpers für eine durch seinen Schwerpunkt senkrecht zur Ebene des Ringes gehende Axe ist und $A$, $B$, $C$ die Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt bedeuten.

Daraus weise man nach, dass der Ring des Saturn, wenn man ihn als gleichförmig voraussetzt, dieselben Momente, mit denen er den Saturn um seinen Schwerpunkt dreht, wie seine ganze halbe Masse hat, wenn man sie in einem Massenpunkt vereinigt und auf die Axe des Ringes in dem nämlichen Abstand vom Saturn legt; dabei muss aber der Massenpunkt den Saturn nicht anziehen, sondern abstossen.

Beisp. 2. Wenn die Erde aus concentrischen sphäroidischen Schichten von kleinen aber verschiedenen Excentricitäten und von verschiedenen Dichtigkeiten besteht, zu zeigen, dass sich das Verhältniss von $C$ zu $A$ aus der Gleichung

$$C\int\varrho\,d(a^5\varepsilon) = (C-A)\int\varrho\,d(a^5)$$

ergibt, worin $\varepsilon$ die Excentricität und $\varrho$ die Dichtigkeit einer Schicht bedeutet, deren Hauptaxe $a$ ist; dabei ist das Quadrat von $\varepsilon$ vernachlässigt worden. Es folgt daraus, dass das Verhältniss von $C$ zu $A$ von dem Dichtigkeitsgesetz nicht abhängt, wenn $\varepsilon$ constant ist.

Legt man das Gesetz für die Dichtigkeit und Excentricität zu Grunde, welches gewöhnlich für die Erde angenommen wird, so erhält man aus der obigen Formel $(C-A)/C = 0{,}00313593$. Siehe Pratt's *Figure of the Earth*.

Beisp. 3. Ein Körper, der sich frei um eine feste durch seinen Schwerpunkt gehende Gerade drehen kann und welchen ein entfernter festliegender Massenpunkt

anzieht, befindet sich im Gleichgewicht. Man zeige, dass die Zeit einer kleinen Schwingung

$$2\pi\left\{\frac{B\varrho^5}{3M'\xi\{(C-A)\xi+F\eta\}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ist, worin die feste Gerade die $y$-Axe ist, die $xy$-Ebene im Gleichgewichtszustand durch den anziehenden Massenpunkt geht und $\xi$, $\eta$ die Coordinaten des Massenpunktes bezeichnen. $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ sind ferner die Trägheits- und Deviationsmomente des Körpers für die Axen. Wenn die Gerade nicht durch den Schwerpunkt geht, zu zeigen, dass die Zeit $\varrho$ proportional ist.

## Die Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt.

§ 521. *Die Bewegung des Pols der Erde um ihren Schwerpunkt zu ermitteln, wenn sie durch die Anziehung der Sonne und des Mondes gestört wird und wenn angenommen wird, die Figur der Erde sei eine Umdrehungsfigur.*

Wir wollen die Wirkung eines jeden der beiden Körper für sich betrachten. Vernachlässigt man dann Glieder, die von dem Quadrat der störenden Kraft abhängen, so lässt sich durch Addition ihre vereinte Wirkung bestimmen.

Die Sonne zieht die Theile der Erde, welche ihr näher liegen, mit einer etwas grösseren Kraft als die entfernteren an und ruft so ein kleines Paar hervor, welches die Erde um eine Axe zu drehen sucht, die in der Ebene des Aequators liegt und auf der Linie senkrecht steht, welche das Centrum der Erde mit dem Centrum der Sonne verbindet. Die Wirkung dieses Paares ist es, die wir jetzt zu bestimmen haben. Offenbar erzeugt es kleine Winkelgeschwindigkeiten um Axen, die zur Axe der Figur normal sind. Wir werden annehmen, die Anfangsrotationsaxe liege der Figurenaxe so nahe, dass wir Winkelgeschwindigkeiten um Axen in der Ebene des Aequators als klein im Vergleich mit der Winkelgeschwindigkeit um die Figurenaxe ansehen können.

Die in der Erde liegenden Bezugsaxen seien $GC$ die Axe der Figur, $GA$ und $GB$, die sich in der Erde mit der Winkelgeschwindigkeit $\theta_3$ um $GC$ drehen. Behält man die Bezeichnung des § 10 bei, so ist

$$h_1 = A\omega_1,\quad h_2 = A\omega_2,\quad h_3 = C\omega_3,\quad \theta_1 = \omega_1,\quad \theta_2 = \omega_2.$$

Die Bewegungsgleichungen sind daher

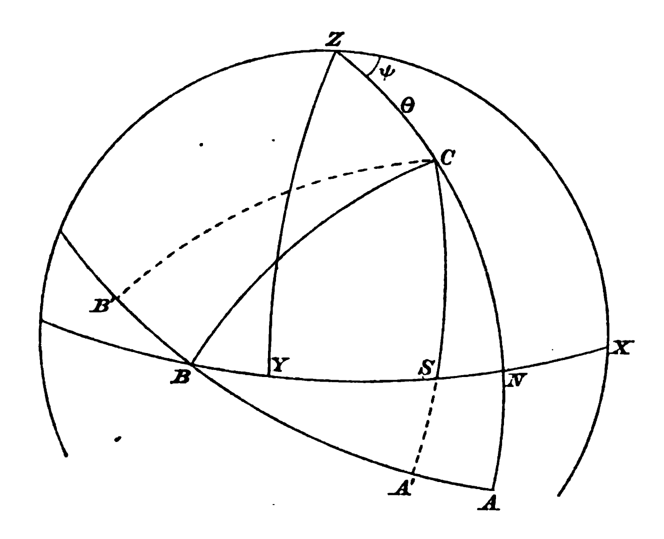
$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} - A\omega_2\theta_3 + C\omega_3\omega_2 &= L \\ A\frac{d\omega_2}{dt} - C\omega_3\omega_1 + A\omega_1\theta_3 &= M \\ C\frac{d\omega_3}{dt} \qquad\qquad\qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass $\omega_3$ constant ist. Wir wollen diese Constante mit $n$ bezeichnen.

Die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$ und $\omega_2$ ergeben sich durch Auflösung der beiden anderen Gleichungen. Die Lösung erhält man durch fortgesetzte Annäherung, indem man $\omega_1$ und $\omega_2$ als klein im Vergleich mit $n$ betrachtet.

Zuerst wollen wir die Annahme machen, die Bahn des störenden Körpers liege im Raum fest. Diese Annahme stimmt bei der Sonne mit der Wirklichkeit nahezu überein, bei dem Mond dagegen weniger genau. Diese Einschränkung des vorliegenden Problems vereinfacht seine Lösung sehr. Man kann nun als Bezugsaxen im Raum zwei zueinander senkrechte Gerade $GX$, $GY$ in der Ebene der Bahn und eine dritte Axe $GZ$ wählen, die normal zu dieser Ebene ist.

§ 522. In den obigen Bewegungsgleichungen können wir die Grösse $\theta_3$ beliebig wählen. Wir wollen die Wahl so treffen[1]), dass




die Ebene, in welcher die Axen $GC$, $GA$ liegen, auch $GZ$ enthält. Alsdann ist $\theta_3$ die Winkelgeschwindigkeit der Ebene $ZGC$ um $GC$. Die

1) Man hätte auch sehr passend zu Bezugsaxen die Figurenaxe $GC$ und die sich auf der Erde bewegenden Axen $GA'$, $GB'$ nehmen können, wobei $GB'$ die Axe des resultirenden Paares ist, welches durch die Wirkung des störenden Körpers auf die Erde erzeugt wird. In diesem Fall bewegt sich die Ebene $GA'$ so, dass sie stets den störenden Körper $S$ enthält; $\theta_3$ ist alsdann die Winkelgeschwindigkeit von $CS$ um $C$ und daher eine kleine Grösse von der Ordnung $n'$. Wir können daher in den Gleichungen (1) die kleinen Glieder $\omega_2\theta_3$ und $\omega_1\theta_3$ vernachlässigen. Die Gleichungen werden dann

$$A\frac{d\omega_1}{dt} + Cn\omega_2 = 0, \quad A\frac{d\omega_2}{dt} - Cn\omega_1 = M = -3\varkappa(C-A)\cos\alpha\cos\gamma,$$

Geschwindigkeit von $A$ in der Richtung $AB$ wird daher sowohl durch $\theta_3$ als durch $\sin ZA \cdot d\psi/dt$ dargestellt, worin $\psi$ den Winkel bezeichnet, welchen die Ebene $ZGC$ mit irgend einer festliegenden Ebene $ZGX$ bildet. Setzt man sie gleich, wie bei der Bildung der dritten Euler-schen geometrischen Gleichung, so ist

$$\theta_3 = \cos\theta \frac{d\psi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Wenn man mit $\theta$, wie gewöhnlich, den Winkel $ZC$ bezeichnet, so erhält man weiter die beiden geometrischen Gleichungen

$$\omega_1 = -\sin\theta \frac{d\psi}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\theta}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Sie ergeben sich unmittelbar aus der Figur, lassen sich aber auch aus den Euler'schen geometrischen Gleichungen ableiten, wenn man in ihnen $\psi = 0$ setzt; vergl. Bd. 1.

Die Glieder $\theta_3\omega_1$ und $\theta_3\omega_2$ in den Differentialgleichungen (1) enthalten die Quadrate der gesuchten kleinen Grössen. Da sowohl $d\theta/dt$ als $d\psi/dt$, wie sich zeigen wird, von derselben Ordnung, wie die störenden Momente $L$ und $M$ sind, *so werden im Folgenden diese*

---

worin der Werth von $M$ sich sofort aus § 519 ergibt und in unserm Fall $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \gamma$ ist. Eliminirt man $\omega_2$, so folgt

$$\frac{d^2\omega_1}{dt^2} + \left(\frac{Cn}{A}\right)^2 \omega_1 = -\frac{Cn}{A^2} M.$$

Da der Winkelabstand $\gamma$ des störenden Körpers von dem Pol der Erde sich sehr langsam ändert, so ist das Glied auf der rechten Seite nahezu constant. Wird diese Annäherung als hinreichend angesehen, so hat man

$$\omega_1 = \frac{3\varkappa}{2n} \frac{C-A}{C} \sin 2\gamma, \quad \omega_2 = 0.$$

Diese Gleichungen sind in der That nahezu richtig, wenn man das periodische Glied berücksichtigt und voraussetzt, dass $S$ sich langsam bewegt. Denn setzt man $M = M_0 + \Sigma P \sin(pt + Q)$, worin $p$ klein ist, so wird

$$\omega_1 = -\frac{M_0}{Cn} - \sum \frac{CnP}{C^2n^2 - A^2p^2} \sin(pt + Q)$$

und bei Vernachlässigung des kleinen Gliedes $p^2$ in dem Nenner, wie zuvor, $\omega_1 = -\frac{M}{Cn}$.

Die Bewegung der Axe $C$ im Raum ist daher nur der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1$ um die Axe $A'$ zu verdanken. Da die Ebene $A'C$ sich so bewegt, dass sie immer den störenden Körper $S$ enthält, so bewegt sich die Figurenaxe $GC$ in jedem Augenblick senkrecht zu der Ebene, welche $GC$ und den störenden Körper enthält (d. h. $C$ bewegt sich immer senkrecht zu $SC$, vergl. die Figur auf S. 385) mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{3\varkappa}{2n}\frac{C-A}{C}\sin 2\gamma$. Zerlegt man die letztere in der Richtung von $ZC$ und senkrecht zu $ZC$, so lassen sich die Gleichungen (7) im Text leicht ableiten und die weitere Entwickelung kann so, wie oben, weitergeführt werden.

*beiden Glieder vernachlässigt.* Nur für den Augenblick wollen wir sie noch beibehalten, um zu zeigen, wie sie die stationäre Bewegung beeinflussen. Die Bewegungsgleichungen nehmen dann die Form an

$$\left.\begin{aligned} -\sin\theta\,\frac{d^2\psi}{dt^2} - 2\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt} + \frac{Cn}{A}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{L}{A} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{Cn}{A}\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} &= \frac{M}{A} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (4).$$

§ 523. Es sind nun die Grössen von $L$ und $M$ zu ermitteln. $S$ möge der störende Körper sein und sich in der Richtung von $X$ nach $Y$ hin bewegen. Wie es in der Astronomie in der Regel zu geschehen pflegt, wollen wir annehmen, die Länge $l$ von $S$ werde in der Bewegungsrichtung von einer festen Linie in der $XY$-Ebene aus gemessen, sagen wir, von der $X$-Axe aus. Alsdann ist $SN = l - \psi$ und $BS = \frac{1}{2}\pi - (l - \psi)$. Ferner ist $\psi - \frac{1}{2}\pi$ die Länge des aufsteigenden Knotens, in welchem die Ebene der Bahn von $S$ den Aequator schneidet. Wenn $S$ die Sonne vorstellt, so heisst dieser Knoten der Frühlingsnachtgleichenpunkt. Nach § 519 erhält man

$$\begin{aligned} L &= -3\varkappa(B - C)\cos\beta\cos\gamma = -3\varkappa(A - C)\sin SN\cos SN\sin\theta \\ &= \frac{3}{2}\varkappa(C - A)\sin\theta\sin 2(l - \psi) \quad (5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= -3\varkappa(C - A)\cos\alpha\cos\gamma = -3\varkappa(C - A)\cos^2 SN\sin\theta\cos\theta \\ &= -\frac{3}{2}\varkappa(C - A)\sin\theta\cos\theta\,\{1 + \cos 2(l - \psi)\} \quad (6). \end{aligned}$$

Diese Werthe von $L$ und $M$ enthalten die beiden kleinen Multiplicatoren $\varkappa$ und $(C - A)$. Sie sind nicht die vollständigen Werthe von $L$ und $M$, sondern nur die Hauptglieder (§ 514). Wir wollen also annehmen, das Quadrat von $\varkappa(C - A)$ sei zu vernachlässigen. Der mittlere Werth von $\varkappa$ ist $n'^2$, unter $n'$ die Winkelgeschwindigkeit des störenden Körpers verstanden. Das Verhältniss $n'/n$ ist sehr klein; es beträgt etwa $\frac{1}{27}$ für den Mond und $\frac{1}{365}$ für die Sonne.

Aus § 519 sieht man, dass $\varkappa$ den Factor $(R_0/R)^3$ enthält. Wird die Excentricität $e'$ der Bahn des störenden Körpers nicht vernachlässigt, auch dann nicht, wenn sie mit $n'^2(C - A)$ multiplicirt ist, so muss man für $R$ und auch für $l$ ihre Werthe aus der Theorie der elliptischen Bewegungen in (5) und (6) substituiren. Wie bekannt, hat der Ausdruck für $l$ die Gestalt

$$l = n't + \varepsilon' + 2e'\sin(n't + \varepsilon' - \omega') + \text{etc.} \quad . \; . \; . \quad (7);$$

für den reciproken Werth von $R$ existirt eine ähnliche Formel. In diesen Reihen sind die Coefficienten der trigonometrischen Glieder und die Coefficienten von $t$ in den Argumenten im Vergleich mit $n$ sämmtlich klein.

§ 524. **Die stationäre Bewegung oder Präcession zu finden.** Man beachte, dass die Grössen $L$ und $M$ nur ein einziges Glied enthalten, welches nicht eine explicite Function der Länge des störenden Körpers ist. Die stationäre Bewegung findet man, wenn dieses Glied allein beibehalten wird. Man erhält daher $L = 0$, $M = -\frac{3}{2}\varkappa(C - A)\sin\theta\cos\theta$. Den Differentialgleichungen wird genügt, wenn man

$$\theta = \alpha, \quad d\psi/dt = \mu$$

setzt, worin $\alpha$ und $\mu$ zwei Constante sind, welche die Gleichung

$$\sin\alpha\left\{A\cos\alpha\mu^2 - Cn\mu - \frac{3}{2}\varkappa(C - A)\cos\alpha\right\} = 0$$

erfüllen. Da $\alpha$ im Fall der Erde etwa $23\frac{1}{2}^0$ ist, so muss der quadratische Factor Null sein. Da $n$ nicht klein ist, so ergeben sich daraus zwei Werthe für $\mu$, von denen der eine $-\frac{3\varkappa}{2n}\frac{C-A}{C}\cos\alpha$ sehr nahe kommt, während der andere nahezu $\frac{C}{A}n\sec\alpha$ ist.

Wie bei dem analogen Fall des Kreisels in § 207 kann jeder dieser Werthe von $\mu$ der richtige sein, wenn man der Erde die entsprechenden Anfangsbedingungen gibt.

Aus dem zweiten Werth von $\mu$ erhält man, nach (3),

$$\omega_1 = -(C/A)n\operatorname{tg}\alpha$$

und alsdann kann die Rotationsaxe mit der Axe der Figur nicht nahezu zusammenfallen. Die Anfangsbedingungen müssen daher derart gewesen sein, dass $\mu$ den kleineren Werth annahm.

Die der Wirklichkeit entsprechende stationäre Bewegung ist daher eine solche, dass der Pol $C$ der Erde einen kleinen Kreis vom Radius $\alpha$ um den Pol $Z$ der Bahn des störenden Körpers mit einer rückwärts schreitenden Winkelgeschwindigkeit gleich $\frac{3\varkappa}{2n}\frac{C-A}{C}\cos\alpha$ beschreibt.

Man bemerke: wenn die Winkelgeschwindigkeit $n$ der Erde um ihre Axe sehr klein oder Null wäre, so würden die Wurzeln der quadratischen Gleichung für $\mu$ eine andere Gestalt erhalten, der eben gefundene Ausdruck für die rückschreitende Bewegung des Poles der Erde also aufhören auch nur annähernd richtig zu sein.

Man beachte ferner: wenn der Pol des Aequators sehr dicht bei dem Pol der Ecliptik oder nahezu 90° von ihm entfernt läge, so würde eine andere stationäre Bewegung eintreten. Wie es bei dem schon oben erwähnten Kreisel der Fall war, würde man die Schwingungen oder Nutationen um diesen Bewegungszustand auf andere Art analytisch zu behandeln haben.

§ 525. **Die Nutation zu finden.** Wir haben zunächst nun die Glieder in $L$ und $M$ zu betrachten, welche die Länge $l$ des störenden

Körpers explicite enthalten. Um zugleich die Differentialgleichungen linear zu machen, könnten wir $\theta = \alpha + \theta_1$, $d\psi/dt = \mu + d\psi_1/dt$ setzen, wobei die Zusatzglieder $\theta_1$ und $d\psi_1/dt$ so klein sind, dass man ihre Quadrate vernachlässigen kann. Diese Substitution ist jedoch nicht nöthig; denn, nachdem jetzt festgestellt ist, dass der constante Theil $\mu$ von $d\psi/dt$ von der Ordnung $\varkappa(C-A)$ ist, kann man sofort die Glieder $\theta_3\omega_1$ und $\theta_3\omega_2$ aus den Differentialgleichungen (1) weglassen. Sie nehmen dann die lineare Form an

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} + Cn\omega_2 &= L \\ A\frac{d\omega_2}{dt} - Cn\omega_1 &= M \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Da die Bewegung des störenden Körpers im Vergleich mit der Winkelgeschwindigkeit der Erde um ihre Axe sehr langsam erfolgt, so ist $l$ und daher auch $L$ und $M$ nahezu constant. Sieht man dies als ausreichende Annäherung an, so erhält man sofort

$$\omega_1 = -\frac{M}{Cn}, \quad \omega_2 = \frac{L}{Cn}.$$

Daraus ergibt sich nach (3), (5) und (6)

$$\left.\begin{aligned} \omega_2 = \frac{d\theta}{dt} &= \frac{3\varkappa}{2n}\frac{C-A}{C}\sin\alpha\sin 2(l-\psi) \\ -\frac{\omega_1}{\sin\alpha} = \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{3\varkappa}{2n}\frac{C-A}{C}\cos\alpha\,\{1+\cos 2(l-\psi)\} \end{aligned}\right\} \cdot \quad (9).$$

§ 526. Um die Bewegung des Poles der Erde im Raum in Bezug auf den Pol der Bahn des störenden Körpers als Coordinatenanfang zu finden, integrire man die Gleichungen (9). Setzt man für $l$ seinen Näherungswerth $l = n't + \varepsilon'$, so wird

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \alpha - \frac{3\varkappa}{4nn'}\frac{C-A}{C}\sin\alpha\cos 2(l-\psi) \\ \psi &= \text{Constante} - \frac{3\varkappa}{2nn'}\frac{C-A}{C}\cos\alpha\left\{l + \frac{1}{2}\sin 2(l-\psi)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

In diesen Gleichungen ist $l - \psi + \frac{1}{2}\pi$ die Länge des störenden Körpers, von dem aufsteigenden Knoten der Bahn aus gemessen. Letzterer ist, wenn der Körper die Sonne ist, wie schon bemerkt, der Frühlingstagundnachtgleichenpunkt.

Wenn der Anfang, von welchem aus $l$ und $\psi$ gemessen wird, derart ist, dass beide zugleich verschwinden, so ist die Integrationsconstante in der zweiten Gleichung Null.

§ 527. Der Grad der Annäherung der Gleichungen (9) lässt sich auf folgende Art ermitteln. Durch Elimination von $\omega_2$ aus den Gleichungen (8) erhält man

$$\frac{d^2\omega_1}{dt^2} + \frac{C^2n^2}{A^2}\omega_1 = \frac{1}{A}\frac{dL}{dt} - \frac{Cn}{A^2}M.$$

Da wir die Quadrate von $\varkappa(C-A)$ vernachlässigen, so können wir, bei der Berechnung des Werthes der rechten Seite mittelst der Ausdrücke (5) und (6), $\theta = \alpha$ und $\psi = \mu t + \nu$ setzen. Wir wollen annehmen, man fände nach Substitution der Werthe von $l$ und $R$ aus (7)

$$M - \frac{A}{Cn}\frac{dL}{dt} = \Sigma F \cos(\lambda t + f),$$

worin der constante Theil von $M$ durch $\lambda = 0$ gegeben ist und alle übrigen Werthe von $\lambda$ klein sind. Löst man nun auf, so wird

$$\omega_1 = -\sum \frac{FCn}{C^2 n^2 - A^2 \lambda^2} \cos(\lambda t + f).$$

Da $F$ sowohl als $\lambda$ klein sind, so kann man das kleine Glied $\lambda^2$ im Nenner weglassen und erhält

$$\omega_1 = -\frac{1}{Cn}\sum F \cos(\lambda t + f) = -\frac{M}{Cn} + \frac{A}{C^2 n^2}\frac{dL}{dt} \quad \ldots \quad (10)$$

und ebenso

$$\omega_2 = \frac{L}{Cn} + \frac{A}{C^2 n^2}\frac{dM}{dt} \quad \ldots \quad (11).$$

Bei dieser Annäherung haben wir die Glieder von der Ordnung $\lambda^2 M$ oder $\lambda^2 L$ nicht berücksichtigt. Aus (7) ist ersichtlich, dass es äquivalent damit ist, wenn man die Glieder von der Ordnung $(n'/n)^2 M$ oder $(n'/n)^2 L$ vernachlässigt.

Aus (5) und (6) geht hervor, dass die Glieder $dL/dt$ und $dM/dt$ ausser dem kleinen Factor $\varkappa(C-A)$ einen andern kleinen Factor $n'$ enthalten, den die Differentiation von $l$ liefert. Diese Glieder sind daher von der Ordnung $(n'/n)L$ oder $(n'/n)M$. Da die ersten Glieder auf der rechten Seite von (10) und (11) Nutationen erzeugen, die sehr klein oder nur grade noch bemerkbar sind, so ist es nicht nöthig, die zweiten Glieder zu berücksichtigen. Da sie dieselbe allgemeine Form nämlich $P \cos 2l$ und $Q \sin 2l$ haben, wie die ersten, so erkennen wir, dass sie bei der Integration nur durch solche kleine Factoren getheilt werden, die auch das erste Glied theilen (siehe § 337). Lässt man dann diese Glieder weg, so erhält man dasselbe Resultat wie in (9).

§ 528. Die Integration in § 526 ist nicht ganz einwurfsfrei. Denn; substituirt man für $l$ seinen vollen in (7) gegebenen elliptischen Werth, so nimmt jedes der beiden Momente $L$ und $M$ die Form einer Reihe von Gliedern wie $F \cos(\lambda t + f)$ an, worin die Werthe von $\lambda$ klein sind. Nach der Integration werden diese Glieder durch den Divisor $\lambda$ vergrössert und falls vielleicht ein constantes Glied vorkommt, so wird es nach der Integration mit $t$ multiplicirt.

Durch eine geringe von Laplace vorgeschlagene Modification dieser Gleichungen lässt sich die Schwierigkeit beseitigen. Nimmt man für $l$ seinen aus der Lehre von *den elliptischen Bewegungen* bekannten Werth, so erhält man

$$R^2 \frac{dl}{dt} = \text{Constante}.$$

Diese Constante ist offenbar $R_0^2 n' (1 - e'^2)^{\frac{1}{2}}$. Substituirt man für $\varkappa$ seinen Werth aus § 519 und *nimmt $l$ zur unabhängigen Variabelen,* so nehmen die Gleichungen (9) die Gestalt an

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{PR_0 \sin 2(l-\psi)}{R(1-e'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{d\psi}{dl} = Q + \frac{P' R_0 \cos 2(l-\psi)}{R(1-e'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

worin $P$, $P'$ und $Q$ kleine constante Glieder sind.

Aus der Gleichung der Ellipse folgt $\frac{R_0(1-e'^2)}{R} = 1 + e' \cos(l - L)$. Substituirt man diesen Werth von $R$, so lässt sich die Integration ohne Schwierigkeit ausführen. Es ist jedoch klar, dass die Combinationen des einen Terms $\cos(l - L)$ mit $\sin 2(l - \psi)$ und $\cos 2(l - \psi)$ nur periodische Glieder erzeugen können. Sie haben die Form

$$\frac{\sin}{\cos}\left\{2(l-\psi) \pm (l-L)\right\}$$

und sind nach der Integration nur durch denselben kleinen Factor $n'$ theilbar, der die von $e'$ unabhängigen Glieder theilt.

Da $e'$ klein ist, so behalten die Glieder, welche von der Excentricität der Bahn des störenden Körpers abhängen, ihre verhältnissmässige Bedeutungslosigkeit im Vergleich mit den Hauptgliedern in den Gleichungen (12) immer bei.

In Gould's *Astronomical Journal,* Bd. 13, 1893 wird eine Berechnung von Prof. G. W. Hill mitgetheilt, welche nicht nur die elliptischen Werthe der Mondcoordinaten enthält, sondern auch solche Ungleichheiten in der Theorie des Mondes bis zur siebenten Ordnung einschliesslich, welche eine nennenswerthe Wirkung hervorbringen können. Schon früher hatte Prof. Stone eine ähnliche Berechnung veröffentlicht, in welcher Glieder von der dritten Ordnung eingeschlossen sind; siehe die *Monthly Notices of the Astronomical Society,* Bd. 28, 1868 und 53, 1893.

§ 529. Wir wollen nun die geometrische Bedeutung der Gleichungen (12) untersuchen. Der Kürze halber setzen wir $S = \frac{3\varkappa}{2nn'}\frac{C-A}{C}$, so dass also nach § 519 entweder

$$S = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{n'}{n} \quad \text{oder} \quad S = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{n''}{n}\frac{1}{1+\nu}$$

ist, je nachdem die Sonne oder der Mond der störende Körper ist, wobei die Bahn des störenden Körpers in beiden Fällen als kreisförmig angesehen wird.

Betrachten wir zuerst das Glied $-S\cos\theta l$ in dem Ausdruck für $\psi$. Ein Punkt $C_0$ beschreibe um den Pol $Z$ der Bahn des störenden Planeten einen kleinen Kreis und der Abstand $CZ$ sei constant und dem mittleren Werth von $\theta$ gleich. Die Geschwindigkeit sei gleichförmig und gleich $Sn'\cos\theta\sin\theta$ und die Bewegungsrichtung der des störenden Körpers *entgegengesetzt.* $C_0$ stellt dann die Bewegung des Erdpoles dar, soweit es dieses Glied betrifft. Diese gleichförmige Bewegung heisst die Präcession.

Zunächst betrachten wir dann die beiden Glieder

$$\delta\theta = \frac{1}{2}S\sin\theta\cos 2l, \quad \delta\psi = \frac{1}{2}S\cos\theta\sin 2l.$$

Setzt man $x = \sin\theta\,\delta\psi$, $y = \delta\theta$, so wird

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}S\cos\theta\sin\theta\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}S\sin\theta\right)^2} = 1,$$

welches die Gleichung einer Ellipse ist.

Wir beschreiben nun um $C_0$ als Mittelpunkt eine Ellipse, deren Halbaxen $\frac{1}{2}S\cos\theta\sin\theta$ und $\frac{1}{2}S\sin\theta$ senkrecht zu $ZC$ sind bez. die Richtung von $ZC$ haben, und ein Punkt $C_1$ durchlaufe diese Ellipse in einer Periode, welche der Hälfte der Periode des störenden Körpers gleich kommt. Die Geschwindigkeit von $C_1$ sei ferner dieselbe, wie die eines materiellen Punktes, der von einer centralen im Mittelpunkt liegenden und wie der Abstand variirenden Kraft angezogen wird. Alsdann stellt die Bewegung von $C_1$ die des Erdpoles dar, wenn sowohl die Präcession als die Haupttheile der Nutation auf ihn einwirken.

Wünscht man in unsere Näherungswerthe für $\theta$ und $\psi$ ein kleines Glied höherer Ordnung einzuschliessen, so kann man seine Wirkung durch die Bewegung eines Punktes $C_2$ darstellen, der eine andere kleine Ellipse beschreibt, die $C_1$ zum Centrum hat. Auf ähnliche Art, indem man successive Ellipsen zieht, lassen sich alle Glieder von $\theta$ und $\psi$ darstellen.

§ 530. **Numerische Resultate.** Die vorstehenden Untersuchungen sind selbstverständlich nur Annäherungen. Zuerst wurden in den Differentialgleichungen die Quadrate der Verhältnisse von $\omega_1$ und $\omega_2$ zu $n$ vernachlässigt und später periodische Glieder, die der $(n'/n)^{\text{te}}$ Theil der beibehaltenen sind. Aus den Gleichungen (3) und (12) ist ersichtlich, dass die zweite Gruppe von weggelassenen Gliedern viel grösser als die erste ist und doch sind diese Glieder, wenn die Sonne der störende Körper ist, nur etwa der $\frac{1}{365}$ ste Theil der beibehaltenen und, wenn es der Mond ist, nur der $\frac{1}{27}$ ste Theil von Gliedern, die selbst unbemerkbar sind.

Wir haben auch die Erde als Umdrehungskörper angesehen und demnach $A - B$ gleich Null gesetzt, eine Annahme, die nicht genau richtig sein kann.

§ 531. In dem Fall der Sonne ist $S = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{n'}{n}$, die Präcession in einem Jahr daher $\frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{n'}{n}\cos\theta\cdot 2\pi$. Wie aus der Lehre von der Gestalt der Erde bekannt ist, hat man Grund anzunehmen, der Werth von $(C-A)/C$ liege zwischen 0,0031 und 0,0033. Ferner ist $n'/n = \frac{1}{365}$ und $\theta = 23^0\,8'$. Daraus erhält man eine jährliche Präcession von etwa 15″,42. Aehnlich ergeben sich die Coefficienten der Solarnutation in $\psi$ und $\theta$ gleich 1″,23 bez. 0″,53. Nimmt man an, die Mondbahn liege fest, so findet man ähnlich auch die von dem Mond in Bezug auf den Pol der Mondbahn erzeugte Bewegung. In diesem Fall ist $S = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{n''}{n}\frac{1}{1+\nu}$. Der Werth von $\theta$ variirt zwischen

den Grenzen $23^0 \pm 5^0$. Setzt man $n''/n = \frac{1}{27}$, $\nu = 80$, $\theta = 23^0$, so erhält man eine Präcession in einem Jahr, die etwas mehr als das Doppelte der von der Sonne herrührenden beträgt. Die Coefficienten der Nutationen sind dagegen etwa ein Sechstel der von der Sonne erzeugten.

§ 532. **Die Complementärfunctionen.** In der bisherigen Lösung haben wir die Complementärfunctionen noch nicht in Betracht gezogen. Wenn man von allen störenden Kräften absieht und die Erde betrachtet, als wäre sie einfach in Rotation gesetzt und sich selbst überlassen worden, so nehmen die Gleichungen in § 525 die Form an

$$A\omega_1' + Cn\omega_2 = 0, \quad A\omega_2' - Cn\omega_1 = 0.$$

Man findet leicht

$$\omega_1 = H\sin(qt + K), \quad \omega_2 = -H\cos(qt + K),$$

worin $q = Cn/A$ ist und $H, K$ zwei willkürliche Constanten bedeuten. Diese Glieder würden, wenn sie von merkbarer Grösse sind, die Wirkung haben, eine kleine Schwingung der Erdaxe hervorzubringen. *Diese Schwingung wird manchmal die Euler'sche Nutation genannt.*

Da die Anfangswerthe von $\omega_1$ und $\omega_2$ unbekannt sind, so muss die Grösse von $H$ durch Beobachtung der in der Lage des Erdpoles hervorgebrachten Aenderungen bestimmt werden. Weil nun die Breiten der Orte auf der Erde nahezu constant sind, so ist der Schluss gerechtfertigt, dass die Grösse von $H$ nahezu unmerkbar ist.

§ 533. Die Wirkung dieser Complementärfunctionen auf die Bewegung des Erdpoles wurde bereits in den §§ 180—182 untersucht. Es seien $i$ und $\gamma$ die Neigungen der Momentanaxe $GI$ und der invariablen Linie $GL$ gegen die Axe der Figur $GC$. Es ist dann $\operatorname{tg} i = H/n$ und $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg} i \cdot A/c$. Im Fall der Erde sind $A$ und $C$ nahezu gleich und $1 - A/c$ liegt nach verschiedenen Schätzungen zwischen 0,0031 und 0,0033. Es unterscheiden sich daher $\gamma$ und $i$ höchstens um den $\frac{1}{306}$ten Theil eines jeden und müssen daher als nahezu gleich angesehen werden.

Wie in dem eben angezogenen Paragraphen erklärt wurde, beschreibt die Momentanaxe $GI$ im Raum einen graden Kegel, dessen Axe $GL$ ist und dessen sphärischer Radius $i - \gamma$ gleich kommt, wobei die Zeit einer vollständigen Umdrehung einem Sternentag nahezu gleich ist. Die Momentanaxe liegt daher nahezu im Raum fest und fällt mit $GL$ zusammen.

Die Momentanaxe und die invariable Linie beschreiben in dem Körper grade Kegel, deren gemeinschaftliche Axe die Figurenaxe ist, und die Zeit einer Umdrehung beträgt den $[\sin\gamma/\sin(i-\gamma)]$ten Theil eines Tages. Die Periode ist daher 306 bis 315 Tage je nach dem Werth, den man für $A/c$ genommen hat. *Sie wird oft die Euler'sche zehnmonatliche Periode genannt.*

§ 534. Die gewöhnliche Art, auf welche die Breite eines Ortes $P$ ermittelt wird, hängt von Beobachtungen ab, die an einem Stern in dem Zwischenraum von einem halben Tag gemacht werden. Die gefundene Breite ist daher der Winkel zwischen $GP$ und der invariablen Linie. Da die invariable Linie sich in

dem Körper um die Figurenaxe dreht, so würde die Breite eine zehnmonatliche Periode haben, deren Grösse $H$ ist. Um die möglichen Aenderungen in der Breite zu entdecken, hat man besondere Methoden benutzt, die jedoch hier nicht beschrieben werden können.

Eine Reihe von Beobachtungen, die in Berlin in den Jahren 1884—86 gemacht wurden, um den Coefficienten der Abweichung zu bestimmen, führte zu dem Resultat, dass die Breite in einem Jahr um 0″,2 abgenommen hatte. Später zu Berlin, Potsdam und Prag 1889—90 angestellte Beobachtungen zeigten, dass kleine periodische Aenderungen in der Breite vorkommen, die eine halbe Secunde betragen. Da die Aenderungen an den drei Orten dasselbe Vorzeichen haben und nahezu demselben Gesetz folgen, so können sie unmöglich die Folge rein örtlicher Ursachen sein. Sie scheinen eine jährliche Ungleichheit anzuzeigen. In Nr. 3055 der Astr. Nachr. wird mitgetheilt, dass die Beobachtungen im Jahr 1891 fortgesetzt wurden und die früheren Resultate bestätigten. Die Breite eines Ortes kann man bei Benutzung der besten Instrumente und der grössten Sorgfalt bis auf eine zehntel Secunde genau bestimmen. Dieses entspricht etwa 2½ bis 3 Metern auf der Oberfläche der Erde; es lässt sich also eine Aenderung der Stellung des Instrumentes in demselben Zimmer entdecken (Flammarion, *Astronomie*, April 1891). Bei einer solchen Genauigkeit lässt sich erwarten, dass in nicht allzulanger Zeit die Unsicherheiten, die in dem vorliegenden Problem noch bestehen, beseitigt sein werden. In einer Vorlesung, die Prof. Förster in der Geographischen Gesellschaft zu Berlin 1891 hielt, gab er an, dass gleichzeitige Beobachtungen in Berlin und Honolulu für die Dauer eines Jahres zu diesem Zweck gemacht werden sollten.

Da beide Orte nahezu auf entgegengesetzten Meridianen liegen, so müssten ihre Breiten sich um gleiche aber entgegengesetzte Grössen ändern, wenn die Aenderungen durch Bewegungen der Momentanaxe verursacht werden. Die Beobachtungen zu Honolulu ergeben denn auch, dass die Bewegungen der Momentanaxe gross genug sind, um merkliche Aenderungen in der Breite dieses Ortes in der erwarteten Richtung hervorzubringen.

§ 535. Einen grossen Schritt vorwärts in der Erklärung dieser bemerkenswerthen Breitenänderungen hat Dr. Chandler gemacht. Seine Resultate findet man in Gould's *Astronomical Journal* aus den Jahren 1891—92. Er fand, indem er nur die Resultate der Beobachtung benutzte und jede dynamische Theorie bei Seite liess, dass die Veränderungen in der Breite sich durch zwei oscillatorische Glieder darstellen lassen, deren Perioden 427 Tage respective ein Jahr sind. Die Periode des ersten Gliedes steht in directem Widerspruch mit der Euler'schen, da sie statt zehn vierzehn Monate beträgt. Dieser Widerspruch scheint auf den ersten Blick die Chandler'sche Periode unwahrscheinlich zu machen. Prof. Newcomb hat aber darauf hingewiesen, dass die Euler'sche Periode auf der Hypothese beruht, dass die Erde ein absolut starrer Körper sei. In einer Abhandlung *on the Dynamics of the earth's rotation,* die in den *Monthly Notices of the Astronomical Society*, März, 1892 veröffentlicht wurde, führt er aus, dass die allgemeine Wirkung der Elasticität der Erde darin besteht, die Euler'sche Periode zu verlängern [1]).

---

1) Kurz gefasst, ist das Verfahren Newcomb's wie folgt. Die Centrifugalkräfte in Folge der Rotation um $GI$ verursachen eine kleine Deformation der Erde derart, dass die Figurenaxe eine Lage $GC'$ zwischen $GC$ und $GI$ einzunehmen sucht. Da $I$ sich in dem Körper sehr langsam bewegt, so hat die Figurenaxe Zeit genug, in die Lage $GC'$ zu kommen, ehe $GI$ sich merkbar bewegt hat. Wir betrachten daher die Erde in jedem Augenblick als einen starren Körper, dessen thatsächliche Figurenaxe $GC'$ ist. Die Winkelgeschwindigkeit

Die Amplitude des Chandler'schen Gliedes ist etwa 0",12, während dasjenige mit der jährlichen Periode nicht constant ist, sondern langsam von 0",04 bis 0",02 variirte. Dr. Chandler bemerkt, dass um das Jahr 1884 der Trägheitspol und der Pol der Momentanaxe, auf der Erdoberfläche gemessen, etwa 9 Meter voneinander abstanden. Das Glied mit der jährlichen Periode ist gewöhnlich den jährlichen meteorologischen Veränderungen auf der Erde zugeschrieben worden.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Perioden der beiden Glieder ist sieben Jahre; Aenderungen der Breite wiederholen sich also in diesem Zeitraum.

Wenn ferner die beiden Schwingungen zusammengesetzt werden, so ist die Geschwindigkeit der Aenderung der Breite nicht gleichförmig. Zu der einen Zeit nehmen die Grössen der zwei Schwingungen beide zu und ihre Aenderungsgeschwindigkeiten sind zu addiren, ein ander Mal sind sie zu subtrahiren; siehe § 89 über die Uebertragung der Schwingungen. Daraus folgt, wie Prof. Förster bemerkt, dass eine Reihe von Beobachtungen für den Nachweis der Aenderung in der Breite günstig sein kann, während eine andere zu verschiedener Zeit vorgenommene vielleicht nur schwache Spuren von Aenderungen zeigt.

In Verbindung mit dieser doppelten Schwingung ist das Problem von Helmert am Ende des § 24 von Interesse. Man beachte auch, dass die Verrückung der Momentanaxe durch die nahe Uebereinstimmung der Periode der Euler'schen Nutation mit der Periode der meteorologischen Störung vergrössert werden kann.

§ 536. Wir bemerken noch, dass die Complementärfunctionen durch die Euler'sche Nutation nicht genau dargestellt werden. Nimmt man nur die Kräfte, welche die Präcession verursachen, so sind die Bewegungsgleichungen nach § 522

$$-A\sin\theta\psi''-2A\cos\theta\theta'\psi'+Cn\theta'=0,$$

$$A\theta''-A\sin\theta\cos\theta\psi'^2+Cn\sin\theta\psi'=-\frac{3}{2}\varkappa(C-A)\sin\theta\cos\theta,$$

worin die Accente Differentiationen nach der Zeit bezeichnen. Da die Präcession dadurch bestimmt wird, dass man $\theta=\alpha$ und $\psi'=\mu$ setzt, so substituiren wir $\theta=\alpha+x$ und $\psi=\mu t+y$, um die Nutationen zu erhalten. Auf der rechten Seite treten offenbar Glieder auf, welche die erste Potenz von $x$ enthalten und obgleich sie kleine Grössen von der zweiten Ordnung sind, so müssen sie doch aus dem in § 356 angegebenen Grund untersucht werden. Ebenso wie in der Theorie des Mondes die Glieder von der Form $C\theta-\alpha$, modificiren sie die erste Annäherung, § 359.

Führt man diese Substitutionen aus, so ergibt sich, dass eine Wirkung dieser Glieder darin besteht, die Euler'sche Periode zu ändern. Ist $2\pi/q_1$ die geänderte Periode, so hat man

$$q_1=\frac{Cn}{A}+\frac{C-A}{C}\frac{3\varkappa}{n}\left(\cos^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2\alpha\right).$$

Der Werth von $q_1$ ist nur sehr wenig von dem durch $q$ in § 530 definirten verschieden. Da die Euler'sche Periode noch nicht so genau bekannt ist, dass dieser Unterschied von Bedeutung sein könnte (§ 532), so ist es nicht nöthig, die Wirkungen dieser kleinen Glieder eingehend zu besprechen.

---

und Periode von $GI$ um $GC'$ sind durch die Euler'sche Regel gegeben; die Winkelgeschwindigkeit um $GC$, die mittlere Lage von $GC'$, erhält man demnach, indem man die um $GC'$ in dem Verhältniss des Bogens $CI$ zu dem Bogen $C'I$ verringert. Die Periode von $GI$ um $GC$ ist in dem umgekehrten Verhältniss länger als die um $GC'$.

§ 537. **Beispiele.** Beisp. 1. Die Präcession der Erde ist die nämliche, ob sie nun als homogene von ähnlichen Ellipsoiden begrenzte Schale und ihr Inneres leer oder als durchaus massiv gedacht wird.

Beisp. 2. Wenn die Erde eine homogene Schale wäre, die nach aussen durch ein Sphäroid und nach innen durch eine concentrische Kugelfläche begrenzt wird, und deren Inneres mit einer vollkommenen Flüssigkeit von derselben Dichtigkeit, wie die Erde gefüllt ist, zu zeigen, dass die Präcession grösser sein würde, als wenn die Erde durchaus massiv wäre.

$(a, b, c)$ seien die Halbaxen des Sphäroids, $r$ der Radius der Kugel. Da nun nach § 529 die Präcession wie $(C-A)/C$ variirt, so wird sie in dem Verhältniss von $a^4c : a^4c - r^5$ vergrössert.

Beisp. 3. Wenn die Sonne doppelt so weit von der Erde entfernt wäre, wie sie jetzt ist, zu zeigen, dass die Solarpräcession sich für die Zeiteinheit auf ein Achtel ihres jetzigen Werthes, für das Jahr dagegen auf etwa ein Drittel dieses Werthes reduciren würde.

Beisp. 4. An einem Körper, der sich um einen festen Punkt dreht, greifen Kräfte an, die eine Rotation um eine zur Momentanaxe rechtwinklige Axe *hervorzubringen suchen;* man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit nur dann gleichförmig sein kann, wenn das Trägheitsellipsoid für den festen Punkt ein Sphäroid ist.

Die Axe, um welche die Kräfte eine Rotation hervorzubringen suchen, ist diejenige, um welche der Körper sich zu drehen anfangen würde, wenn er sich in Ruhe befände.

Beisp. 5. Ein Körper, der sich um seinen festliegenden Schwerpunkt frei drehen kann, wird von einem entfernten festen Massenpunkt angezogen und befindet sich dabei in stabilem Gleichgewicht. Man zeige, dass die Axe des kleinsten Momentes die Richtung nach dem Massenpunkt zu hat. Ferner, dass die Zeiten der Hauptschwingungen

$$2\pi\left\{\frac{B\varrho^3}{3M'(C-A)}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{bez.} \quad 2\pi\left\{\frac{C\varrho^3}{3M'(B-A)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

sind.

Ist der Körper die Erde und $M'$ die Sonne, zu zeigen, dass die kleinere der beiden Perioden etwa zehn Jahre beträgt.

§ 538. **Ungleiche Trägheitsmomente.** Die in § 521 benutzte Methode eignet sich sehr gut zur Ermittelung der Präcession und Nutation der Erde für eine erste wie auch für höhere Grade der Annäherung, wenn man die Erde als einaxigen Körper betrachtet. Obgleich man dieselbe Methode auch dann anwenden kann, wenn $A$ nicht gleich $B$ ist, so verliert sie doch sehr an Kürze. Wir wollen daher jetzt ein anderes Verfahren einschlagen, um zu bestimmen, wie sich die Präcession und Nutation ändert, wenn man alle drei Hauptträgheitsmomente als ungleich ansieht; ihre Verhältnisse freilich setzen wir dabei als nicht weit von der Einheit entfernt voraus.

Bezieht man die Bewegung auf die Hauptaxen, so werden die Euler'schen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\omega_1' - (B-C)\,\omega_2\omega_3 &= L = -3\varkappa(B-C)\cos\beta\cos\gamma \\ B\omega_2' - (C-A)\,\omega_1\omega_3 &= M = -3\varkappa(C-A)\cos\gamma\cos\alpha \\ C\omega_3' - (A-B)\,\omega_1\omega_2 &= N = -3\varkappa(A-B)\cos\alpha\cos\beta \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (1),$$

$$\left.\begin{aligned} \theta' &= \omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi \\ -\sin\theta\,\psi' &= \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi \\ \cos\theta\,\psi' + \varphi' &= \omega_3 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2).$$

Aus (1) ist ersichtlich, dass $\omega_1$, $\omega_2$ von derselben Ordnung, wie die Präcessionsconstante, d. h. $\varkappa (C - A)/C$ sind; da wir nun das Quadrat dieser Grösse nicht in Rechnung ziehen, so ist mithin das zweite Glied auf der linken Seite einer jeden der Gleichungen (1) zu vernachlässigen. Um $A\omega_1$, $B\omega_2$, $C\omega_3$ zu finden, braucht man daher nur die rechte Seite dieser Gleichungen zu integriren.

Verfährt man, wie in § 528, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \sin(l-\psi)\sin\varphi + \cos(l-\psi)\cos\theta\cos\varphi \\ \cos\beta &= \sin(l-\psi)\cos\varphi - \cos(l-\psi)\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\gamma &= \cos(l-\psi)\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \quad (3).$$

Die dritte der Gleichungen (2) zeigt, dass $\varphi'$ sich von einer Constanten, nämlich $n$, durch Grössen von der Ordnung der Präcession unterscheidet; wenn man daher das Product aus dieser Grösse und $n'/n$ weglässt, so kann man auf der rechten Seite der Gleichungen (1) setzen: $\varphi = nt + \varepsilon$ und bei der Integration $l$, $\theta$ und $\psi$ als Constante behandeln. Man erkennt, dass sich $n\int\cos\beta\,dt$ und $-n\int\cos\alpha\,dt$ von $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ nur durch constante Glieder unterscheiden. Diese constanten Glieder kann man ausser Acht lassen, weil sie die Complementärfunctionen darstellen, welche für sich untersucht werden; aus (2) geht ferner hervor, dass kleine constante Zusätze zu $\omega_1$ und $\omega_2$ nur kleine Glieder mit täglicher Periode in $\theta'$ und $\psi'$ zur Folge haben.

Man erhält daher

$$\omega_1 = \frac{3\varkappa}{n}\frac{C-B}{A}\cos\alpha\cos\gamma, \quad \omega_2 = \frac{3\varkappa}{n}\frac{C-A}{B}\cos\beta\cos\gamma.$$

Da wir die Quadrate von $(C-B)/A$ und $(C-A)/B$ vernachlässigt haben, so können wir mit demselben Grad der Annäherung in den Nennern dieser Ausdrücke $C$ für $A$ und $B$ schreiben.

Durch Substitution dieser Werthe von $\omega_1$, $\omega_2$ in die Gleichungen (2) wird

$$\theta' = \frac{3\varkappa}{n}\frac{2C-A-B}{2C}\sin\theta\sin 2(l-\psi) + R_1,$$

$$\psi' = -\frac{3\varkappa}{2n}\frac{2C-A-B}{2C}\cos\theta\{1+\cos 2(l-\psi)\} + R_2,$$

worin $R_1$ und $R_2$ nur Glieder enthalten, deren Periode etwa einen halben Tag beträgt und deren Coefficienten den kleinen Factor $\varkappa(A-B)/C$ enthalten. Der Werth von $(A-B)/C$ ist nicht bestimmt worden, es ist jedoch bekannt, dass er viel kleiner als $(C-A)/C$ ist. Da nur Glieder mit langen Perioden nach der Integration in Bezug auf $t$ von Bedeutung werden können, so kann man $R_1$ und $R_2$ überhaupt vernachlässigen.

Lässt man die Glieder $R_1$ und $R_2$ als durchaus unmerkbar weg, *so sind die Präcession sowohl als die Nutation der Erde mit ungleichen Trägheitsmomenten $A$, $B$, $C$ dieselben wie die der einaxigen Erde, deren Hauptträgheitsmomente $\frac{1}{2}(A+B)$, $\frac{1}{2}(A+B)$* und $C$ sind.

§ 539. Betrachten wir nun die dritte der Gleichungen (1). Da es von grosser Bedeutung ist, ob die Winkelgeschwindigkeit $\omega_3$ constant bleibt oder nicht, so ist es angezeigt, sie bis zu einem höheren Grad der Annäherung zu untersuchen. Die Gleichung, wie sie in (1) gegeben wurde, ist im Uebrigen genau; nur sind auf der rechten Seite einige kleine Glieder, die von den höheren reciproken Potenzen des Abstandes des störenden Körpers abhängen, vernachlässigt worden; siehe § 513. Die Werthe von $\omega_1$ und $\omega_2$ erhielt man durch Weglassen der Glieder

von der Ordnung $\varkappa(C-A)/C$ mit $n'/n$ multiplicirt. Setzt man sie in die kleinen Glieder ein, so wird

$$C\omega_3' - (A-B)\left(\frac{3\varkappa}{n}\right)^2 \frac{(C-A)(C-B)}{AB}\cos^2\gamma\cos\alpha\cos\beta = -3\varkappa(A-B)\cos\alpha\cos\beta.$$

Substituirt man nun für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ aus (3), so erhält man nur eine lange Reihe trigonometrischer Glieder, deren Perioden ungefähr einen halben Tag betragen und deren Coefficienten sehr klein sind. Es ist nicht nöthig, sie weitläufig zu berechnen; es reicht hin, wenn man bemerkt, dass die Perioden nicht derart sind, dass die Coefficienten durch die Integration vergrössert werden. Wir schliessen, *dass die Anziehung der Sonne oder des Mondes keine merklichen Aenderungen in der Rotationsperiode der Erde hervorbringen können.*

Es ist freilich möglich, dass die Winkelgeschwindigkeit der Erde durch andere Ursachen, wie z. B. die allmähliche Abkühlung, die Fluthreibung, etc. verändert wird; denn diese sind bei der obigen Erörterung nicht berücksichtigt worden.

§ 540. *Aenderungen der Hauptmomente.* Beisp. Wenn die Hauptaxen der Erde ihrer Lage nach fest bleiben, die Grössen $A$, $B$, $C$, aber sich langsam ändern und, nach einer Zeit $t$, $A+at$, $B+bt$, $C+ct$ werden, zu zeigen, dass die säculare Ungleichheit in der Schiefe durch

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{P}{2n}\cdot\frac{a+b-2c}{C-A}\sin\theta$$

gegeben ist, worin $P$ die Präcession der Aequinoctien, d. h. 50″ ist. Darwin, *Phil. Trans.*, 1876.

Um den Beweis zu führen, kann man mit den Gleichungen in § 24, Beisp. 2 beginnen und so fortfahren, wie in § 538.

Die thatsächliche Differenz $C-A$ zwischen den Trägheitsmomenten der Erde entspricht einem Grössenunterschied zwischen den beiden Radien für den Aequator und die Pole von einundzwanzig Kilometern. Wenn man nicht annehmen kann, dass geologische Aenderungen Unterschiede in der Höhenlage, die mit diesem vergleichbar sind, hervorbringen können, so ist offenbar der Coefficient von $\sin\theta$ in dem obigen Ausdruck ein kleiner Bruch von $P$.

§ 541. *Eine allgemeine Erklärung der Art zu geben, auf welche die Anziehung der Sonne die Präcession und Nutation veranlasst.*

Um die Wirkung der Anziehung der Sonne auf die Erde zu erklären, empfiehlt es sich, die Poinsot'sche Construction der Bewegung der Körper, welche in § 140 und den folgenden beschrieben wurde, zu Hülfe zu nehmen.

Wenn ein Körper, an dem keine Kräfte angreifen, um einen festen Punkt $O$ in Rotation gesetzt wird, so sind bekanntlich die Bewegungsgrössen aller Massenpunkte zusammen einem Paar äquivalent, das wir mit $G$ bezeichnen wollen, um eine Axe $OL$, welche die invariabele Linie heisst. $T$ sei die doppelte lebendige Kraft des Körpers. Legt man eine Ebene senkrecht durch die Axe von $G$ in dem Abstand $\sqrt{KT}/G$ von dem festen Punkt, so wird die ganze Bewegung dadurch dargestellt, dass man das Trägheitsellipsoid, dessen Parameter $\varepsilon$ ist, auf dieser Ebene rollen lässt. Handelt es sich um die Erde, so fällt die Axe $OI$ der augenblicklichen Rotation so nahe mit $OC$, der Figurenaxe, zusammen, dass die feste Ebene, auf der das Ellipsoid rollt,

nahezu die Berührungsebene in dem Endpunkt der Figurenaxe ist. Dies ist so nahezu der Fall, dass wir *die Quadrate* aller kleinen Glieder, welche von der Componente der Winkelgeschwindigkeit um irgend eine Erdaxe, welche senkrecht auf der Axe der Figur steht, vernachlässigen werden.

Wir wollen nun untersuchen, wie diese Bewegung durch die Einwirkung der Sonne gestört wird. Die Sonne zieht die Theile der Erde, welche ihr näher liegen, mit etwas grösserer Kraft an, als die weiter entfernten. Wenn mithin die Sonne entweder nördlich oder südlich vom Aequator steht, so bringt ihre Anziehung ein Paar hervor, das die Erde um diejenige Axe in der Ebene des Aequators zu drehen sucht, welche senkrecht auf der Linie steht, die das Centrum der Erde mit dem Centrum der Sonne verbindet. Die Grösse dieses Paares werde mit $\alpha$ bezeichnet und man nehme an, das Paar wirke stossweise in Zeitintervallen $dt$.

In jedem Augenblick erzeugt dieses Paar eine neue Bewegungsgrösse $\alpha dt$ um die Axe des Paares $\alpha$. Sie ist mit der vorhandenen Bewegungsgrösse $G$ zusammenzusetzen und bildet so ein resultirendes Paar $G'$. Stände die Axe von $\alpha$ genau senkrecht auf der von $G$, so wäre $G' = \sqrt{G^2 + (\alpha dt)^2} = G$ (mit den angegebenen Vernachlässigungen).

Ist $\theta$ der Winkel, den die Axe von $G$ mit $OC$ macht, so ist $\theta$ eine kleine Grösse von solcher Ordnung, dass ihr Quadrat ausser Acht bleiben kann. Nimmt man den Fall, in dem $OC$, die Axe von $G$ und die Axe von $\alpha$ in derselben Ebene liegen, denn in diesem Fall ist der Unterschied zwischen $G'$ und $G$ am grössten, so erhält man

$$G'^2 = (G\cos\theta)^2 + (G\sin\theta + \alpha dt)^2 = G^2 + 2G\alpha\sin\theta\, dt \quad (1).$$

Da nun $\alpha$ und $\theta$ kleine Grössen von derselben Ordnung sind, so ist das Glied $\alpha\sin\theta$ zu vernachlässigen. Daher wird $G' = G$. Die Axe von $G$ aber hat sich im Raum um einen Winkel $\alpha dt/G$ in einer Ebene verrückt, die durch sie selbst und die Axe von $\alpha$ geht.

Zunächst wollen wir dann untersuchen, wie sich die doppelte lebendige Kraft $T$ ändert. Ist $T'$ die neue doppelte lebendige Kraft, so hat man

$$T' - T = \text{der doppelten von dem Paar } \alpha \text{ verrichteten Arbeit,}$$
$$= 2\alpha(\omega\cos\beta)\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

worin $\omega\cos\beta$ die Componente der Winkelgeschwindigkeit um die Axe von $\alpha$ ist. Aus demselben Grund, wie früher, ist das Product aus dieser Winkelgeschwindigkeit und $\alpha$ zu vernachlässigen. Daher wird $T' = T$. Daraus folgt, dass der Abstand $\sqrt{KT}/G$ der festen Ebene von dem festen Punkt durch die Wirkung von $\alpha$ nicht verändert wird.

Die feste Ebene, auf welcher das Ellipsoid rollt, bleibt also in demselben Abstand von dem festen Punkt; die drei Linien $OC$, $OI$, $OL$,

die sich zu Anfang sehr nahe bei einander befanden, bleiben mithin immer dicht zusammen. Das Loth $OL$ auf dieser Ebene hat aber eine Bewegung im Raum, daher müssen die anderen Linien $OL$ begleiten. Diese Bewegung ist es, die Präcession und Nutation genannt wird.

Die kleinen Glieder schliesslich, die vernachlässigt wurden, häufen sich nicht beständig so an, dass sie irgend eine merkbare Wirkung hervorbrächten. Bei der täglichen Umdrehung der Erde beschreibt die Axe $OC$ einen Kegel von dem kleinen Winkel $\theta$ um $OL$. Die Axe, um welche die Sonne die Winkelgeschwindigkeit $\alpha$ erzeugt, steht immer senkrecht auf der Ebene, welche die Sonne und $OC$ enthält. Betrachtet man also die Sonne für einen Tag als festliegend, so wechselt der Winkel $\theta$ in Gleichung (1) jeden halben Tag sein Vorzeichen. Derart ist $G'$ abwechselnd grösser und kleiner als $G$. Ebenso lässt sich zeigen, dass $T'$ abwechselnd grösser und kleiner als $T$ ist, weil die Momentanaxe einen Kegel um $OL$ beschreibt.

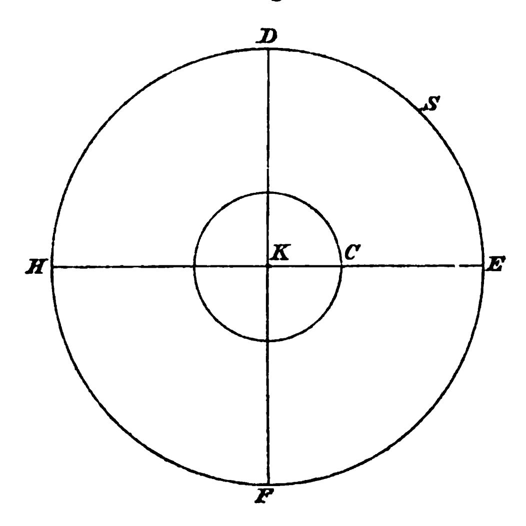
§ 542. **Solarpräcession und -Nutation.** Die drei Axen der Erde, welche für unsere Theorie die grösste Bedeutung haben, sind (1) die Figurenaxe $OC$, (2) die Momentanrotationsaxe $OI$, (3) die invariable Linie $OL$. In dem letzten Paragraphen wurde soeben gezeigt, dass diese drei, wenn sie in irgend einem Augenblick beinahe zusammenfallen, trotz der Anziehung der Sonne stets dicht zusammenbleiben. Es reicht daher für unseren jetzigen Zweck hin, wenn wir die Bewegung einer von den dreien ermitteln.

$OA$, $OB$ seien zwei in dem Erdäquator liegende, aufeinander senkrechte Axen und die Erde drehe sich um $OC$ in der positiven Richtung $AB$. Die Sonne $S$ befinde sich zur Zeit $t$ in der Ebene $COA$ und auf der positiven oder nördlichen Seite des Aequators. Die Anziehung der Sonne während der Zeit $dt$ erzeugt ein Paar $\alpha dt$ um die Axe $OB$, welches in der negativen Richtung $AC$ wirkt. Aus dem letzten Paragraphen folgt, dass $OL$, welches nahezu mit $OC$ zusammenfällt, sich im Raum in der Ebene $BOC$ mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich $\alpha/G$ in der Richtung $BC$ bewegt. Weil sich die Sonne um $O$ in derselben Richtung bewegt, in der sich die Erde um ihre Axe $OC$ dreht, so bewegen sich die Axen $OL$ und $OC$, wenn $\alpha$ positiv ist, nahezu rechtwinklig zu der Ebene $COB$ in der zur Bewegung der Sonne entgegengesetzten Richtung.

Da wir die Bewegung, welche die Sonne in der Zeit $dt$ in diesen Axen hervorbringt, kennen, so bleibt uns nur übrig, die Summe aller von der Sonne in einem Jahr erzeugten Wirkungen zu suchen. Der Einfachheit wegen wollen wir nur von der Figurenaxe, von $OC$ sprechen.

Wir wollen eine Kugel mit dem Mittelpunkt in $O$ beschreiben und die Bewegung auf die Oberfläche dieser Kugel beziehen. $K$ sei der Pol der Ekliptik und die Sonne $S$ beschreibe den Kreis $DEFH$, von welchem $K$ der Pol ist. $DF$ sei ein grösster Kreis senkrecht zu $KC$;

es sind dann, weil $OC$ und die Figurenaxe der Erde so nahe beieinander liegen, dass man sie als zusammenfallend behandeln kann, $D$ und $F$ die Durchschnittspunkte des Aequators mit der Ekliptik. Wenn die Sonne nördlich oder südlich vom Aequator steht, so erzeugt ihre Anziehung das Paar $\alpha$, welches positiv oder negativ ist, je nachdem sich die Sonne auf der einen oder anderen Seite befindet. Das Paar verschwindet, wenn die Sonne durch den Aequator bei $D$ oder $F$ geht. Steht die Sonne irgendwo in $DEF$ d. h. nördlich vom Aequator, so bewegt sich $C$ in einer zu dem Bogen $CS$ senkrechten Richtung nach




$D$ hin. Steht sie dagegen irgendwo in $FHD$, so hat $\alpha$ das entgegengesetzte Vorzeichen und $C$ bewegt sich wieder senkrecht zu der momentanen Lage von $CS$ und wieder nach $D$ hin. Betrachtet man die ganze von der Sonne bei ihrem Durchlaufen des Kreises $DEFH$ in einem Jahr hervorgebrachte Wirkung, so ergibt sich, dass $C$ eine sehr kleine Strecke nach $D$ zu rückt, d. h. in der Richtung, welche der Bewegung der Sonne entgegengesetzt ist. Zerlegt man die Bewegung von $C$ in der Richtung der Tangente an den Kreis mit dem Centrum $K$ und dem Halbmesser $KC$, so sind die Componenten (1) eine gleichförmige Bewegung von $C$ in der Richtung dieses Kreises nach rückwärts, welche Präcession heisst und (2) eine Ungleichheit dieser gleichförmigen Bewegung, welche der eine Theil der Solarnutation ist. Wenn ferner die Sonne von $D$ nach $E$ rückt, bewegt sich $C$ nach innen so, dass der Abstand $KC$ vermindert wird, bei der Bewegung der Sonne von $E$ nach $F$ wird dagegen $KC$ um ebensoviel vergrössert. Im Ganzen bleibt also der Abstand $KC$ unverändert, er hat aber eine Ungleichheit und diese ist der andere Theil der Solarnutation.

Offenbar vollendet jede dieser Ungleichheiten ihre Periode in einem halben Jahr.

§ 543. **Die Lunarnutation.** *Die Ursache der von dem Mond hervorgerufenen Nutation zu erklären.*

Die Anziehung, welche die Sonne auf die ihr näher gelegenen Theile des Aequators der Erde ausübt, ist die Ursache, dass der Pol $C$ der Erde mit gleichförmiger Geschwindigkeit einen kleinen Kreis um $K$, den Pol der Ekliptik, mit zwei Ungleichheiten beschreibt, von denen die eine nach der Länge, die andere nach der Breite geht und deren Periode ein halbes Jahr dauert. Diese beiden Ungleichheiten heissen Solarnutationen. Ebenso hat auch die Anziehung des Mondes zur Folge, dass der Pol der Erde einen kleinen Kreis um $M$, den Pol der Mondbahn, mit zwei Ungleichheiten beschreibt. Diese Ungleichheiten sind sehr klein und von der kurzen Periode von vierzehn Tagen und werden daher im Allgemeinen vernachlässigt. Nur die gleichförmige Bewegung von $C$ um $M$ wird in Rechnung gezogen. Nun ist $K$ der Punkt, auf den die Bewegung bezogen wird; wenn daher $M$ festläge, so würde sich die Bewegung von $C$ um $M$ als eine langsame gleichförmige Bewegung von $C$ um $K$ darstellen mit zwei Ungleichheiten, deren Grösse dem Bogen $MK$ oder 5 Graden gleich wäre, und deren Periode sehr lang, nämlich gleich derjenigen von $C$ um $K$ sein würde, welche die gleichförmige Bewegung hervorruft. Aus der Theorie des Mondes ist aber bekannt, dass $M$ einen Kreis um $K$ als Mittelpunkt mit einer Geschwindigkeit beschreibt, die viel grösser als die von $C$ ist. Die Bewegung von $C$ wird daher durch eine langsame gleichförmige Bewegung um $K$ dargestellt mit zwei Ungleichheiten, die um so kleiner sind, je grösser die Geschwindigkeit von $M$ um $K$ ist und deren Periode nahezu der von $M$ um $K$ gleich kommt. Diese Periode dauert aber bekanntlich ungefähr 19 Jahre. Die beiden Ungleichheiten heissen die Lunarnutationen. Man beachte, dass ihre Quelle von der der Solarnutation verschieden ist.

§ 544. **Die Bewegung der Ebene des störenden Körpers.** Bei dem Verfahren in § 521 wurde die Ebene der Bahn des störenden Körpers als im Raum festliegend behandelt. Bei der Discussion der Lunarnutationen wird es nöthig, zu bestimmen, wie weit ihre Bewegung die Präcession beinflusst. Wir nehmen auch jetzt, wie früher, die Hauptaxe $OA$ so an, dass die Ebene $OCA$ senkrecht auf der augenblicklichen Lage der Bahn in dem betrachteten Moment steht. Die Grösse $\theta_3$ ist nicht die nämliche, wie früher[1]), ist aber immer noch,

1) Den Werth von $\theta_3$ findet man auf die folgende Art. Die Bahn dreht sich in jedem Augenblick um den Radiusvector des Planeten als Momentanaxe. Diese Winkelgeschwindigkeit sei $u$ und werde als bekannt vorausgesetzt. $Z, Z'$; $B, B'$ seien zwei aufeinander folgende Lagen des Pols der Bahn bezügl. des Endpunktes der Axe von $B$. Es ist dann $ZB =$ einem rechten Winkel $= Z'B'$. Die Projectionen von $ZZ'$, $BB'$ auf $ZB$ sind daher gleich. Daraus ergibt sich, da $ZB$ sowohl auf $CZ$ als $SB$ senkrecht steht, $\widehat{BSB'} \sin BS = \widehat{ZCZ'} \sin ZC$. Der

wenn die Bewegung der Bahn im Raum sehr langsam vor sich geht, sehr klein. Man kann daher, wie zuvor, die kleinen Glieder $\theta_3\omega_1$ und $\theta_3\omega_2$ vernachlässigen. Die dynamischen Gleichungen werden dadurch nicht wesentlich beeinflusst. In Bezug auf die geometrischen Gleichungen (3) drücken auch jetzt noch $\omega_2$, $\omega_1$ die Componenten der Geschwindigkeit von $C$ im Raum in der Richtung und senkrecht zu der momentanen Lage von $ZC$ aus. Diese Geschwindigkeiten geben die Werthe von $d\theta/dt$ und $-\sin\theta\, d\psi/dt$ in den Gleichungen (9) an. Bei einem solchen Grad der Annäherung ist daher weiter keine Aenderung nöthig, als die Geschwindigkeiten, welche die Gleichungen (9) liefern, auf im Raum festliegende Axen zu beziehen; durch Integration findet man dann die Bewegung von $C$. Dieses Verfahren werden wir bei der Ermittelung der Lunarnutation einschlagen.

§ 545. *Die Lunarpräcession und -Nutation zu berechnen.* $K$ sei der Pol der Ekliptik, $M$ derjenige der Mondbahn und $C$ der Pol der Erde. Ist $KX$ irgend ein festliegender Bogen, $KC = \theta$, $XKC = \psi$, so haben wir $\theta$ und $\psi$ durch $t$ auszudrücken. Bei der Berechnung der Lunarpräcession und -Nutation ist nach § 543 nur ein Theil der Bewegung von $C$, nämlich derjenige zu berücksichtigen, welcher die gleichförmige Bewegung von $C$ um $M$ genannt wurde. Nach § 529 wird diese Bewegung durch die Geschwindigkeit $-Sn''\sin MC\cos MC$ in der auf dem Bogen $MC$ senkrechten Richtung dargestellt. Substituirt man für $S$ seinen in § 529 gegebenen Werth, so ergibt sich, dass die Geschwindigkeit von $C$ im Raum in jedem Augenblick in einer zu $MC$ senkrechten Richtung stattfindet und gleich

$$-\frac{3n''^2}{2n}\frac{C-A}{C}\frac{1}{1+\nu}\cos MC\sin MC$$

ist.

Der Kürze wegen wollen wir den Coefficienten von $\cos MC\sin MC$ mit $P$ bezeichnen. Zerlegt man diese Geschwindigkeit dann in der Richtung und senkrecht zu $KC$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} d\theta/dt &= -P\sin MC\cos MC\sin KCM \\ \sin\theta\, d\psi/dt &= -P\sin MC\cos MC\cos KCM \end{aligned}\right\}.$$

Aus der Theorie des Mondes wissen wir, dass sich $M$ um $K$ gleichförmig rückwärts bewegt und der Abstand $MK$ dabei unverändert bleibt. Es sei also $KM = i$ und der Winkel $XKM = -mt + \alpha$. Nach der sphärischen Trigonometrie ist

$$\cos MC = \cos i\cos\theta + \sin i\sin\theta\cos MKC,$$

Winkel $ZCZ'$ ist aber gleich $-\delta\theta_3$ und der Winkel $BSB'$ gleich $u$, mithin ist $\delta\theta_3\cdot\sin\theta = -u\sin l$. Der Werth von $\delta\theta_3$ muss zu dem früheren Werth von $\theta_3$ addirt werden.

$$\sin MC \cos KCM = \frac{\cos i - \cos MC \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \cos i \sin \theta - \sin i \cos \theta \cos MKC,$$

$$\sin MC \sin KCM = \sin i \sin MKC.$$

Setzt man diese Werthe ein, so wird

$$d\theta/dt = -P\left\{\sin i \cos i \cos \theta \sin MKC + \frac{1}{2}\sin^2 i \sin \theta \sin 2MKC\right\}$$

$$\sin \theta\, d\psi/dt = -P\left\{\sin \theta \cos \theta \left(\cos^2 i - \frac{1}{2}\sin^2 i\right)\right.$$

$$\left. - \sin i \cos i \cos 2\theta \cos MKC - \frac{1}{2}\sin^2 i \sin \theta \cos \theta \cos 2MKC\right\}.$$

Für eine erste Annäherung kann man die Variationen von $\theta$ und $\psi$, wenn sie mit der kleinen Grösse $P$ multiplicirt sind, vernachlässigen. In $d\theta/dt$ treten daher nur periodische Glieder auf und die Neigung $\theta$ erfährt keine permanente Aenderung. $d\psi/dt$ dagegen enthält ein von $MKC$ unabhängiges Glied. Betrachtet man dieses Glied für sich, so ist

$$\psi = \text{Constante} - P \cos \theta \left(\cos^2 i - \frac{1}{2}\sin^2 i\right) t.$$

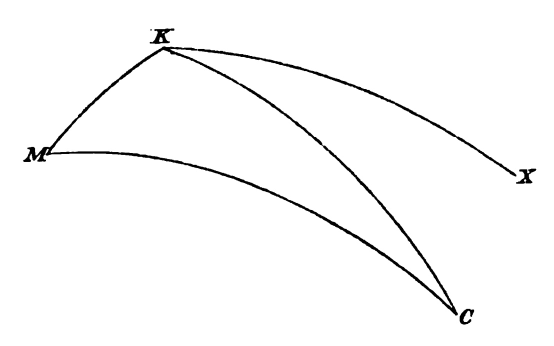
Diese Gleichung drückt die Präcessionsbewegung des Pols in Folge der Anziehung des Mondes aus. Man kann ihr die Gestalt geben

$$\psi = \psi_0 - pt.$$

Um die Nutationen zu finden, hat man für $MKC$ seinen Näherungswerth $MKC = (-m + p)t + \alpha - \psi_0$ zu setzen.

Integrirt man nun, so wird

$$\theta = \text{Constante} - \frac{P \sin i \cos i \cos \theta}{m - p} \cos MKC - \frac{P \sin^2 i \sin \theta}{4(m - p)} \cos 2MKC.$$




Das zweite dieser periodischen Glieder wird, da es nur den fünfzigsten Theil des ersten beträgt und dieses erste selbst sehr klein ist, in der Regel vernachlässigt. Da ferner auch $p$ im Vergleich mit $m$ sehr klein ist, so erhält man

$$\theta = \theta_0 - \frac{P \sin i \cos i \cos \theta}{m} \cos MKC.$$

Dieser Ausdruck gibt die Lunarnutation in der Schiefe an. Der Coefficient des periodischen Gliedes cos $MKC$ liegt zwischen 8″ und 9″.

Ebenso erhält man durch Integration des Ausdruckes für $\psi$ und bei Vernachlässigung der ganz kleinen Glieder

$$\psi = \psi_0 - P\cos\theta\left(\cos^2 i - \frac{1}{2}\sin^2 i\right)t - P\frac{\sin 2i}{2m}\cdot\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\sin MKC.$$

Der Winkel $MKC$ ist die Länge des absteigenden Knotens des Mondes und die Knotenlinie vollendet bekanntlich in etwa 18 Jahren 7 Monaten eine Umdrehung. Bezeichnen wir diese Periode mit $T$, so wird $MKC = -2\pi t/T +$ Constante. Der Coefficient von sin $MKC$ liegt zwischen 16″ und 17″.

Der Pol $M$ der Mondbahn bewegt sich um den Bezugspunkt $K$ mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche im Vergleich mit $p$ gross ist, immerhin aber klein genug, um die Lunarnutationen grösser als die von der Sonne herrührenden zu machen. Man beachte auch: wenn $M$ sich um $K$ mit einer Winkelgeschwindigkeit drehte, die $p$ näher käme, so würden die Nutationen noch grösser sein.

§ 546. Man kann diese Methode auch dazu benutzen, die Wirkung der Bewegung der Ekliptik zu berücksichtigen. $M$ sei jetzt der Pol der beweglichen Ekliptik zu einer Zeit $t$, $K$ der eines festliegenden Bezugskreises. Nimmt man an, die Hauptwirkung der Solarpräcession bestände darin, dass sie den Pol $C$ der Erde veranlasst, sich senkrecht zu dem Bogen $CM$ mit der Geschwindigkeit $P\cos MC\cdot\sin MC$ zu bewegen, so ergeben sich dieselben Werthe für $d\theta/dt$ und $\sin\theta d\psi/dt$, wie früher. Die Bewegung der Ekliptik geht so langsam vor sich, dass man die Quadrate von $i$ vernachlässigen kann, wenn man den Pol der Ekliptik zu einer nicht zu weit zurückgelegenen Zeit als festen Punkt $K$ annimmt. Man erhält so

$$d\theta/dt = -Pi\cos\theta\sin MKC,$$

$$\sin\theta\, d\psi/dt = -P(\sin\theta\cos\theta - i\cos 2\theta\cos MKC),$$

worin $KC = \theta$ und der Winkel $CKX = \psi$ ist.

Da der Pol der Mondbahn nahezu einen kleinen Kreis mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschreibt, so könnten wir in § 545 für den Winkel $MKC$ seinen Werth $(p - m)t +$ etc. substituiren. Im Fall der Ekliptik verfahren wir anders. $t = 0$ sei die Zeit, zu welcher der Pol der Ekliptik in $K$ ist und der Bogen $KX$ verbinde $K$ mit dem Pol $C_0$ des Aequators zu derselben Zeit. Die Componenten der Geschwindigkeit von $K$ in der Richtung und senkrecht zu $KX$ seien $g'$ und $g$. Nimmt man an, die Zeit $t$ sei nicht so lang, dass die Richtung und Geschwindigkeit von $K$ sich hat merklich ändern können, so kann man $g't$ und $gt$ als die Coordinaten von $M$ in Bezug auf $KX$ als $x$-Axe ansehen. Es ist daher

$$i\sin MKC = gt\cos\psi - g't\sin\psi,$$

$$i\cos MKC = g't\cos\psi + gt\sin\psi.$$

Für $t = 0$ ist nun $\psi = 0$ und wächst etwa 50″ jedes Jahr, so dass es in hundert Jahren wenig mehr als einen Grad beträgt. Da $P$, $g$, $g'$ und $\psi$ sämmtlich kleine Grössen sind, so setzen wir in den kleinen Gliedern $i\sin MKC = gt$ und $i\cos MKC = g't$.

Substituirt man diese Werthe in die obigen Ausdrücke und integrirt, so wird

$$\theta = \theta_0 - \frac{1}{2} P \cos\theta_0 g t^2, \quad \psi = -P(\cos\theta_0 t - \frac{1}{2}\cos 2\theta_0 \operatorname{cosec}\theta_0 g' t^2),$$

worin $\theta_0$ den sphärischen Abstand des Poles $C$ der Erde von dem Pol $K$ der Ekliptik zu einer gewählten Zeit bedeutet und $\theta$, $\psi$ die Coordinaten von $C$ nach einer Zeit $t$ in Bezug auf denselben Punkt als Ausgangspunkt sind.

§ 547. Es ist manchmal vortheilhafter, die Bewegung von $C$ auf den Pol $M$ der Ekliptik zur Zeit $t$ zu beziehen. Setzt man $MC = \theta_1$ und den Winkel $CMC_0 = \psi_1$, so wird offenbar $\theta_1 = \theta - g't$. Bedenkt man, dass $KM$ kleiner als ein Grad ist, während jeder der vier Bogen $CK$, $CM$, $C_0K$, $C_0M$ etwa 23° beträgt, so ist sowohl $\psi_1 \sin\theta_1$ als $\psi \sin\theta$ nahezu gleich $C_0C$. Man hat daher $\psi_1 = \psi(1 + g't \operatorname{cotg}\theta)$. So ergeben sich, wenn $\theta$ und $\psi$ bekannt sind, die Werthe von $\theta_1$ und $\psi_1$ unmittelbar.

Beisp. Wenn der Pol $M$ der Ekliptik, von $K$ ausgehend, einen grössten Kreis $KX$ mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $v$ beschreibt, zu beweisen, dass die Bewegung des Pols $C$ der Erde durch

$$d\theta/dt = -v\cos\psi, \quad d\psi/dt = v \operatorname{cotg}\theta \sin\psi - P\cos\theta$$

gegeben ist, worin $\theta = MC$, $\psi = CMX$ ist und $P$ dieselbe Bedeutung, wie in § 546, hat. Man zeige auch, dass, wenn das Quadrat von $v/P$ vernachlässigt wird, diesen Gleichungen durch

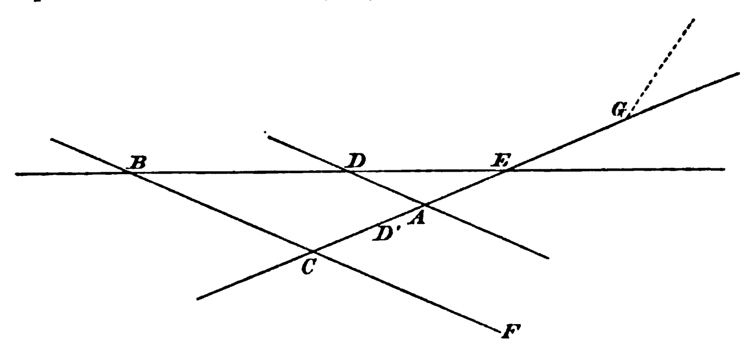
$$\theta = \alpha - (v/P)\sec\alpha \sin(P\cos\alpha t), \quad -\psi = P\cos\alpha t - (v/P)\sec^2\alpha \operatorname{cosec}\alpha \cos(P\cos\alpha t)$$

zu genügen ist.

Wäre keine Präcession vorhanden, d. h. wäre $P$ gleich Null, so würden die Aenderungen der Schiefe in Folge der Bewegung der Ekliptik nahezu durch $\theta = \alpha - vt$ gegeben sein; wie man sieht, hat hier die Präcession die Wirkung, die möglichen Aenderungen der Schiefe in enge Grenzen zu bannen.

Die thatsächliche Bewegung des Pols der Ekliptik ist von der in diesem Beispiel angenommenen sehr verschieden, Laplace hat aber gezeigt, dass ein ähnlicher Satz besteht, wenn man diejenigen Coordinaten von $K$ nimmt, welche die Theorie der Planeten liefert. *Eine Wirkung der Präcession besteht darin, dass sie die Ebene des Aequators veranlasst, sich mit der Ebene der Ekliptik so zu bewegen, dass die mögliche Aenderung der Schiefe kleiner ist, als sie ohne Präcession sein würde. Mécanique Céleste,* Bd. 2, S. 367.

§ 548. **Zahlenresultate.** $BDE$ und $DA$ seien die Lage der Ekliptik und des Aequators zu einer festen Zeit, sagen wir, dem 1. Januar 1850; $CAE$ und




$BCF$ ihre Lage nach der Zeit $t$, in Julianischen Jahren gemessen, d. h. jedes Jahr zu 365,25 mittleren Sonnentagen.

$BDE$ ist die festliegende Ekliptik, $DA$ der festliegende Aequator; $CAE$ die sich bewegende Ekliptik und $BC$ der sich bewegende Aequator.

*Zuerst betrachten wir die Präcession.* Der Theil der Präcession, welcher die Folge der Wirkung der Sonne und des Mondes auf die Erde ist, heisst *die luni-solare Präcession.* Sie wird auf die feste Ekliptik bezogen und ist in der Figur mit $BD$ dargestellt; man hat

$$\psi = BD = 50'',37140\,t - 0'',000108806\,t^2.$$

Die Neigung des Aequators gegen die Ekliptik würde constant sein, wenn die Bewegung der Ekliptik die Kräfte nicht modificirte (§ 524). Die Neigung $CBD$ der Ekliptik gegen den Aequator ist daher durch

$$\theta = CBD = 23^\circ 27' 32'' + 0'',00000719\,t^2$$

gegeben.

Zu diesen Werthen von $\psi$ und $\theta$ ist die geometrische Wirkung der Bewegung der Ekliptik oder, wie man gewöhnlich sagt, *die planetare Präcession* zu addiren. Die Resultante aus der luni-solaren und der planetaren Präcession wird die *allgemeine Präcession* genannt. Nimmt man den Punkt $D'$ auf der sich bewegenden Ekliptik so an, dass $ED' = ED$ ist, so stellt der Bogen $D'C$ die allgemeine Präcession dar. Man hat

$$\psi_1 = D'C = 50'',23572\,t + 0'',00011290\,t^2,$$

$$\theta_1 = ACF = 23^\circ 27' 32'' - 0'',47566\,t - 0'',00000149\,t^2.$$

Die Ebenen der sich bewegenden Ekliptik und des Aequators, welche durch diese sphärischen Coordinaten bestimmt werden, heissen gewöhnlich *die mittlere Ekliptik und der mittlere Aequator zur Zeit t.*

Den Coefficienten von $t$ in dem Ausdruck für $\psi_1$ nennt man in der Regel *die Präcessionsconstante.* Sie stellt die Summe der in den §§ 524, 545 ermittelten, von der Sonne und dem Mond herrührenden Präcessionen mit Einschluss der in § 546 erwähnten von $g' \cot g\, \theta$ abhängigen Correction dar.

*Was ferner die Nutationen angeht,* so sind sie so klein, dass die Beträge, die man zu $\psi$ oder $\psi_1$, $\theta$ oder $\theta_1$ zu addiren hat, einander gleich kommen. Wir wollen sie $\Psi$ bezügl. $\Theta$ nennen. Dann ist

$$\Psi = -17'',251 \sin \Omega + 0'',207 \sin 2\Omega - 1'',269 \sin 2\odot$$
$$- 0'',204 \sin 2☽ + 0'',069 \sin A_m + 0'',128 \sin A_s,$$

$$\Theta = 9'',223 \cos \Omega - 0'',090 \cos 2\Omega + 0'',551 \cos 2\odot + 0'',089 \cos 2☽.$$

Stellt die in der Figur punktirte Linie die Mondbahn dar, ist $G$ also ihr aufsteigender Knoten, so ist $\Omega = CG$ die auf der wahren Ekliptik von dem wahren Frühlingsäquinoctium aus gemessene Länge von $G$; in diesen kleinen Gliedern reicht es aber aus, wenn man $\Omega$ als die Länge des mittleren Knotens, von dem mittleren Aequinoctium aus gemessen, ansieht. Ebenso bedeuten $\odot$ und ☽ die auf der beweglichen Ekliptik entweder von dem wahren oder dem mittleren Aequinoctium aus gemessene Länge der Sonne und des Mondes. Die Symbole $A_s$ und $A_m$ stellen die mittleren Anomalien der Sonne und des Mondes in ihren elliptischen Bahnen dar.

Verschiedene Glieder, die bei der früheren Entwicklung vernachlässigt wurden, sind hier aufgeführt worden, um die relative Grösse des Gliedes klarer hervortreten zu lassen.

Der Coefficient von $\sin \Omega$ in dem Ausdruck für $\Psi$ heisst *die Constante der Nutation.* Er stellt den Coefficienten von $\sin MKC$ in dem Ausdruck für $\psi$, § 545, dar.

Die Glieder in $\Psi$ und $\Theta$, welche $\sin 2\Omega$ und $\cos 2\Omega$ enthalten, wurden in § 545 besprochen und dann vernachlässigt. Die Glieder mit $\sin 2\odot$ und $\cos 2\odot$ sind

die Solarnutationen, siehe § 526. Von denjenigen mit sin 2☽ und cos 2☽ war in § 351 die Rede und in § 543 wurde darauf hingewiesen, dass sie in der Regel weggelassen werden. Ueber die von $A_m$ und $A_s$ abhängigen Glieder sehe man § 528 nach.

Die Zahlenwerthe der Glieder werden von den verschiedenen Autoren verschieden angegeben, doch sind die Abweichungen nicht von Bedeutung. Wir sind bei unseren Angaben Serret, *Annales de l'Observatiore,* Bd. 5, 1859, gefolgt. Ein anderes Verzeichniss, das von dem unsrigen abweicht, und bei welchem die Bessel'schen Constanten benutzt wurden, wird in Main's *Astronomy* (1863) gegeben. Darin wird das Jahr 1750 als die feste Epoche angenommen, von welcher aus die Zeit gerechnet wird.

§ 549. Umgekehrt kann man die Ausdrücke für die luni-solare Präcession und -Nutation dazu benutzen, *um sowohl die Masse des Mondes als den Werth von* $(C-A)/C$ *zu bestimmen.* Setzt man für die beiden störenden Körper die aus der Theorie sich ergebenden Coefficienten der Präcession und Nutation ihren aus den Beobachtungen entnommenen Werthen gleich, so erhält man zwei Gleichungen, welche $S_1$ und $S_2$, d. h. die Werthe von $S$ für die Sonne und den Mond enthalten (§ 529). Da die Coefficienten dieser Gleichungen klein sind, so kommt es darauf an, sie so genau wie nur möglich zu bestimmen. Am genauesten ist vielleicht Prof. Hill verfahren (siehe § 528). Er nimmt den Struve'schen Werth für die Präcession und den Peters'schen für die Nutation an und findet

$$\frac{C-A}{C} = 0{,}003272995, \quad \frac{M}{E+M} = \frac{1}{82{,}315},$$

worin $E$ und $M$ die Massen der Erde und des Mondes bezeichnen.

§ 550. **Die Nutation der Erdaxe, wenn die mittlere Schiefe Null ist.** Wenn die momentane Schiefe klein ist, kann eine sehr geringe Aenderung der Lage des Aequators seine Durchschnittslinie mit der Ekliptik bedeutend verrücken. Es ist dann nicht zu empfehlen, die Winkel von dem Frühlingstagundnachtgleichenpunkt aus zu messen. $GZ$ sei ein Loth auf die Ekliptik, $GC$ die Figurenaxe; wir haben die kleinen Schwingungen von $GC$ um $GZ$ zu ermitteln. $GX$, $GY$ seien in der Ekliptik festliegende Axen und die Länge der Sonne werde von $GX$ aus gemessen. $(P, Q, 1)$ seien die Richtungscosinusse von $GC$ in Bezug auf die Axen der $X, Y, Z$. Wir brauchen die ganze Entwicklung nicht Schritt für Schritt vorzunehmen; es reicht hin, wenn wir sagen, dass die Bewegungsgleichungen, aus denen sich $P$ und $Q$ ergibt, dieselbe Gestalt wie in § 15 haben. Bedenkt man, dass das störende Paar in Folge der Anziehung der Sonne gleich $-3\varkappa(C-A)\sin CS \cdot \cos CS$ ist und dass seine Axe mit $GX$ den Winkel $l+\frac{1}{2}\pi$ macht, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} AQ' - CnP' + fQ &= -f\sin 2l \cdot P + f\cos 2l \cdot Q \\ AP'' + CnQ' + fP &= -f\cos 2l \cdot P - f\sin 2l \cdot Q \end{aligned}\right\},$$

worin $f=\frac{3}{2}\varkappa(C-A)$ und $l=n't$ ist. Die kleinen Glieder $fP$ und $fQ$ müssen bei der ersten Annäherung aus dem in § 356 angegebenen Grund beibehalten werden. Die erste Annäherung erhält man aber, wenn man die rechte Seite weglässt und

$$P = H\cos(\varrho t+\varepsilon), \quad Q = K\sin(\varrho t+\varepsilon)$$

setzt. Man kommt dann zu der quadratischen Gleichung $A\varrho^2 - Cn\varrho - f = 0$, aus der sich die beiden Werthe von $\varrho$ nahezu gleich $Cn/A$ und $-f/Cn$ ergeben. Ferner ist $K=H$. Bezeichnet man die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung mit $\varrho$ und $\varrho'$, so erhält man für eine zweite Annäherung

$$P = H\cos(\varrho t + \varepsilon) + X\cos\{(2n' - \varrho)t - \varepsilon\} + H'\cos(\varrho' t + \varepsilon') + X'\cos\{(2n' - \varrho')t - \varepsilon'\},$$
$$Q = H\sin(\varrho t + \varepsilon) + X\sin\{(2n' - \varrho)t - \varepsilon\} + H'\sin(\varrho' t + \varepsilon') + X'\sin\{(2n' - \varrho')t - \varepsilon'\},$$

worin

$$X\{A(2n' - \varrho)^2 - Cn(2n' - \varrho) - f\} = X'\{A(2n' - \varrho')^2 - Cn(2n' - \varrho') - f\} = Hf$$

ist. Man beachte, dass bei kleinem $\varkappa$ nicht vorausgesetzt wurde, dass $A$ und $C$ einander nahezu gleich seien. Denn die Art, wie die Annäherung gemacht wurde, fordert nur, dass $X$ und $X'$ im Vergleich mit $H$ klein sein müssen. Dies ist aber der Fall, wenn $n'/n$ klein und $C/A$ nicht klein ist, oder, wenn $n = 0$ und $C$ nahezu gleich $A$ ist.

Poisson legte diesem Problem eine solche Bedeutung bei, dass er, soweit es bekannt ist, zwei Abhandlungen über dasselbe schrieb. Die erste wurde in der *Connaissance des Tems* für 1837 veröffentlicht; er kritisirt darin eine dynamische Untersuchung von Laplace über diesen Gegenstand in der *Exposition du système du monde*, Buch 4, Kap. 13. Nicht lange nachher kommt er auf dieselbe Sache zurück und gibt eine neue Lösung in Bd. 14 der *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1838. Er bezieht die Bewegung auf ein von dem unsrigen verschiedenes Axensystem, seine Gleichungen werden aber später auf eine Form reducirt, welche der obigen ziemlich ähnlich ist. Er erhält dann eine genaue Lösung der Gleichungen; für unseren gegenwärtigen Zweck reichen die hier gegebenen leicht zu findenden Annäherungen hin.

## Kapitel XII.

# Die Bewegung des Mondes um seinen Schwerpunkt.

§ 551. In der Theorie der Präcession und Nutation wird die Erde im Allgemeinen als einaxiger Körper angesehen. Diese Annäherung ist für die Erde gross genug, denn, wie wir in § 538 gesehen haben, wird keine wichtige Bewegungserscheinung durch die kleinen Unterschiede verursacht, die thatsächlich zwischen den Momenten für die im Aequator liegenden Axen existiren. Bei dem Mond dagegen würden wir bei einer solchen Annahme einiger der interessantesten Eigenheiten der Bewegung verlustig gehen. Ausserdem sind aber noch andere so grosse Unterschiede vorhanden, dass die beiden Theorien durchaus voneinander getrennt werden müssen.

Im Folgenden ist es unsere Aufgabe, die Art zu untersuchen, auf welche die störenden Kräfte die verschiedenen Bewegungen des Mondes um seinen Schwerpunkt beeinflussen. Wir wollen daher, anstatt auf die Erzielung möglichst genauer arithmetischer Resultate auszugehen, unser Problem in zwei Theile zerlegen. Zunächst werden wir annehmen, der Mond beschreibe eine Bahn, die nahezu kreisförmig ist, in einer Ebene, die mit einer der Hauptebenen für seinen Schwerpunkt zusammenfällt. Später werden wir dann die letztere Einschränkung fallen lassen und die Wirkungen der Abweichung der Mondbahn von dem Mondäquator untersuchen.

§ 552. *Der Mond beschreibt eine Bahn um den Mittelpunkt der Erde, die nahezu kreisförmig ist. Wenn angenommen wird, die Ebene der Bahn sei eine der Hauptebenen des Mondes für seinen Schwerpunkt, die Bewegung des Mondes um seinen Schwerpunkt zu finden.*

$GA$, $GB$, $GC$ seien die Hauptaxen für den Schwerpunkt $G$ des Mondes und $GC$ stehe senkrecht auf der Ebene, in der sich $G$ bewegt. $A$, $B$, $C$ seien die Trägheitsmomente für $GA$, $GB$ bez. $GC$ und $M$ die Masse des Mondes und accentuirte Buchstaben mögen die entsprechenden Grössen für die Erde bedeuten.

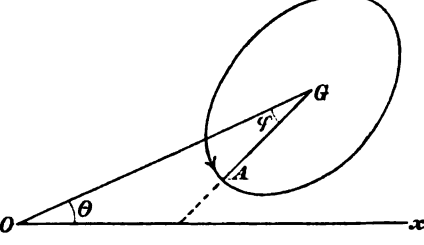
$O$ sei der Mittelpunkt der Erde und $Ox$ die Anfangslinie. Es sei $OG = r$, $GOx = \theta$. Wir wollen annehmen, der Mond drehe sich um seine Axe $GC$ in derselben Richtung, in welcher der Schwerpunkt seine Bahn um $O$ beschreibt und wollen den Winkel $OGA = \varphi$ setzen.

Das gegenseitige Potential der Erde und des Mondes ist nach § 518

$$V = \frac{MM'}{r} + M\frac{A'+B'+C'-3I'}{2r^3} + M'\frac{A+B+C-3I}{2r^3}.$$

Darin ist $I = A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi$ und das Moment der Kräfte, welche den Mond um $GC$ zu drehen suchen, daher

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{3}{2}\frac{M'}{r^3}(B-A)\sin 2\varphi \quad (1).$$




Da $\theta+\varphi$ der Winkel ist, den die in dem Körper festliegende Linie $GA$ mit der im Raum festliegenden $Ox$ macht, so ist die Gleichung der Bewegung des Mondes um $GC$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{3}{2}\frac{M'}{r^3}\frac{B-A}{C}\sin 2\varphi \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2).$$

Die Bewegung des Schwerpunktes des Mondes in Bezug auf den Mittelpunkt der Erde als festen Punkt findet man in der Theorie des Mondes erklärt. Dort wird gezeigt, dass man $r$ und $\theta$ in der Form

$$r = c\{1 + L\cos(pt+\alpha) + \text{etc.}\},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = n + \beta t + Mp\cos(pt+\alpha) + \text{etc.}$$

ausdrücken kann, worin $\beta t$ ein kleines Glied ist, welches die säculare Aenderung der Mondwinkelgeschwindigkeit um die Erde vorstellt und eigentlich das erste Glied in der Entwickelung eines trigonometrischen Ausdruckes ist.

Substituirt man den Werth von $d\theta/dt$ in Gleichung (2), so erhält man die folgende Gleichung zur Bestimmung von $\varphi$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{2}q^2\sin 2\varphi - \beta + Mp^2\sin(pt+\alpha) + \text{etc.} \quad \cdot \quad (3),$$

worin der Kürze wegen $n^2\frac{3}{2}\frac{B-A}{C} = \frac{q^2}{2}$ gesetzt wurde.

Nun weiss man aus der Beobachtung, dass der Mond der Erde immer dieselbe Seite zuwendet, dass daher unter den verschiedenen Bewegungen, welche aus verschiedenen Anfangsbedingungen entstehen können, diejenige, welche wir zu untersuchen haben, durch ein nahezu constantes $\varphi$ charakterisirt wird. Wir nehmen also in der obigen Gleichung an, $\varphi$ sei nahezu constant; aus dem Integral lässt sich dann schliessen, wie weit diese Annahme mit irgend welchen gegebenen Anfangsbedingungen, die man dem Mond beilegen kann, vereinbar ist. Setzt man $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$, worin $\varphi_0$ den ganzen constanten Theil von $\varphi$ enthält, so findet man leicht

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\, q^2 \sin 2\varphi_0 = -\beta \\ &\frac{d^2\varphi'}{dt^2} + q^2 \cos 2\varphi_0 \varphi' = Mp^2 \sin(pt+\alpha) + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (4).$$

Löst man die zweite Gleichung auf, so wird

$$\varphi = H \sin(qt + K) + \varphi_0 + M \frac{p^2}{q^2 \cos 2\varphi_0 - p^2} \sin(pt + \alpha) + \text{etc.} \quad (5),$$

worin $H$ und $K$ zwei beliebige Constante sind, deren Werthe von den Anfangsbedingungen abhängen. Die Winkelgeschwindigkeit des Mondes um seine Axe ist mithin durch die Formel

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = n + \beta t + Hq \cos(qt+K) + M \frac{pq^2 \cos 2\varphi_0}{q^2 \cos 2\varphi_0 - p^2} \cos(pt+\alpha) + \text{etc.} \quad (6)$$

gegeben.

Bei dieser Entwickelung kann die Axe $GA$, welche mit dem nach der Erde gezogenen Radiusvector $GO$ den Winkel $\varphi$ einschliesst, jede der beiden Hauptaxen in dem Mondäquator sein. Nehmen wir als $GA$ die Axe, deren mittlere Lage mit dem Radiusvector $GO$ den kleineren Winkel bildet, so ist die Grösse $2\varphi_0$ positiv. Die Grösse $q^2$ ist positiv oder negativ, je nachdem die Axe $GA$ die Axe des kleinsten oder des grössten Momentes ist. In der obigen Lösung wurde $q^2$ als positiv angenommen.

Wenn $q^2$ negativ oder Null ist, so ändert sich der Charakter der Auflösung der Gl. (3). In dem ersten Fall enthält der Ausdruck für $\varphi$ reelle Exponentialgrössen. Wenn die Anfangsbedingnngen so genau abgepasst wären, dass der Coefficient des Gliedes, welches den positiven Exponenten enthält, Null ist, so würde der Werth von $\varphi'$ immer noch klein sein. Diese Bewegung wäre aber unstabil; die kleinsten Störungen würden die Werthe der willkürlichen Constanten ändern, und $\varphi'$ würde gross werden. Auch wenn man die Lösung $q^2 = 0$ untersucht, erkennt man leicht, dass $\varphi'$ nicht klein bleiben kann. Die Complementärfunction würde die Gestalt $Ht + K$ annehmen und eine kleine Störung kann wie zuvor $\varphi'$ gross machen. Daraus folgt also, dass von den beiden Axen $GA$, $GB$ des Mondes, die Axe des kleinsten Momentes der Erde mehr zugewendet ist, als die andre und dass die beiden Hauptmomente nicht gleich sind.

Soll der Ausdruck (5) für $\varphi$ die thatsächliche Bewegung darstellen, so ist dazu nothwendig und ausreichend, wenn das aus den Anfangsbedingungen ermittelte $H$ sich als klein erweist. Durch Differentiation ergibt sich, dass $Hq$ eine kleine Grösse von derselben Ordnung, wie $d\varphi/dt$, ist. $H$ ist mithin klein, wenn in jedem Moment die Winkelgeschwindigkeit, nämlich $d\theta/dt + d\varphi/dt$, des Mondes um $GC$ der Winkelgeschwindigkeit, nämlich $d\theta/dt$, seines Schwerpunktes um die Erde so nahezu gleichkommt, dass das Verhältniss ihrer Differenz zu $q$ sehr klein ist.

Aus der ersten der Gleichungen (4) ist ersichtlich, dass die Grösse des constanten Theiles $\varphi_0$ des Winkels, den die Axe des kleinsten

Momentes in dem Mondäquator mit dem nach der Erde gezogenen Radiusvector macht, von dem Verhältniss $2\beta/q^2$ abhängt. Der Werth von $\beta$ wird in der Theorie des Mondes ermittelt und ist bekanntlich ausserordentlich klein. Er stellt eine Vermehrung in der Winkelgeschwindigkeit des Mondes in seiner Bahn um die Erde von etwa 25 Secunden in jedem Jahrhundert dar. Der Zahlenwerth von $q^2$ hängt von der Structur des Mondes ab und ist nicht genau bekannt. Sein Werth lässt sich nur derart ermitteln, dass man die Resultate dieser oder einer andern Untersuchung mit den durch Beobachtungen gefundenen vergleicht. Es wird gleich gezeigt werden, dass nach Nicollet $3(B-A)/C = 0{,}00167$ ist. Dieser Werth würde $\varphi_0$ so klein machen, dass es überhaupt nicht abzuschätzen ist.

Die erste der Gleichungen (4) zeigt, dass $2\beta$ kleiner als $q^2$ sein muss, der Mond sich also nur dann so bewegen kann, dass er der Erde immer dieselbe Seite zudreht, wenn die Trägheitsmomente $A$ und $B$ in dem Mond hinreichend ungleich sind, um dieser Bedingung genügen zu können.

Wenn wir nach der physikalischen Ursache des Unterschiedes zwischen den Trägheitsmomenten für die beiden Hauptaxen im Mondäquator forschen, so denken wir natürlich an die Anziehung, welche die Erde auf diesen Körper ausübt. Diese Anziehung hatte in der Vergangenheit oder hat in der Gegenwart das Bestreben, den nach der Erde gerichteten Durchmesser zu verlängern. Laplace hat unter den Annahmen, die gewöhnlich in der Theorie der Gestalt der Erde gemacht werden, versucht, daraus den Werth von $q^2$ abzuleiten. Hier interessirt uns nur das Resultat, dass das Verhältniss $2\beta/q^2$ so klein ist, dass man sein Quadrat vernachlässigen kann. Nimmt man dies an, so ergibt sich auch hier wieder, dass auch $\varphi_0$ sehr klein sein muss. Daraus folgt auch, dass man, in den Gleichungen (5) und (6), $-\beta/q^2$ anstatt $\varphi_0$ und die Einheit für $\cos 2\varphi_0$ setzen kann.

*Wenn man daher voraussetzt, der Mond bewege sich in einem Augenblick so, dass die Axe seines kleinsten Momentes nach der Erde gerichtet ist und dass seine Winkelgeschwindigkeit um seine Rotationsaxe nahezu der seines Schwerpunktes um die Erde gleichkommt, so behält die Axe des kleinsten Momentes beständig ihre fast genau nach der Erde gehende Richtung bei. Die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Mondes um seine Axe wird sofort der seines Schwerpunktes um die Erde gleich und nimmt an allen ihren säcularen Aenderungen Theil.* Dies ist das Laplace'sche Theorem. Es zeigt, dass der gegenwärtige Bewegungszustand des Mondes stabil ist, erklärt aber nicht, warum die Winkelgeschwindigkeit um die Axe so nahezu der Winkelgeschwindigkeit um die Erde gleich wurde.

§ 553. Der Satz, dass der Mond immer dieselbe Seite der Erde zuwende, bedarf gewisser Einschränkungen. Die Winkelgeschwindigkeit des Mondes um seine Axe ist nahezu gleichförmig, diejenige dagegen in seiner Bahn um die Erde ist nicht constant; daraus entsteht eine Ungleichheit oder Libration in der Länge, welche bis auf sechs Grade steigen kann. Ferner steht die Rotationsaxe des

Mondes auf der Ebene seiner Bahn nicht genau senkrecht; es gibt also auch eine Libration in der Breite. Schliesslich existirt, weil der Beobachter nicht in dem Mittelpunkt der Erde steht, eine tägliche Libration, die von der Parallaxe herrührt und nahezu einen Grad betragen kann. Sie heisst die scheinbare oder geometrische Libration. Hat man sie alle in Rechnung gezogen, so bleibt noch eine thatsächliche Libration der Winkelgeschwindigkeit des Mondes um seine Axe übrig; diese letztere Ungleichheit oder Libration wollen wir hier untersuchen.

§ 554. Wenn die Länge des Mittelpunktes des Mondes, von dem Centrum der Erde aus gesehen,

$$\theta = \theta_1 + M \sin(pt + \alpha) + \text{etc.}$$

ist, worin $\theta_1 = nt + \frac{1}{2}\beta t^2 + \varepsilon$ gesetzt werden muss, so ist die Länge eines Fleckes auf dem Mond, von dem Centrum des Mondes gesehen und von dem Frühlingstagundnachtgleichenpunkt aus gemessen,

$$L = l + \pi + \theta_1 + H \sin(qt + K) + \frac{Mq^2}{q^2 - p^2} \sin(pt + \alpha) + \text{etc.},$$

worin $l$ eine Constante bedeutet. Ein Mondmeridian, dessen Länge durch diesen Ausdruck gegeben ist, liegt auf dem Mond fest und bewegt sich mit ihm. Der specielle Meridian, dessen Länge durch diesen Ausdruck, wenn man $l$ weglässt, bestimmt wird, heisst der erste Meridian und $l$ ist die Länge des betrachteten Fleckes auf dem Mond, von dem ersten Meridian aus gemessen. Wenn man die periodischen Glieder in dem Ausdruck für $L$ als nahezu unmerklich weglässt, so wird der erste Meridian durch die Länge $L = \pi + \theta_1$ definirt und dieser Meridian halbirt die sichtbare Scheibe des Mondes, wenn man voraussetzt, der Mond bewege sich in der Ekliptik mit der Winkelgeschwindigkeit $n + \beta t$ um die Erde, rotire mit derselben Winkelgeschwindigkeit um eine zur Ekliptik senkrechte Axe und werde von dem Mittelpunkt der Erde aus beobachtet.

§ 555. Um die Zahlenwerthe der Coefficienten der periodischen Glieder in dem Ausdruck für $L$ bestimmen zu können, muss man die Schwingungen eines passend gelegenen Fleckes auf der sichtbaren Scheibe des Mondes beobachten. Bouvard mass den Unterschied zwischen der geraden Aufsteigung (Rectascension) und Declination des Fleckes Manilius und der des glänzenden Randes oder Saumes des Mondes. Zieht man sie von dem berechneten halben Diameter des Mondes ab, so sind die Coordinaten des Fleckes in Bezug auf das Centrum der sichtbaren Scheibe bekannt. Eine grosse Anzahl astronomischer Correctionen ist dann vorzunehmen und das Resultat auf den Mittelpunkt des Mondes als Ausgangspunkt zu beziehen. Schliesslich wird die Länge des Fleckes auf der Ekliptik vom Frühlingsäquinoctium aus bis zu dem absteigenden Knoten des Mondäquators und dann in der Richtung dieses Aequators gemessen.

Dadurch, dass man nun die Längen eines Fleckes auf dem Mond zu verschiedenen Zeiten beobachtet und die so gefundenen den aus der Theorie abgeleiteten Resultaten gleich setzt, erhält man eine hinreichend grosse Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung der Werthe irgend welcher in der Theorie unbekannter Constanten. Auf diese Art kann man den Versuch machen, den Werth von $(B-A)/C$ zu entdecken. Die Beobachtungen von Bouvard und Nicollet zeigen jedoch, dass der Betrag der wahren Libration so klein ist, dass er fast nicht zu bemerken ist. Der Ausschlag der Schwingung nach jeder Seite der mittleren Lage ist in Mondlänge etwa 4′ 45″ oder 285″.

Könnte man das Glied $Hq \cos(qt + K)$ durch Beobachtungen finden, so liesse sich der Werth von $(B-A)/C$ aus seiner Periode ableiten. Unter den übrigen Gliedern des Ausdruckes für die Winkelgeschwindigkeit des Mondes um seine Axe sind diejenigen am besten zur Ermittelung des Werthes von $q$ geeignet,

welche die grössten Coefficienten haben, d. h., in denen entweder der Zähler $M$ möglichst gross oder der Nenner $q^2 - p^2$ möglichst klein ist. Das Glied, welches das grösste $M$ besitzt, ist die elliptische Ungleichheit und Laplace hat gezeigt, dass es durch Beobachtung gefunden werden könne, wenn $(B-A)/C$ die Grösse 0,03 erreichte. Das Glied mit dem kleinsten Werth von $p$ ist die jährliche Gleichung und hier ist $n/p = 13{,}36$, $M = -669''$. Schreibt man die Variation der Flecken nur dieser Ungleichheit allein zu, so wird $Mq^2/(p^2 - q^2) = 285$, woraus sich leicht $(B-A)/C = 0{,}00057$ ergibt.

Der Fleck Manilius wurde zuerst gewählt, weil er sowohl klar als nicht weit von dem Mittelpunkt der sichtbaren Scheibe entfernt ist und wurde von Bouvard in Paris bei jeder günstigen Gelegenheit während der vier Jahre 1806—1810 beobachtet. Diese Messungen wurden von Nicollet reducirt und besprochen und seine Resultate 1820 in der *Connaissance des Tems* für das Jahr 1822 veröffentlicht. Gegen die Wahl des Manilius erhoben später Beer und Mädler Einwände, weil er je nach der Art der Beleuchtung verschieden aussieht; sie schlugen vor, den Krater Moesting A zu wählen, den Webb in seinen *celestial objects* als klein und sehr hell beschreibt. Diesen Fleck hat dann H. Schlüter unter der Oberleitung Bessel's in Königsberg während zwei und einem halben Jahr 1841—43 beobachtet. Die Beobachtungen wurden später von T. Franz in Bd. 38 der Königsberger Beobachtungen, 1889 besprochen; Wichmann setzte sie im Jahr 1845 fort, Astr. Nachr. Nr. 619, etc., 1847. Im Jahr 1878 stellte Hartwig 42 weitere Gruppen von Beobachtungen an demselben Krater in Strassburg an. Zuletzt leitete in Oxford etwa 1880 Pritchard die Mondlibration aus den Abmessungen zweier Flecken auf einer Reihe von Mondphotographien ab. Der eine von ihnen war der Fleck Triesnecker B, den Mädler 1837 als Ersatz für den glänzenden Rand bei gewissen Mondbeobachtungen vorgeschlagen hatte.

§ 556. **Die Bewegung des Schwerpunktes des Mondes.** Man kann auch aus dem Potential in § 552 die Kraftcomponenten parallel und senkrecht zum Radius ableiten, welche an dem Schwerpunkt des Mondes in Folge der gegenseitigen Anziehung der Erde und des Mondes angreifen. Da die Hauptmomente des Mondes nahezu gleich sind und seine lineare Grösse im Vergleich mit seinem Abstand von der Erde klein ist, so bleiben diese Kräfte nahezu dieselben, wenn man die Masse des Mondes in seinem Schwerpunkt vereinigt. Die bei dieser Annahme vernachlässigte Wirkung der kleinen Kräfte ist unbedeutend im Vergleich mit der der übrigen am Schwerpunkt des Mondes angreifenden Kräfte. Die Bewegung dieses Schwerpunktes bleibt daher nahezu die gleiche, wenn man seine ganze Masse in seinen Schwerpunkt vereinigt.

Beisp. Der Schwerpunkt $G$ eines starren Körpers beschreibt eine nahezu kreisförmige Bahn um das sehr entfernte Centrum einer Kraft $O$, welche nach dem Newton'schen Gesetz anzieht und in einer der durch $G$ gehenden Hauptebenen liegt. Wenn $r = c(1+\varrho)$, $\theta = nt + n\psi$ die Polarcoordinaten von $G$ in Bezug auf $O$ sind, zu zeigen, dass die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varrho}{dt^2} - 3n^2\varrho - 2n^2\frac{d\psi}{dt} &= -\tfrac{9}{4}n^2\gamma' - \tfrac{9}{4}n^2\gamma\cos 2\varphi \\ 2\frac{d\varrho}{dt} + \frac{d^2\psi}{dt^2} &= \tfrac{3}{2}n\gamma\sin 2\varphi \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + n\frac{d^2\psi}{dt^2} &= -\frac{q^2}{2}\sin 2\varphi \end{aligned}\right\}$$

lauten, worin

$$\gamma = \frac{B-A}{Mc^2}, \quad \gamma' = \frac{2C-A-B}{3Mc^2}$$

ist.

Man beachte, dass die Werthe von $\gamma$ und $\gamma'$ viel kleiner als der von $q^2$ sind und daher bei einer ersten Annäherung weggelassen werden könnten.

Wenn der Körper dem Kräftecentrum immer dieselbe Seite zuwendet, wie dies der Mond gegen die Erde thut, $\varphi$ also nahezu constant und klein ist, zu zeigen, dass es zwei kleine Ungleichheiten in dem Werth von $\varphi$ von der Form $L\sin(pt+\alpha)$ gibt, worin $p$ durch die Gleichung

$$(p^2-n^2)(p^2-q^2)-3n^2\gamma(p^2+3n^2)=0$$

bestimmt wird und die eine Periode nahezu der des Körpers um das Kraftcentrum gleich kommt und die andere Periode sehr lang ist.

Wenn sich der Körper, wie die Erde, nahezu gleichförmig um seine Axe $GC$ dreht, und nicht immer dieselbe Seite seinem Kraftcentrum zukehrt, $\varphi$ also etwa gleich $n't+\varepsilon'$ ist, zu zeigen, dass es zwei kleine Ungleichheiten in dem Werth von $\varphi$ gibt, und dass für die eine $p=n$, für die andere $p=2n'$ ist.

§ 557. **Beispiele.** Beisp. 1. Man zeige, dass der Mond immer nahezu dieselbe Seite demjenigen Brennpunkt seiner Bahn zuwendet, in welchem die Erde nicht liegt. [Smith's *Price.*]

Beisp. 2. Wenn der Schwerpunkt $G$ des Mondes gezwungen wird, einen Kreis mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit $n$ um das feste Centrum $O$ einer Kraft zu beschreiben, die nach dem Newton'schen Gesetz anzieht, zu zeigen, dass die Axe $GA$ des Mondes auf beiden Seiten von $GO$ Schwingungen ausführt oder vollständige Umdrehungen in Bezug auf $GO$ macht, je nachdem die Winkelgeschwindigkeit des Mondes um seine Axe in dem Moment, in welchem $GA$ und $GO$ der Richtung nach zusammenfallen, kleiner oder grösser als $n+q$ ist, worin $q$ dieselbe Bedeutung wie in § 552 hat. Man ermittle auch die Grösse der Schwingungen.

Beisp. 3. Ein Massenpunkt $m$ bewegt sich ohne Druck auf einem glatten kreisförmigen Ring von der Masse $M$ mit gleichmässiger Geschwindigkeit unter der Wirkung einer Centralkraft, die in dem Mittelpunkt des Drahtes sitzt und nach dem Newton'schen Gesetz anzieht. Man zeige, dass dieses Bewegungssystem stabil ist, wenn $\frac{m}{M}>\frac{8+12\sqrt{6}}{25}$ ist. Es wird vorausgesetzt, dass die Störung dem Massenpunkt oder dem Draht gegeben wird und das Kräftecentrum im Raum fest liegen bleibt.

Beisp. 4. Ein gleichförmiger Ring von der Masse $M$ und sehr kleinem Querschnitt trägt auf einem Punkt seines Umfanges einen schweren materiellen Punkt von der Masse $m$ und das Ganze befindet sich in gleichförmiger Bewegung um das Centrum einer Kraft, welche nach dem Newton'schen Gesetz anzieht. Man zeige, dass die Bewegung nur dann stabil sein kann, wenn $m/(M+m)$ zwischen 0,815865 und 0,8279 liegt.

Aus diesem Beispiel ergibt sich, (1) dass ein Ring, wie der des Saturn, welcher sich um ein Kräftecentrum bewegt, keine stabile Lage haben kann, wenn er gleichförmig ist und (2) dass, wenn das Gewicht des Ringes ausgeglichen werden soll, um die Bewegung stationär zu machen, dies sehr sorgfältig geschehen muss. Eine auch nur geringe Aenderung in der Vertheilung des Gewichtes verwandelt die stabile Combination in eine unstabile. Das Beispiel ist Prof. Maxwell's *Essay on Saturn's Rings* entnommen.

Beisp. 5. Der Schwerpunkt eines Körpers, der die Masse $M$ hat und bez. der $xy$-Ebene symmetrisch liegt, ist $G$, und $O$ ein solcher Punkt, dass die resultirende Attraction des Körpers auf $O$ die Richtung der Linie $GO$ hat. Wird nun der Körper in eine solche Lage gebracht, dass $O$ mit einem festliegenden Kräftecentrum $S$ zusammenfällt, und dann um eine durch $O$ gehende, auf der $xy$-Ebene senkrecht stehende Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ in Rotation gesetzt, so dreht sich $G$, wenn die Bewegung ungestört bleibt, gleichmässig in einem Kreis herum, und wendet dabei $O$ immer dieselbe Seite zu, vorausgesetzt,

dass $Ma\omega^2$ der resultirenden Attraction in der Richtung $GO$ gleich kommt, worin $a$ den Abstand $GO$ bedeutet. Man soll die Bedingungen bestimmen, unter denen die Bewegung stabil ist.

Wird die Bewegung gestört, so fällt $O$ nicht mehr mit dem Centrum $S$ der Kraft zusammen. Man wähle dann zwei aufeinander senkrechte Gerade, die sich gleichförmig um $S$ als Coordinatenanfang mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ drehen, als Coordinatenaxen und $x$ sei Anfangs parallel zu $OG$. $(x, y)$ seien die Coordinaten von $O$, $\varphi$ der Winkel, den $OG$ mit der $x$-Axe macht; $x, y, \varphi$ sind dann klein. $V$ sei das Potential des Körpers für $O$ und $\partial^2 V/\partial x^2 = \alpha$, $\partial^2 V/\partial x \partial y = \gamma$, $\partial^2 V/\partial y^2 = \beta$. $S$ sei der Betrag an Materie in dem Kräftecentrum. Die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes in Bezug auf Axen, die sich in einer Ebene um einen festen Coordinatenanfang bewegen, wurden in Bd. 1 gegeben. Man kann sie auch aus den §§ 4 und 5 dieses Bandes ableiten, indem man $\theta_1 = 0$ und $\theta_2 = 0$ setzt. Auf diese Art reduciren sich die Bewegungsgleichungen von $G$ auf

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 - \frac{S}{M}\alpha\right)x - \left(2\omega\frac{d}{dt} + \frac{S}{M}\gamma\right)y - 2\omega a\frac{d}{dt}\varphi = 0,$$

$$\left(2\omega\frac{d}{dt} - \frac{S}{M}\gamma\right)x + \left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 - \frac{S}{M}\beta\right)y + a\frac{d^2}{dt^2}\varphi = 0$$

und die Gleichung für die Winkelbewegungsgrösse um $S$ führt zu

$$2\omega a x + a\frac{d}{dt}y + (a^2 + k^2)\frac{d}{dt}\varphi = 0,$$

worin $k$ der Trägheitsradius des Körpers für $O$ ist. Combinirt man diese Gleichungen in Form einer Determinante und reducirt, so ergibt sich die Differentialgleichung für $\xi$, $\eta$ oder $\varphi$ in der Form

$$A\frac{d^4}{dt^4} + B\frac{d^2}{dt^2} + C = 0.$$

Stabilität besteht nur dann, wenn die Wurzeln dieser Gleichungen reell und negativ sind. $A, B, C$ müssen mithin dasselbe Vorzeichen haben und $B^2$ muss grösser als $4AC$ sein. Dieser Satz rührt von Lord Kelvin her und findet sich in Prof. Maxwell's *Essay on Saturn's Rings.*

§ 558. **Das Cassini'sche Theorem über den Mondäquator.** Ehe wir zu der theoretischen Discussion dieses Problems übergehen, wollen wir die wichtigsten Resultate, zu denen man bisher gekommen ist, vorher angeben. Wir haben es mit drei Ebenen zu thun, nämlich (1) der Ebene der Mondbahn um die Erde oder, was dasselbe ist, der Ebene der Erdbahn, wie sie vom Mond aus gesehen wird; (2) der durch den Mittelpunkt des Mondes parallel zur Ekliptik d. h. zur Ebene der Erdbahn um die Sonne gelegten Ebene; (3) der Ebene des Mondäquators. Die letztere steht senkrecht auf derjenigen Figurenaxe, die am meisten nahezu mit der Rotationsaxe zusammenfällt. Cassini hat nun entdeckt, dass diese drei Ebenen sich sämmtlich in derselben Geraden schneiden, die Ebene des Mondäquators also der Ebene der Mondbahn bei ihrem Rückschreiten auf der Ekliptik folgen muss. Er entdeckte ferner, dass die der Ekliptik parallele Ebene stets *zwischen* den beiden anderen Ebenen liegt, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Bd. 8. Diese Resultate wurden später von T. Mayer bestätigt, der eine Reihe von Beobachtungen an den Flecken des Mondes in den Jahren 1748 und 1749 anstellte. Er corrigirte auch die von Cassini angegebenen Neigungen der drei Ebenen. In der Folge fand auch Lalande die Cassini'schen Theoreme bestätigt, siehe die *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1764.

Diese Beziehungen zwischen den drei Ebenen sind so interessant und ausserordentlich, dass man bald nach einer theoretischen Erklärung suchte. D'Alembert war 1754 der Erste, der den Versuch machte. Seine Resultate waren jedoch

nichts weniger, wie vollständig. Die Academie der Wissenschaften bot ihren Preis von 1764 für eine vollständige Theorie der Mondlibration an. Er wurde von Lagrange gewonnen, welcher 1780 bewies, dass, wenn die drei Ebenen ursprünglich zusammenfallen, die Anziehung der Erde auf den Mond das Zusammenfallen aufrecht erhält; *Mémoires de Berlin*, 1780. Laplace zeigte ferner, dass diese Theoreme weder durch die säcularen Ungleichheiten der mitteren Bewegung des Mondes, noch durch die säcularen Aenderungen der Ekliptik beeinflusst werden. Auch Poisson beschäftigte sich mit der Lagrange'schen Theorie; er dehnte sie aus und entdeckte einige neue Ungleichheiten in der Bewegung. Man findet diese Resultate in der *Connaissance des Tems* von 1821.

Die Untersuchungen sind von späteren Astronomen fortgesetzt worden; doch würde uns hier eine ausführliche Darstellung der Geschichte des Problems zu weit führen. Wir können lediglich auf die kurze Skizze in § 555 verweisen und bemerken nur, dass die von den Astronomen angegebene Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik zwischen 1° 28′ 45″ und 1° 36′ 34″ liegt, während die physikalische Libration verschieden von 200″ bis 350″ geschätzt wird. Genaueres findet der Leser in Grant's *History of physical astronomy*, 1852, der *Connaissance des Tems* von 1822 und den *Monthly Notices of the Astronomical Society* von 1881 und 1890.

§ 559. **Theoretische Untersuchung des Cassini'schen Theorems.** Die Bewegung eines starren Körpers um ein entferntes Kräftecentrum ist unter der Annahme untersucht worden, dass sie durchaus in einer Ebene stattfindet. Aus Gleichung (2), § 552 ist ersichtlich, *dass die Bewegnng stationär ist*, wenn der Schwerpunkt eine kreisförmige Bahn beschreibt und eine Hauptaxe des starren Körpers immer die Richtung nach dem Kräftecentrum hat. Die frühere Untersuchung zeigt auch, *dass diese Bewegung* für alle Störungen *stabil ist*, welche die Ebene der Bewegung nicht ändern, vorausgesetzt, dass das Trägheitsmoment für die nach dem Kräftecentrum gerichtete Hauptaxe kleiner ist, als das Trägheitsmoment für die andre in der Bewegungsebene liegende Hauptaxe. Es erübrigt uns noch, die Wirkung dieser Störungen in dem allgemeineren Fall zu bestimmen, in welchem die Bewegung in einem Raum von drei Dimensionen vor sich geht.

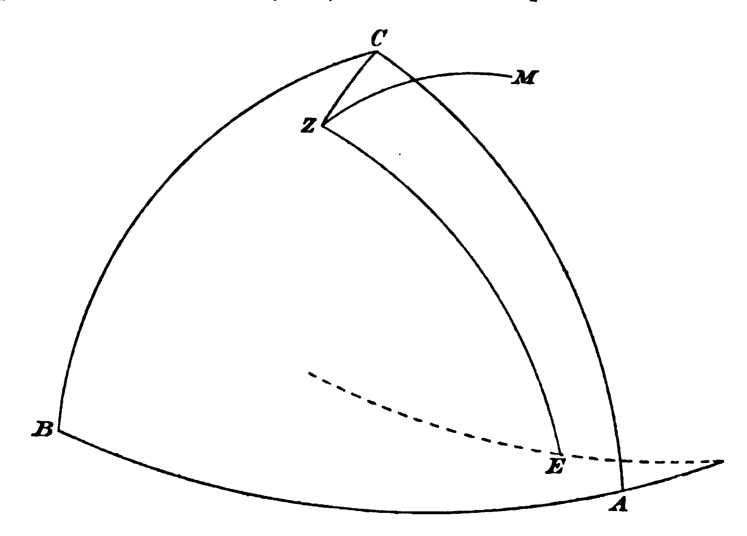
*Die Aufstellung des Problems.* Dem Problem, das wir zu betrachten haben, lässt sich die folgende Fassung geben. Der Mond dreht sich um seinen Schwerpunkt $G$ und steht unter der Wirkung eines Kraftcentrums $E$, welches sich auf gegebene Weise bewegt. Die Momentanaxe fällt nahezu mit einer Hauptaxe $GC$ zusammen und steht nahezu auf der Ebene der Ekliptik senkrecht. Die mittlere Winkelgeschwindigkeit ist derjenigen von $E$ um $G$ gleich, die eine Hauptaxe $GA$ ist daher nahezu nach $E$ hin gerichtet. Das Kräftecentrum $E$ bewegt sich auf nahezu kreisförmiger Bahn in einer Ebene, die fast genau senkrecht auf $GC$ steht. Diese Ebene hat, wie bekannt, eine langsame Bewegung im Raum, in Folge deren das Loth $GM$ auf ihre momentane Lage einen Kegel, mit einem kleinen Winkel an der Spitze, um das Loth $GZ$ auf die Ekliptik beschreibt. Die beiden Lothe $GM$ und $GZ$ haben eine nahezu constante Neigung von ungefähr 5° 8′ gegeneinander. Die Bewegung der Normalen $GM$ um $GZ$ ist nahezu gleichförmig und eine vollständige Umdrehung findet in etwa 18 Jahren 7 Monaten statt. Die Knoten der Bahn von $E$ um $G$ *schreiten* daher auf der Ekliptik mit einer Geschwindigkeit *rückwärts*, welche ungefähr der 1/250te Theil der Winkelgeschwindigkeit von $E$ um $G$ ist.

Ehe wir weiter fortfahren, wird es sich empfehlen, die Zahlengrössen einiger der kleinen Glieder anzugeben. Die Richtungscosinusse von $E$ seien $\lambda$, $\mu$, $\nu$. Die Neigungen des Mondäquators und der Mondbahn gegen die Ekliptik sind aber $1\frac{1}{2}°$ bezüglich 5°. Der grösste Werth, den $\nu$ annehmen kann, beträgt mithin sin $6\frac{1}{2}°$, also ungefähr $\frac{1}{10}$. Aus § 552 ergibt sich, dass der mittlere Werth von $\mu$ Null ist,

während die Libration in der Länge etwa 4 oder 5 Minuten ausmacht. Der grösste Werth von $\mu$ wird danach $\mu = \sin 5' = \frac{1}{700}$. Es folgt dann $\lambda = 1 - \frac{1}{200}$. Ferner ist nahezu $r = \cos CZ = \cos 1\frac{1}{2}^0 = 1 - \frac{1}{3000}$. Also ist $p^2 + q^2 = \frac{1}{1500}$ und der grösste Werth von $p$ oder $q$ ungefähr $\frac{1}{40}$. Wir sind jetzt im Stande, die Grösse der kleinen Glieder, die in der folgenden Untersuchung vernachlässigt werden, richtig abzuschätzen.

Die Figur ist so gezeichnet, dass die Richtungscosinusse $(\lambda, \mu, \nu)$ und $(p, q, r)$ positiv sind. Die Pole $C$, $Z$, $M$ befinden sich in Wirklichkeit auf einem grössten Kreis und $Z$ liegt zwischen $C$ und $M$.

§ 560. Es wird offenbar am vortheilhaftesten sein, die Bewegung auf Axen $GX$, $GY$, $GZ$ zu beziehen, die im Raum festliegen und von denen $GZ$ auf der Ekliptik senkrecht steht. $GA$, $GB$, $GC$ seien die Hauptaxen des Mondes für den




Schwerpunkt $G$ und $(p, q, r)$ die Richtungscosinusse von $GZ$ in Bezug auf die Coordinatenaxen $GA$, $GB$, $GC$. Nach § 18 ist alsdann, weil $GZ$ im Raum festliegt,

$$p' - \omega_3 q + \omega_2 r = 0\,, \quad q' - \omega_1 r + \omega_3 p = 0\,, \quad r' - \omega_2 p + \omega_1 q = 0 \quad . \text{ (I)},$$

worin die Accente Differentiationen nach der Zeit angeben.

$GC$ sei die Rotationsaxe des Mondes und wie früher das Trägheitsmoment für $GA$ kleiner als das für $GB$.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die kleinen Schwingungen um den Zustand stationärer Bewegung zu ermitteln, in welchen $GZ$, $GC$, $GM$ zusammenfallen. Es ist also $p$, $q$, $\omega_1$, $\omega_2$ klein und $r$ sehr nahe der Einheit gleich. Die Gleichungen (I) werden daher

$$p' - nq + \omega_2 = 0\,, \quad q' - \omega_1 + np = 0\,,$$

worin $n$ den mittleren Werth von $\omega_3$ angibt.

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ seien die Richtungscosinusse des Kraftcentrums $E$, von $G$ aus gesehen. Nach den Euler'schen Gleichungen und § 519 hat man dann

$$\left.\begin{aligned} A\omega_1' - (B - C)\,\omega_2\,\omega_3 &= -\,3n'^2(B - C)\,\mu\nu \\ B\omega_2' - (C - A)\,\omega_3\,\omega_1 &= -\,3n'^2(C - A)\,\nu\lambda \\ C\omega_3' - (A - B)\,\omega_1\,\omega_2 &= -\,3n'^2(A - B)\,\lambda\mu \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{ (II)}.$$

Bei stationärer Bewegung dreht der starre Körper immer die Axe $(GA)$ des kleineren Momentes dem Kräftecentrum zu und ist $\omega_3 = n$. Alsdann sind sowohl $\mu$ als $\nu$ kleine Grössen, man kann folglich in der ersten Gleichung ihr Product $\mu\nu$ vernachlässigen und in der zweiten $\nu\lambda = \nu$ setzen. In den kleinen Gliedern lässt sich $n$ oder $n'$ für $\omega_3$ schreiben.

Versteht man unter $l$ die Breite der Erde, wie sie vom Mond aus erscheint, so ist nahezu

$$\sin l = \cos ZE = p\lambda + q\mu + r\nu = p + \nu.$$

Die beiden ersten Euler'schen Gleichungen nehmen demnach die Form an

$$\left.\begin{aligned} &A\omega_1' - (B-C)\,n\,\omega_2 = 0 \\ &B\omega_2' - (C-A)\,n\,\omega_1 = -3n^2(C-A)(-p+\sin l) \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad \text{(III)}.$$

Nimmt man an, die Erde bewege sich, vom Mond aus gesehen, auf einer kreisförmigen Bahn in einer Ebene, welche unter dem constanten Winkel $k$ gegen die Ekliptik geneigt ist und deren aufsteigender Knoten die Länge $-gt+\beta$ hat, so erhält man

$$\sin l = k \sin(nt + gt - \beta).$$

In diesem Ausdruck misst $g$ die Geschwindigkeit, mit welcher der Knoten zurückschreitet und ist $g$ etwa der zweihundertundfünfzigste Theil von $n$. Wir werden daher $g/n$ als kleine Grösse ansehen.

Für die Auflösung der obigen Gleichungen empfiehlt es sich, $\omega_1$, $\omega_2$ durch $p$, $q$ auszudrücken. Es ergibt sich dann, wie in § 15,

$$\left.\begin{aligned} &Aq'' + (A+B-C)\,np' - n^2(B-C)\,q = 0 \\ &Bp'' - (A+B-C)\,nq' + 4n^2(C-A)\,p = 3n^2(C-A)\sin l \end{aligned}\right\} \quad . \ . \quad \text{(IV)}.$$

Um $p$, $q$ zu finden, wollen wir

$$p = P\sin\{(n+g)t - \beta\}, \quad q = Q\cos\{(n+g)t-\beta\}$$

setzen, worin $P$, $Q$ Constante sind, welche durch Substitution in die Gleichung bestimmt werden. Man hat

$$\left.\begin{aligned} &Q\{B(n+g)^2 + (B-C)n^2\} = P(A+B-C)\,n\,(n+g) \\ &P\{B(n+g)^2 - 4(C-A)n^2\} - Q(A+B-C)\,n\,(n+g) = -3n^2k(C-A) \end{aligned}\right\}.$$

Diese Gleichungen kann man auflösen und $P$ sowie $Q$ genau ermitteln. In dem Fall des Mondes sind die Verhältnisse $\frac{A-B}{C}$, $\frac{B-C}{A}$, $\frac{C-A}{B}$ und $\frac{g}{n}$ sämmtlich klein; vernachlässigt man also die Producte dieser kleinen Grössen, so wird

$$\frac{Q}{P} = 1 - \frac{g}{n}, \quad P = \frac{3nk(C-A)}{3n(C-A) - 2Bg}.$$

§ 561. **Die Complementärfunctionen.** Um sie zu erhalten, setze man

$$p = F\sin(st+H), \quad q = G\cos(st+H);$$

durch Substitution kommt man zu der quadratischen Gleichung

$$ABs^4 - \{(A+B-C)^2 - B(B-C) - 4A(A-C)\}\,n^2s^2 + 4(A-C)(B-C)\,n^4 = 0$$

für $s^2$ und erhält

$$\frac{G}{F} = \frac{(A+B-C)\,ns}{As^2 + (B-C)\,n^2},$$

woraus sich das Verhältniss der Coefficienten der entsprechenden Glieder in $p$ und $q$ ergibt. Wären die Wurzeln dieser Gleichung negativ, so würden $p$ und $q$ durch Exponentialwerthe von $t$ dargestellt werden und daher mit der Zeit aufhören klein zu sein. Es ist daher für die Stabilität nothwendig, dass der Coefficient

von $s^2$ negativ sei und das Product $(A-B)(B-C)$ positiv. Diese beiden Bedingungen sind, wenn es sich um den Mond handelt, wahrscheinlich erfüllt. Denn, da sowohl $B-C$ als $A-C$ klein sind, so ist das Glied $(A+B-C)^2$ viel grösser, als die beiden anderen Glieder in dem Coefficienten von $s^2$. Da ferner der Mond an seinen Polen abgeplattet ist, so wird wahrscheinlich $A$ sowohl als $B$ kleiner als $C$ sein.

Zu einem Näherungsausdruck für die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung kommt man auf die folgende Art. Da das Product der Wurzeln, wie das letzte Glied angibt, sehr klein und ihre Summe, wie der Coefficient von $s^2$ zeigt, nahezu gleich $n^2$ ist, so sieht man, dass eine der Wurzeln sehr klein und die andere nahezu gleich $n^2$ sein muss. Um die letztere zu finden, setze man $s^2 = n^2 + x$, substituire in die Gleichung und vernachlässige die Quadrate von $x$. Man erhält annähernd $x = 3n^2(C-A)/C$ und so $s = n\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{C}\right)$.

Zur Ermittelung der ersteren vernachlässigen wir $s^4$ und erhalten, wenn $s_1$ diese Wurzel bedeutet,

$$s_1 = 2n\left(\frac{C-A}{C}\,\frac{C-B}{C}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck für $G/F$, so wird in den beiden Fällen

$$\frac{F}{G} = \frac{s}{n}, \quad \frac{F_1}{G_1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{C-B}{C-A}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir werden gleich zeigen, dass $(C-A)/C = 0{,}000597$ und $(C-B)/C = 0{,}000033$ ist. Legt man diese Werthe zu Grunde, so ergibt sich, dass die Periode der einen der Complementärfunctionen nur sehr wenig unter einem Monat und die der anderen etwa 3571 Monate oder 274 Jahre beträgt.

§ 562. Wie man sieht, hat jeder der Ausdrücke für $p$ und $q$ drei periodische aber keine constanten Glieder. Die periodischen Glieder sind die erzwungene Schwingung, welche die Folge des Gliedes $\sin l$ in den Gleichungen (III), § 560 ist, und die beiden Complementärfunctionen. Man kann bei der Annäherung den Ausdrücken die Form geben

$$\left.\begin{aligned} p &= -M\left(1 + \frac{g}{2n}\right)\sin\{(n+g)t - \beta\} + Ns\sin(st + H) + N_1 s_1 \sin(s_1 t + H_1) \\ q &= -M\left(1 - \frac{g}{2n}\right)\cos\{(n+g)t - \beta\} + Nn\cos(st + H) - 4N_1 n\varrho\cos(s_1 t + H_1) \end{aligned}\right\},$$

worin $M = \dfrac{3\left(n - \frac{1}{2}g\right)\varrho k}{2g - 3n\varrho}$ und $\varrho = \dfrac{C-A}{B}$ ist. $M$ hat den Zahlenwerth $1^\circ 28'$, siehe § 559, ist also etwa zwei Siebentel von $k$. Wie man gleich sehen wird, ist $(C-A)/B$ gleich 0,0006, daher $M$, weil $g/n$ ungefähr den Werth 0,0043 hat, positiv.

§ 563. *Die Bewegung der Hauptaxe $GC$ im Raum zu finden und das Cassini'sche Theorem abzuleiten.* $M$ sei der Pol der Bahn von $E$, wie sie vom Mittelpunkt des Mondes aus erscheint, also der Pol der in der letzten Figur punktirten Linie. Wenn die Länge von $E$, nämlich $\theta = (n+g)t - \beta$ in der Ekliptik von dem aufsteigenden Knoten der Bahn aus gemessen wird, so ist der Winkel $EZM$ gleich $\frac{1}{2}\pi + \theta$ und dabei in der Bewegungsrichtung positiv zu nehmen.

Da ferner $p$ und $q$ die Coordinaten von $Z$ in Bezug auf die Tangenten an $CA$ und $CB$ im Punkt $C$ als Axen sind und $E$ sich nie weit von $A$ entfernt, so

erhält man $\cos EZC = -p/\sqrt{p^2+q^2}$ und $\sin EZC = q/\sqrt{p^2+q^2}$, worin die Wurzel das positive Vorzeichen hat. Daraus folgt

$$\sin CZM = \sin EZC \cos EZM - \cos EZC \sin EZM = \frac{-q\sin\theta + p\cos\theta}{\sqrt{p^2+q^2}},$$
$$\sin^2 CZ = p^2 + q^2.$$

Zuerst wollen wir die erzwungene Schwingung allein betrachten, § 562, und $p = -M(1+g/2n)\sin\theta$, $q = -M(1-g/2n)\cos\theta$ setzen. Man findet leicht

$$\sin CZM = (-g/2n)\sin 2\theta, \quad \sin CZ = M\{1-(g/2n)\cos 2\theta\}.$$

Der mittlere Werth des Winkels $CZM$ ist daher Null. *Die drei Punkte $C$, $Z$ und $M$ machen also sehr kleine Schwingungen um einen Zustand stationärer Bewegung und bleiben dabei alle drei auf demselben grössten Kreis. Zugleich ist der Bogen $CZ$ während der ganzen Bewegung merklich constant*[1]).

Alsdann wollen wir die Complementärfunctionen in die Werthe von $p$ und $q$ einschliessen; wir erhalten dann complicirtere Werthe für $\sin CZM$ und $\sin CZ$. Nimmt man aber an, $N/M$ (§ 562) sei so klein, dass man alle Glieder, welche über sein Quadrat hinausgehen, weglassen kann, so ergibt sich wieder, dass $\sin CZM$ periodisch ist und dass sich $\sin CZ$ von einer Constanten nur durch periodische Glieder unterscheidet. Man kommt also auch hier zu dem Resultat, *dass die drei Pole $C$, $Z$, $M$ nahezu auf demselben grössten Kreis liegen und einen Abstand von einander haben, der merklich constant ist.*

Dass der Pol $Z$ stets zwischen $C$ und $M$ liegen muss, kann man durch Untersuchung seiner relativen Lage zeigen, wenn die Länge von $E$ einen geeigneten Werth hat. Ist $\theta = \frac{1}{2}\pi$, so liegt der störende Körper $E$ auf dem grössten Kreis $MZ$, wobei die Punkte $M$, $Z$ und $E$ nahezu sich auf dem Kreis $AC$ befinden. Da ferner $E$ alsdann in nördlicher Breite ist, so muss $EM$ grösser als $EZ$ d. h. $AM$ grösser als $AZ$ sein. Hat aber $\theta$ den Werth $\frac{1}{2}\pi$, so zeigen die Ausdrücke für $p$ und $q$ in § 562, dass $p$ negativ ist, wenn man annimmt, die Grösse der er-

---

1) Stellt man mit $d\psi/dt$ die Winkelgeschwindigkeit von $GC$ um $GZ$ dar, so ist nach § 19

$$(p^2+q^2)\psi' = (\text{der Winkelgeschw. um } GZ) - (\text{der Winkelgeschw. um } GC)\cos CZ$$
$$= \omega_1 p + \omega_2 q + \omega_3 r - \omega_3 r.$$

Substituirt man für $\omega_1$, $\omega_2$ aus den Gleichungen I, § 560, so wird

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_3}{r} + \frac{pq'-qp'}{(p^2+q^2)r} \quad \text{und} \quad \sin^2 CZ = p^2+q^2.$$

Dieser Ausdruck für $d\psi/dt$ ist genau; wir sind daher im Stande zu beurtheilen, welche Wirkung bei der Substitution der angenäherten Werthe von $p$ und $q$ die Vernachlässigung der kleinen Glieder ausübt. Man kann das Resultat auch aus der Euler'schen geometrischen Formel ableiten, da $p = -\sin\theta\cos\varphi$ und $q = \sin\theta\sin\varphi$ ist.

Führt man die Substitution aus und behält die Quadrate von $N/M$ bei, so ergibt sich, dass $d\psi/dt$ von $-g$ und $\sin CZ$ von $M$ sich nur durch kleine periodische Glieder unterscheiden.

Wie bekannt, bewegt sich der Pol $M$ rückwärts um den Pol $Z$ der Ekliptik mit einer mittleren Geschwindigkeit, die wir $g$ genannt haben. $M$ und $C$ schreiten daher um $Z$ mit derselben mittleren Winkelgeschwindigkeit rückwärts. Der Winkel $MZC$ bleibt also während der Bewegung nahezu constant.

Untersucht man den Werth des Winkels $MZC$, wenn $E$ sich in einer Entfernung von 90° von dem Knoten seiner Bahn befindet und bedenkt, dass $E$ dicht an dem Meridian $CA$ liegt, so sieht man ein, dass Winkel $MZC$ sehr klein sein muss.

zwungenen Schwingung sei bedeutender als die der beiden freien Schwingungen. Der Bogen $AZ$ ist daher grösser als $AC$. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich, dass $Z$ zwischen $C$ und $M$ liegt.

§ 564. *Die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik und der Zahlenwerth von* $(C-A)/B$. Aus dem Vorhergehenden folgt, dass bei Vernachlässigung der freien Schwingungen die Neigung $CZ$ des Mondäquators gegen die Ekliptik durch

$$CZ = M - M\frac{g}{2n}\cos 2\{(n+g)t-\beta\}$$

gegeben ist. Sie ist nahezu constant; die Variationen um ihren mittleren Werth betragen höchstens den $\frac{1}{500}$ten Theil der Neigung selbst. Die Periode dieser Variationen dauert etwa einen halben Monat, genau einen halben synodischen Monat des Mondes und des Knotens.

Die mittlere Neigung ist $M$, eine Grösse, die nicht willkürlich ist, sondern von dem Werth $(C-A)/B$ und von $g$ abhängt. Da nun $g$ genau bekannt ist, so lässt sich der Ausdruck für $M$ in § 562 benutzen, um einen angenäherten Werth von $(C-A)/B$ daraus abzuleiten. Der thatsächliche Zahlenwerth der Neigung ist nach den Ermittelungen von Mayer und Nicollet $1^\circ 28'$.

Laplace vernachlässigte alle periodischen Ungleichheiten, da sie nur einen kleinen Bruch von $M$ ausmachen und fand auf diese Weise $(C-A)/B = 0{,}000599$, also nahezu gleich $\frac{1}{7}\,g/n$.

§ 565. *Die Bewegung der Momentanaxe in dem Körper.* Nimmt man die vollständigen Werthe von $p$ und $q$ mit Einschluss der Complementärfunctionen in § 562, so findet man $\omega_1$, $\omega_2$ leicht mit Hülfe der Formeln $\omega_1 = np + dq/dt$, $\omega_2 = nq - dp/dt$ in § 560. Man erhält so

$$\omega_1 = N_1 n s_1 \sin(s_1 t + H_1),$$

$$\omega_2 = 2gM\cos\{(n+g)t-\beta\} - 3Nn^2\frac{C-A}{C}\cos(st+H) - 4N_1 n^2\frac{C-A}{C}\cos(s_1 t + H_1).$$

Sieht man von allen Schwingungen mit Ausnahme der erzwungenen ab, so hat man

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 2gM\cos\{(n+g)t-\beta\}.$$

*Diese Momentanaxe bewegt sich also in der Hauptebene, welche auf der nach der Erde zeigenden Axe senkrecht steht.* Sie schwingt um die Figurenaxe $GC$ mit einer Periode, die etwa einen Monat dauert. Der Ausschlag der Schwingung ist jedoch sehr klein, da der Maximalwerth von $\omega_2/n$ etwa 45″ beträgt.

§ 566. Beisp. Wenn man denselben Grad der Annäherung, wie bisher, beibehält, aus der dritten Gleichung unter (II) in § 560 abzuleiten, dass die Rotation des Mondes, wie sie in § 552 gefunden wurde, von der Schiefe der Ekliptik gegen den Mondäquator nicht beeinflusst wird.

§ 567. *Die Wirkung der Bewegung der Ekliptik.* Die dynamischen Gleichungen (II) in § 560 sind auf Axen bezogen, die im Körper festliegen und bleiben daher unverändert, wenn man den Pol $Z$ sich bewegen lässt. In dem angezogenen Paragraphen haben wir in diese Gleichungen $\sin l - p$ für $\nu$ und $k\sin\{(n+g)t-\beta\}$ für $\sin l$ oder $\operatorname{tg} l$ substituirt. Um dies correct zu machen, braucht man nur $p$, $q$, $r$ als die Richtungscosinusse der augenblicklichen Lage von $GZ$ zu betrachten. Wir müssen daher auf die rechte Seite der geometrischen Gleichungen (I) die Componenten der Geschwindigkeit von $Z$ im Raum parallel den Axen $GA$, $GB$,

$GC$ setzen (siehe § 18). Bezeichnet man diese Zusätze mit $\alpha$ und $\beta$, so ändern sich, wie man sieht, die Gleichungen (III) nur um so kleine Glieder, wie $A\,d\beta/dt$ und $(B-C)\,n\alpha$.

Es möge $GZ$ auf im Raum festliegende Axen $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ bezogen werden und jede der Euler'schen Coordinaten von $GZ$, nämlich $\theta_1$, $\psi_1$ durch eine Reihe von der Form $\Sigma H \sin(ht+\varepsilon)$ ausgedrückt werden, worin die Werthe der Constanten in den verschiedenen Gliedern sich aus der Theorie der Planeten ergeben. Die Componenten der Winkelgeschwindigkeit von $GZ$ im Raum in der Richtung und senkrecht zur Ebene $Z_1GZ$ lassen sich daher durch zwei Reihen von der Form $\Sigma Hh\cos(ht+\varepsilon)$ darstellen. Um diese Componenten parallel zu den Axen $GA$, $GB$ zu zerlegen, multipliciren wir sie mit den Cosinussen der Winkel, die ihre Richtung mit diesen Axen macht. Da die Axen $GA$ und $GB$ sich um $GC$ mit der Winkelgeschwindigkeit $n$ drehen, so erhalten diese Cosinusse die Form $\cos(nt+\gamma)$. Man sieht daraus, dass sich jede der Grössen $\alpha$ und $\beta$ durch eine Reihe von der Form $Kh\sin\{(n\pm h)t-l\}$ darstellen lässt.

In Folge der äusserst geringen Grösse aller Werthe von $H$ und $h$ kann man Glieder, wie diese, als unmerkbar ansehen, wenn sie nicht nach der Auflösung der Differentialgleichungen zu grösserem Betrage heranwachsen. Aus § 560 erkennt man, dass die Auflösung nicht wiederholt zu werden braucht, da der durch $t$ ausgedrückte Werth von $\sin l$ dieselbe Form, wie das allgemeine Glied der Reihe für $\alpha$ oder $\beta$ hat. Setzt man $Knh$ für $-3n^2k$ und $h$ für $g$, so geben die früher gefundenen Ausdrücke für $P$ und $Q$ die Wirkung des Gliedes an, welches zu der zweiten Gleichung unter (III) addirt wurde. Daher sind die Amplituden von $p$ und $q$, welche den allgemeinen Gliedern von $\alpha$ und $\beta$ entsprechen, von derselben Ordnung wie $P$, wenn

$$P=\frac{Kh(C-B)}{3n(C-A)-2Bh}$$

ist.

Die sämmtlichen Werthe von $h$ sind so klein, dass das Verhältniss von $h/n$ zu $(C-A)/C$ unmerkbar, die Ordnung von $P$ also dieselbe ist, wie die von $\frac{1}{3}Kh/n$. Die allgemeine Wirkung der Zusatzglieder $\alpha$ und $\beta$ besteht daher darin, dass sie periodische Glieder von der Ordnung $Kh$ in die Ausdrücke für $p$ und $q$ einführen.

Wir schliessen daraus, *dass die relative Bewegung des Mondäquators gegen die wahre Ekliptik von der Bewegung dieser Ekliptik unabhängig ist, dass also die mittlere Neigung des Mondäquators gegen die wahre Ekliptik trotz der Verrückungen der letzteren immer die nämliche bleibt.* Dieses Theorem ist von Laplace, *Mécanique Céleste,* Bd. 2, S. 420.

§ 568. *Eine zweite Annäherung. Poisson's Term von langer Periode.* Nachdem wir eine erste Annäherung an die Werthe von $p$ und $q$ in § 560 erhalten haben, können wir nun zu einer zweiten Annäherung übergehen, indem wir die so gefundenen Werthe in die Glieder einsetzen, welche bei der ersten Annäherung vernachlässigt wurden. Da die Glieder der ersten Annäherung selbst sehr klein sind, so ist zu erwarten, dass die der zweiten nur dann merkbar werden, wenn sie bei der Auflösung, wie in § 338 erklärt wurde, sich vergrössern. Aus diesem Paragraphen ist ersichtlich, dass diejenigen Glieder anwachsen, deren Perioden nahezu die nämlichen, wie die der Complementärfunctionen sind. Nach § 561 werden mithin solche Glieder der zweiten Ordnung anwachsen, deren Perioden sehr lang oder nahezu der des Mondes um die Erde gleich sind. Wir wollen uns nach solchen Termen umsehen und falls wir welche entdecken, bestimmen, ob sie so gross werden, dass sie sich bemerklich machen.

Der einzige Term, der auf diese Art zu grösserer Bedeutung heranwächst und eine lange Periode hat, wurde von Poisson entdeckt, *Connaissance des Tems*

für 1821, veröffentlicht 1819. Die Phase dieses Terms ist der Unterschied zwischen den Längen der Apside der Mondbahn und ihres Knotens auf der Ekliptik. Die erstere schreitet langsam mit der Geschwindigkeit von 3° jeden Monat voran, während die letztere mit der monatlichen Geschwindigkeit von $1\frac{1}{2}$° zurückgeht. Die Periode, in welcher sie sich um 360° von einander entfernen, ist also sehr lang und beträgt etwa 80 Monate oder sechs Jahre. Bezeichnet $h$ die Geschwindigkeit, mit welcher die Apside voranschreitet, so ist die Länge der sich bewegenden Apside $\alpha_1 = ht + \alpha$. Die Länge des beweglichen Knotens ist $\beta_1 = -gt + \beta$. Setzt man der Kürze wegen

$$E = (g + h)t + \alpha - \beta,$$

so ist $E$ die Phase des Poisson'schen Gliedes und $g + h = \frac{1}{80}n$.

§ 569. Um den Coefficienten des Poisson'schen Gliedes untersuchen zu können, müssen wir auf die Gleichungen (II) in § 560 zurückgreifen; wir müssen die Glieder $\mu\nu$ und $\nu\lambda$ prüfen, um zu entdecken, aus welchen Combinationen Glieder von der Form $\sin E$ oder $\cos E$ hervorgehen können.

Beginnen wir mit dem Term $\mu\nu$. Da $\mu = \cos EB$ und positiv ist, wenn $E$ sich $A$ gegenüber befindet, so ist offenbar $-\mu$ dieselbe Grösse, wie $\varphi$ in § 552. Nimmt man die elliptische Ungleichheit zu Hülfe, so wird

$$\mu = \frac{2e}{1 - 3(B - A)/C}\sin(nt - \alpha_1).$$

Ferner ist

$$\nu = \sin l - p = (k + M)\sin\{(n + g)t - \beta\}.$$

Multiplicirt man und vernachlässigt alle Glieder in dem Product, die keine lange Periode haben, so wird

$$\mu\nu = e(k + M)\cos E.$$

Dabei haben wir auch das kleine Glied $3(B - A)/C = 0{,}00167$ in dem Nenner weggelassen, da es das Resultat nur um etwa ein Sechshundertstel ändert.

Wir untersuchen dann weiter den Term $\nu\lambda$ in der zweiten der Gleichungen (II). Wenn $\theta$ die Länge des Mondes angibt, so ist, wie in § 560,

$$\sin l = k\sin(\theta + gt - \beta).$$

Nach der Theorie der elliptischen Bewegungen ist aber $\theta = nt + 2e\sin(nt - \alpha_1)$. Substituirt man und behält nur das Glied der zweiten Ordnung bei, dessen Phase $E$ ist, so wird

$$\sin l = k\sin\{(n + g)t - \beta\} - ke\sin E.$$

In der Theorie des Mondes[1]) findet man ein Zusatzglied in dem Ausdruck für $\sin l$, mit dessen Einschluss

1) Die Differentialgleichung zur Bestimmung der Breite ist nach Brown (vgl. dessen *Lunar theory*, Cambridge, 1896, die wir in dieser Anmerkung gebrauchen) so zu geben:

Man nehme die zweite der Gleichungen 11, § 16 der *L. th.* Die gewünschte Form von $F \sim R$ findet sich in § 109 und lautet

$$F = -\frac{3}{4}\frac{m'r}{r'^3}s^2.$$

Substituirt man diesen Werth und setzt $r = \frac{1}{u}$, $r' = \frac{1}{u'}$, $v = \theta$, so lautet die Differentialgleichung zur Bestimmung der Breite:

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = -\frac{3}{2}\frac{m'u'^3}{h^2u^4}s + \cdots$$
$$= -\frac{3}{2}m^2k\{1 - 4e\cos(c\theta - \alpha)\}\sin(g\theta - \gamma) + \cdots$$
$$= -\frac{3}{2}m^2k\{1 - 4e\cos(\theta - \alpha_1)\}\sin(\theta - \gamma_1) + \cdots,$$

worin $\alpha_1$ und $\gamma_1$ die Längen der beweglichen Apside und des Knotens sind. Com-

$$\sin l = k \sin\{(n+g)t-\beta\} - ke(1-3m^2)\sin E$$

wird, worin $m$ das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeit der Sonne zu der des Mondes um die Erde bedeutet und etwa $\frac{1}{13}$ ist. Dieses Zusatzglied ist jedoch ein sehr kleiner Bruch der beibehaltenen Glieder und von nur geringer Bedeutung. Wie in § 560 haben wir $\sin l = p\lambda + q\mu + r\nu$. Es ist nun

$$q = M\cos\{(n+g)t-\beta\} \quad \text{und} \quad \mu = 2e\sin(nt-\alpha_1);$$

ferner $\lambda = 1$ und $r = 1$. Substituirt man daher und behält nur den Term von der zweiten Ordnung bei, in welchem $E$ die Phase ist, so findet man

$$\sin l = p + \nu + Me\sin E$$

und daraus durch Substitution für $\sin l$, da $\lambda = 1$ ist,

$$\nu\lambda = (k+M)[\sin\{(n+g)t-\beta\} - e\sin E] + 3m^2ke\sin E.$$

Aus § 519 ergibt sich ferner, dass das Moment der Kräfte um die $y$-Axe in dem Nenner den Factor $R^3$ enthält. Wir müssen daher das Glied $-3n^2(C-A)\nu\lambda$ auf der rechten Seite der Gleichung (II) in § 560 mit $1+3e\cos(\theta-\alpha_1)$ multipliciren. Führen wir dies aus und behalten nur solche Glieder zweiter Ordnung bei, in welchen die Phase $E$ ist, so erhalten wir

$$(k+M)\left[\sin(nt+gt-\beta) - e\sin E + \frac{3e}{2}\sin E\right] + 3m^2ke\sin E.$$

Die rechte Seite der zweiten der Gleichungen (II) wird auf diese Art

$$-\frac{3}{2}n^2(C-A)[2(k+M)\sin(nt+gt-\beta) + (k+M+6m^2k)e\sin E].$$

Obgleich die Periode des Terms, den wir suchen, sechs volle Jahre beträgt, so dauert doch die der langen freien Schwingung über 200 Jahre, siehe § 561. Obschon also $d\omega_1/dt$ und $d\omega_2/dt$ den kleinen Factor $dE/dt$ enthalten, so ist dieser letztere doch etwa 35 mal so gross, als die kleinen Coefficienten $n(C-B)/A$ oder $n(C-A)/B$, welche in den zweiten Gliedern auf der linken Seite der Gleichungen (II) auftreten. Vernachlässigen wir diese Glieder, so verlieren wir nur etwa den 35sten Theil einer sehr kleinen Ungleichheit, während unser Resultat bedeutend einfacher wird. Wir lassen also diese beiden Terme weg; die Gleichungen (III) in § 560 nehmen dann die Gestalt an

$$\frac{d\omega_1}{dt} = 3n^2\frac{C-B}{A}(k+M)e\cos E,$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = -3n^2\frac{C-A}{B}\left\{(k+M)\sin(nt+gt-\beta) + \frac{1}{2}(k+M+6m^2k)e\sin E\right\}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung kann man zu dem schon bei der ersten Annäherung berücksichtigten Hauptglied addiren. Für den Augenblick wollen wir es weglassen, da es uns nur um das Glied zu thun ist, dessen Phase $E$ ist.

Durch Integration erhält man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} np + \frac{dq}{dt} &= \omega_1 = 3n^2\frac{C-B}{A}\frac{k+M}{g+h}e\sin E \\ nq - \frac{dp}{dt} &= \omega_2 = \frac{3n^2}{2}\frac{C-A}{B}\frac{k+M+6m^2k}{g+h}e\cos E \end{aligned}\right\}.$$

---

binirt man sie und behält nur den Term mit der Phase $E$ bei, so ergibt sich, wie oben

$$= +\frac{3}{2}m^2k\cdot 2e\sin E.$$

Integrirt man die Differentialgleichung, wie sonst geschieht, so wird

$$s = 3m^2ke\sin E.$$

Es hat keine Schwierigkeit, sie auf dem gewöhnlichen Wege aufzulösen. Offenbar enthalten aber die Terme $dp/dt$ und $dq/dt$ auf der linken Seite den kleinen Factor $g+h$ und sind daher nur etwa $\frac{1}{80}$tel von $np$ und $nq$. Lässt man sie weg, so wird

$$p = 3n\frac{C-B}{A}\frac{k+M}{g+h}e\sin E, \quad q = \frac{3n}{2}\frac{C-B}{B}\frac{k+M+6m^2k}{g+h}e\cos E.$$

§ 570. Stellt man die Poisson'schen Terme durch $\omega_1 = Rn\sin E$ und $\omega_2 = Sn\cos E$ dar und schliesst sie in die erste Annäherung ein, so ist nach § 565

$$\omega_1 = Rn\sin E, \quad \omega_2 = Sn\cos E + 2gM\cos D,$$

worin $D = (n+g)t - \beta$ ist, $D$ also den mittleren sphärischen Abstand des Mondes von dem aufsteigenden Knoten angibt. Wir haben die Complementärfunctionen weggelassen, da sie fast unmerklich sind. Substituirt man diese Werthe von $\omega_1$ und $\omega_2$ in die Euler'schen geometrischen Gleichungen und setzt $\varphi = D - \frac{1}{2}\pi$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= -(gM/2n)\cos 2D - R\sin D\sin E - S\cos D\cos E \\ (\psi - \psi_0)\sin\theta_0 &= -(gM/2n)\sin 2D + R\cos D\sin E - S\sin D\cos E \end{aligned}\right\}.$$

§ 571. Die theoretische Untersuchung des Terms mit der langen Periode gibt Poisson in der *Connaissance des Tems* für 1821 und leitet die Zahlenwerthe in dem Band für das folgende Jahr aus den Nicollet'schen Angaben ab. Diese Coefficienten hat C. Simon in dem dritten Bande der *Annales de l'école normale,* 1866 berichtigt. Die nach den Königsberger Beobachtungen berechneten Coefficienten weichen von denen Poisson's bedeutend ab. Man findet sie in Tisserand's *Mécanique Céleste,* 1891. Siehe Brünnow, *Sphärische Astronomie.* Da die Verhältnisse zwischen den Trägheitsmomenten $A$, $B$, $C$ noch nicht genau bestimmt sind, so würde es keinen Zweck haben, auf diese Differenzen näher einzugehen. Nur um die Ordnung der verschiedenen Terme zu zeigen, setzen wir das Simon'sche Resultat hierher

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_0 - (10'',7)\cos 2D - (10'',5)\sin D\cos E - (94'',15)\cos D\cos E \\ \psi &= \psi_0 - (414'',7)\sin 2D + (405'',5)\operatorname{cotg} D\sin E - (3649'',3)\sin D\cos E \end{aligned}\right\}.$$

Diese Gleichungen geben die Nutationen der Polaraxe des Mondes. Ihre Präcession ist in dem Glied $\psi_0$ enthalten und wurde in § 568 bestimmt. Die thatsächliche Libration um die Polaraxe fanden wir in § 552. Die sichtbare Schwingung eines Flecks ist die Resultante der drei Bewegungen.

§ 572. Beisp. 1. Die Bewegung des Mondes sei durch die Gleichungen

$$p = -M\sin D + R\sin E, \quad q = -M\cos D + S\cos E$$

gegeben, siehe §§ 562 und 569. Es möge $l$ und $\lambda$ die Mondlänge und Breite eines Fleckes in Bezug auf den ersten Meridian und Aequator des Mondes sein und $L$, $\Lambda$ die Länge und Breite desselben Fleckes in Bezug auf die Ekliptik und den Frühlingstagundnachtgleichenpunkt. Man beweise, dass, wenn $\lambda$ klein ist,

$$L = \theta_1 + \pi + l - M\operatorname{tg}\lambda\cos(D+l) - R\operatorname{tg}\lambda\sin l\sin E + S\operatorname{tg}\lambda\cos l\cos E,$$

$$\Lambda = \lambda + M\sin(D+l) - R\cos l\sin E - S\sin l\cos E$$

ist, worin $\theta_1$ die mittlere Länge des Mondes, von der Erde gesehen, bezeichnet.

Poisson bemerkt, dass im Fall des Fleckes Manilius, für welchen

$$l = 8^\circ 46', \ \lambda = 14^\circ 26'$$

ist, die von dem Winkel $E$ abhängigen Ungleichheiten sehr klein und wegzulassen

sind. Dies gilt jedoch nur für diesen Fleck und würde für Flecken, die weiter vom Aequator und dem Centrum der sichtbaren Mondscheibe entfernt sind, nicht richtig sein.

Beisp. 2. Wenn der Mond sich so bewegt, dass er immer dieselbe Seite der Erde zuwendet und wenn die Momentanaxe nahezu in dem Körper festliegt und auf der nach der Erde zu gerichteten Axe nahezu senkrecht steht, zu beweisen, dass die beiden Axen Hauptaxen sind.

Dies folgt aus den Gleichungen (II), § 560.

§ 578. **Eine Schwierigkeit bei der Bestimmung der Gestalt des Mondes.** Aus den Beobachtungen von Bouvard und Nicollet über die wahre Libration des Mondes in der Länge geht hervor, dass $(B-A)/C = 0{,}000564$ ist (§ 555) und Laplace fand aus Mayer's Beobachtungen über die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik $(C-A)/C = 0{,}000599$ (§ 564). Es wird mithin $(C-B)/C = 0{,}000035$. Diese Werthe scheinen sehr klein zu sein, sind aber in der That viel grösser, als zu erwarten ist, wenn die Oberfläche des Mondes die ihr in der Theorie gegebene Gleichgewichtsform hat. Nimmt man an, der Mond sei homogen und werde von der Erde angezogen, so lässt sich, wie Laplace es gethan hat, aus den Sätzen der Hydrostatik ableiten, dass

$$(B-A)/C = 0{,}0000008618\,\lambda \quad \text{und} \quad (C-A)/C = 0{,}0000004824\,\lambda$$

ist, worin $\lambda$ das Verhältniss der Masse der Erde zu der des Mondes bedeutet. Nicollet bemerkt, dass diese Werthe, auch wenn man $\lambda = 1000$ anstatt 80 setzt, nicht so gross werden können, wie die, welche er aus seinen Beobachtungen am Manilius ableitete. Laplace gibt an, die Hydrostatik würde bei der Annahme, der Mond sei nicht homogen und seine Dichtigkeit nehme von der Oberfläche nach dem Mittelpunkt zu, Werthe für $(B-A)/C$, etc. liefern, die sogar noch kleiner als die für einen homogenen Mond wären. Er schliesst daraus, *dass der Mond nicht die Gleichgewichtsgestalt hat, die er haben würde, wenn er ursprünglich flüssig gewesen wäre.* Laplace ist der Ansicht, dass die hohen Berge und andere Ungleichheiten auf dem Mond eine sehr merkliche Wirkung auf die Trägheitsmomente haben und dass diese Wirkung um so grösser sei, weil die Excentricität der Mondoberfläche klein und seine Masse unbedeutend ist. Poisson meint, die Schwierigkeit liesse sich theilweise dadurch erklären, dass Nicollet die Complementärfunctionen weggelassen habe; er hält es für zweifelhaft, dass diese Functionen vollständig verschwinden können; *Connaissance des Tems* für das Jahr 1822. Die Discussion der Schlüter'schen Beobachtungen durch Franz zeigt jedoch, dass diese Functionen zu klein sind, um bestimmt werden zu können.

Wenn man erwägt, dass die von Nicollet beobachtete thatsächliche Libration von $4\frac{1}{2}'$ von der Erde aus gesehen nur unter einem Winkel von $1\frac{1}{8}''$ erscheint, so lässt sich begreifen, dass Fehlern bei seinen Beobachtungen ein grosser Theil der Schuld an diesem Widerspruch zufallen kann. Es wird dies noch wahrscheinlicher durch die Angaben von Franz gemacht, nach welchen die Beobachtungen zu Königsberg ergeben, dass die thatsäche Libration in der Länge nur etwa die Hälfte der von Nicollet gefundenen ausmacht. Auf der anderen Seite sind nach diesen Beobachtungen, Tisserand zufolge,

$$(B-A)/C = 0{,}000315, \quad (C-A)/C = 0{,}000614, \quad (C-B)/C = 0{,}000299$$

und tragen also zur Erklärung des Widerspruchs zwischen der hydrostatischen Theorie über die Gestalt des Mondes und den an seiner Oberfläche angestellten Beobachtungen nicht bei.

## Kapitel XIII.

# Die Bewegung eines Fadens oder einer Kette.

## Die Bewegungsgleichungen.

§ 574. **Die Coordinatengleichungen.** *Die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines unausdehnbaren Fadens zu bestimmen, an dem beliebige Kräfte angreifen*[1]).

Es seien $Ox$, $Oy$, $Oz$ beliebige im Raum festliegende Axen, $Xmds$, $Ymds$, $Zmds$ die gegebenen Kräfte, die an irgend einem Element $ds$ des Fadens angreifen, dessen Masse $mds$ ist. Ferner seien $u$, $v$, $w$ die Componenten der Geschwindigkeit dieses Elementes parallel zu den Axen. Dann ist nach dem D'Alembert'schen Princip das Element $ds$ des Fadens unter der Wirkung der Kräfte

$$mds\left(X-\frac{du}{dt}\right),\quad mds\left(Y-\frac{dv}{dt}\right),\quad mds\left(Z-\frac{dw}{dt}\right)\quad . \quad . \quad (1)$$

und der Spannungen an seinen beiden Enden im Gleichgewicht.

Ist $T$ die Spannung an dem Punkt $(x, y, z)$, so sind $Tdx/ds$, $Tdy/ds$, $Tdz/ds$ ihre Componenten parallel den Axen. Die Componenten der Spannung an dem anderen Ende des Elementes sind $T\frac{dx}{ds}+\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)ds$ und zwei ähnliche Grössen, in denen $y$ und $z$ an der Stelle von $x$ steht.

---

1) Die Coordinatengleichungen in § 574 stimmen mit denen überein, die Poisson im *Journal de l'École Polytechnique,* 1820 gegeben und später in seinem *Traité de Mécanique* wiederholt hat. Die geometrische Gleichung fehlt dort und ist durch das Hooke'sche Gesetz ersetzt. Er leitet daraus die Differentialgleichungen der Bewegung eines gespannten Fadens ab, die wir in § 612 geben. Die Beweise der Tangential- und Normalgleichungen (1) bis (4) für einen Raum von zwei Dimensionen in § 577 sind nahezu dieselben, wie die, welche sich in Bd. 4 des *Quarterly Journal* befinden. Obgleich dieser Band des *Quarterly Journals* später erschienen ist, als die erste Ausgabe unseres Buches, die 1860 herauskam, so muss die Abhandlung selbst doch etwa zu derselben Zeit geschrieben sein und ist daher anzunehmen, dass die Lösungen selbständig erhalten wurden. Die Gleichungen (5) und (6) in § 580 sind, so viel uns bekannt ist, zuerst in unserem Buche veröffentlicht worden. Ihre Anwendung auf Anfangsbewegungen wird später gegeben. Die beiden Gleichungen (1) und (2) für Momentankräfte in § 583 scheinen zuerst in den *College examination papers* vorzukommen. Wie wir glauben, rührt die erste von dem verstorbenen Dr. Todhunter her.

Die Bewegungsgleichungen lauten mithin

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial x}{\partial s}\right) + mX \\ m\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial y}{\partial s}\right) + mY \\ m\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial z}{\partial s}\right) + mZ \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

In diesen Gleichungen sind $s$ und $t$ unabhängige Variabele. Für dasselbe Element des Fadens bleibt $s$ immer constant und seine Bahn wird durch Variation von $t$ bestimmt. Die Curve dagegen, welche der Faden zu einer festgesetzten Zeit bildet, wird durch Variation von $s$ bei constantem $t$ ermittelt. Dabei wird $s$ von einem beliebigen in dem Faden festliegenden Punkt aus bis zu dem betrachteten Element gemessen.

*Die geometrischen Gleichungen zu finden.* Man hat

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

und durch Differentiation nach $t$

$$\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Die Gleichungen (2) und (4) reichen hin, um $x, y, z$ und $T$ als Functionen von $s$ und $t$ auszudrücken.

§ 575. Man kann den Bewegungsgleichungen eine andere Form geben. Es seien $\varphi, \psi, \chi$ die Winkel, welche die Tangente in $x, y, z$ mit den Coordinatenaxen macht. Die Gleichungen (2) werden dann

$$m\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}(T\cos\varphi) + mX \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

wobei zwei ähnliche Gleichungen für $v$ und $w$ bestehen.

Um die geometrischen Gleichungen zu erhalten, differenzire man $\cos\varphi = \partial x/\partial s$ nach $t$; es wird

$$-\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s} \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Ebenso erhält man durch Differentiation von $\cos\psi = \partial y/\partial s$ und $\cos\chi = \partial z/\partial s$ die entsprechenden Ausdrücke für $\psi$ und $\chi$. Diese sechs Gleichungen in Verbindung mit

$$\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

ergeben also sieben Gleichungen zur Bestimmung von $u, v, w, \varphi, \psi, \chi$ und $T$.

Findet die Bewegung in der Ebene statt, so reduciren sie sich auf die vier folgenden

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}(T\cos\varphi) + mX \\ m\frac{\partial v}{dt} &= \frac{\partial}{\partial s}(T\sin\varphi) + mY \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8),$$

$$-\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s} \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

Die willkürlichen Constanten und Functionen, die in den Auflösungen dieser Gleichungen vorkommen, sind mittelst der speciellen Umstände eines jeden Problems zu bestimmen.

§ 576. **Elastische Fäden.** Es sei $\sigma$ die unausgedehnte Länge des Bogens $s$ und $m d\sigma$ die Masse eines Elementes $d\sigma$ von unausgedehnter Länge oder $ds$ von ausgedehnter Länge. Verfährt man nun gerade so, wie zuvor, so erhält man die Bewegungsgleichungen

$$m\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial x}{\partial s}\right) + mX \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(I)}$$

und zwei ähnliche für $v$ und $w$. Die geometrischen Gleichungen findet man durch Differentiation nach $t$ von

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma}\right)^2,$$

wobei die unabhängigen Variabelen jetzt $\sigma$ und $t$ sind. Es ergibt sich

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma}\frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial y}{\partial \sigma}\frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{\partial z}{\partial \sigma}\frac{\partial w}{\partial \sigma} = \frac{\partial s}{\partial \sigma}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial s}{\partial \sigma}\right).$$

Wenn aber $\lambda$ der Elasticitätsmodul des Fadens ist, so hat man

$$\frac{\partial s}{\partial \sigma} = 1 + \frac{T}{\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(II)}$$

und durch Substitution dieses Ausdrucks wird

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma}\frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial y}{\partial \sigma}\frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{\partial z}{\partial \sigma}\frac{\partial w}{\partial \sigma} = \left(1 + \frac{T}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \ldots \ldots \quad \text{(III)}.$$

Die beiden Gleichungen (II) und (III) in Verbindung mit den drei Gleichungen (I) reichen hin, um $u$, $v$, $w$, $s$ und $T$ als Functionen von $\sigma$ und $t$ auszudrücken.

Will man die Bewegungsgleichungen in der Form (5) oder (8) benutzen, so so erhält man die dynamischen Gleichungen

$$m\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \sigma}(T\cos\varphi) + mX$$

und ähnliche für $v$ und $w$.

Die den Gleichungen (6) oder (9) entsprechenden geometrischen ergeben sich so. Es ist

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \cos\varphi\,\frac{\partial s}{\partial \sigma} = \cos\varphi\left(1 + \frac{T}{\lambda}\right)$$

und durch Differentiation

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\sin\varphi\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}(T\cos\varphi)$$

mit ähnlichen Ausdrücken für $v$ und $w$.

§ 577. **Zerlegung der Geschwindigkeit in der Richtung der Tangente und Normalen.** Wenn die Bewegung des Fadens in einer Ebene vor sich geht, so empfiehlt es sich oft, die Geschwindigkeit in der Richtung der Tangente und der Normalen an die Curve zu zerlegen.

$u$ und $v$ seien die Componenten der Geschwindigkeit des Elementes $ds$ in den Richtungen der eben genannten Geraden für dieses Element; $\varphi$ der Winkel, den die Tangente für dieses Element mit der

$x$-Axe bildet; $Pmds$, $Qmds$ die Componenten der gegebenen an dem Element $ds$ angreifenden Kräfte in der Richtung der Tangente bez. der Normalen. Nach Bd. 1, Kap. IV, oder auch, wenn man in § 5 dieses Bandes $\theta_3 = \partial\varphi/\partial t$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ setzt, erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v\frac{\partial \varphi}{\partial t} = P + \frac{\partial T}{m\partial s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial \varphi}{\partial t} = Q + \frac{T}{m\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Die geometrischen Gleichungen findet man, wie folgt. Ist $u_x$ die Componente der Geschwindigkeit parallel zur $Ox$, so hat man

$$u_x = u\cos\varphi - v\sin\varphi$$

und durch Differentiation nach $s$ (§ 575)

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\sin\varphi = \left(\frac{\partial u}{\partial s} - v\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\cos\varphi - \left(\frac{\partial v}{\partial s} + u\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\sin\varphi.$$

Da man die Lage der $x$-Axe nach Belieben wählen kann, so wollen wir sie so annehmen, dass die Tangente für das Element während seiner Bewegung in dem betrachteten Moment mit ihr parallel läuft. Es ist dann $\varphi = 0$ und

$$0 = \frac{\partial u}{\partial s} - v\frac{\partial\varphi}{\partial s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Ebenso findet man, wenn man die $x$-Axe parallel zur Normalen annimmt,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s} + u\frac{\partial\varphi}{\partial s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Diese vier Gleichungen reichen hin, um $u$, $v$, $\varphi$ und $T$ durch $s$ und $t$ auszudrücken.

Wenn der Faden ausdehnbar ist, so werden die dynamischen Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v\frac{\partial\varphi}{\partial t} = P + \frac{\partial T}{m\partial\sigma}, \quad \frac{\partial v}{dt} + u\frac{\partial\varphi}{\partial t} = Q + \frac{T}{m\varrho}\frac{\partial s}{\partial\sigma}.$$

Die geometrischen Gleichungen erhält man durch Differentiation von

$$u_x = u\cos\varphi - v\sin\varphi$$

nach $\sigma$. Nach § 576 wird

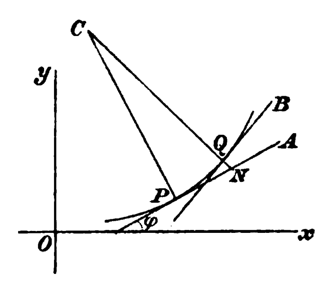
$$-\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}(T\cos\varphi) = \left(\frac{\partial u}{\partial\sigma} - \frac{v}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial\sigma}\right)\cos\varphi - \left(\frac{\partial v}{\partial\sigma} + \frac{u}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial\sigma}\right)\sin\varphi$$

und wenn man, wie zuvor, reducirt

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial\sigma} - \frac{v}{\varrho}\left(1 + \frac{T}{\lambda}\right), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(1 + \frac{T}{\lambda}\right) = \frac{\partial v}{\partial\sigma} + \frac{u}{\varrho}\left(1 + \frac{T}{\varrho}\right).$$

§ 578. Zu den Gleichungen (3) und (4) kommt man auch auf die folgende Art. Da die Bewegung des Punktes $P$ des Fadens durch die Geschwindigkeiten $u$ und $v$ in der Richtung der Tangente $PA$ und der Normalen $PC$ im Punkt $P$

dargestellt wird, so erhält man die Bewegung des folgenden Punktes $Q$ durch die Geschwindigkeiten $u + du$ und $v + dv$ in der Richtung der Tangente $QB$ und der Normalen $QC$ im Punkt $Q$. Es sei arc $PQ = ds$ und $QN$ ein Loth auf $PA$. Da der Faden sich nicht ausdehnen lässt, so muss die resultirende Geschwindigkeit von $Q$ in der Richtung der Tangente im Punkt $P$ schliesslich dieselbe sein, wie die Componente der Geschwindigkeit von $P$ in derselben Richtung. Es ist daher




$$(u + du) \cos d\varphi - (v + dv) \sin d\varphi = u,$$

oder beim Uebergang zur Grenze

$$du - v d\varphi = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{\varrho} = 0.$$

Ferner ist $\partial\varphi/\partial t$ die Winkelgeschwindigkeit von $PQ$ um $P$. Der Unterschied der Geschwindigkeiten von $P$ und $Q$ in einer Richtung, welche senkrecht auf $PQ$ steht, muss daher $PQ \cdot \partial\varphi/\partial t$ sein, mithin ist

$$(u + \partial u) \sin \partial\varphi + (v + \partial v) \cos \partial\varphi - v = \partial s \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

oder in der Grenze

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{\varrho}.$$

§ 579. **Beispiele.** Beisp. 1. Wenn $\frac{1}{2} V$ die lebendige Kraft eines Bogens $AB$ einer Kette ist; $T_1$, $T_2$ die Spannungen an den Enden des Bogens; $u_1'$, $u_2'$ die Geschwindigkeiten der Enden in der Richtung der Tangenten in den Endpunkten; $u$, $v$, $w$ die den Cartesischen Coordinaten parallelen Componenten der Geschwindigkeit in irgend einem Punkt, zu beweisen, dass

$$\frac{1}{2} \partial V/\partial t = T_2 u_2' - T_1 u_1' + \int (Xu + Yv + Zw)\, m ds$$

ist, wobei sich die Integration über den ganzen Bogen erstreckt.

Beisp. 2. Man stelle die auf Polarcoordinaten bezogenen Bewegungsgleichungen eines Fadens für den Raum von zwei Dimensionen auf. Wenn $u$, $v$ die Componenten der Geschwindigkeit des Elementes $ds$ in der Richtung und senkrecht zum Radiusvector sind und $Pmds$, $Qmds$ die Componenten der Kräfte in denselben Richtungen, so findet man

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{v^2}{r} = \frac{\partial T}{\partial s} \cos \varphi - \frac{T}{\varrho} \sin \varphi + P, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{uv}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (Tp) + Q,$$

$$-\sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u \sin \varphi}{r} - \frac{v \cos \varphi}{r},$$

worin $\varphi$ den Winkel, den der Radiusvector mit der Tangente macht, und $p$ das auf die Tangente gefällte Loth bezeichnet.

Beisp. 3. Ein elastischer Ring ohne Gewicht, dessen Länge im nicht gespannten Zustand gegeben ist, wird um einen kreisförmigen Cylinder gespannt. Der Cylinder verschwindet plötzlich; man zeige, dass die Zeit, welche der Ring braucht, um zu seiner natürlichen Länge zusammenzuschrumpfen, $(Ma\pi/8\lambda)^{\frac{1}{2}}$ ist, worin $M$ die Masse des Fadens, $\lambda$ seinen Elasticitätsmodul und $a$ seinen Radius in natürlichem Zustand bedeutet.

Beisp. 4. Ein homogener leichter unausdehnbarer Faden wird mit seinen Enden an zwei feste Punkte geheftet und dreht sich um die Gerade, welche diese

Punkte verbindet, mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit. Die Gerade, welche die festen Punkte verbindet, sei die $x$-Axe. Man zeige, dass der Faden, wenn man annimmt, seine Gestalt sei permanent die nämliche, eine ebene Curve von der Gleichung $1+(dy/dx)^2 = b(a-y^2)^2$ bildet, worin $a$ und $b$ zwei Constanten bedeuten.

§ 580. Die vier Bewegungsgleichungen in § 577 lassen sich durch Elimination von $u$ und $v$ auf zwei reduciren. Man erhält so zwei Gleichungen von passender Form, die nur die beiden unbekannten Grössen $T$ und $\varphi$ enthalten. Eliminirt man auch $T$, so bleibt nur eine Gleichung und die Bestimmung der Bewegung des Fadens wird damit von der Auflösung nur einer Differentialgleichung abhängig gemacht. Die Elimination bietet zwar keine Schwierigkeiten dar; das Resultat ist aber nicht sehr einfach.

Differenzirt man die Gleichung (1) nach $s$ und (3) nach $t$, so erhält man

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - v\frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\partial s} = \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 T}{\partial s^2},$$

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial s} - v\frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\partial s} = 0.$$

Subtrahirt man und substituirt für $\partial v/\partial t$ und $\partial v/\partial s$ aus (2) und (4), so wird

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} - T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 + m\left(\frac{\partial P}{\partial s} - Q\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) = -m\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 \quad . \; . \quad (5).$$

Ebenso findet man durch Differentiation der Gleichung (2) nach $s$ und (4) nach $t$ und Substitution

$$\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial s}\left(T^2\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) + m\left(P\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial Q}{\partial s}\right) = m\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad . \; . \; . \quad (6).$$

Ist der Faden nicht homogen, so ist $m$ eine Function von $s$. Setzt man $m\,ds = d\sigma$, so ergibt sich auf dieselbe Art

$$\frac{d^2 T}{\partial \sigma^2} - T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{\partial P}{\partial \sigma} - Q\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = -\frac{1}{m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(T^2\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}\right) + Q\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \frac{1}{m}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Die Gleichungen (5) und (6) sind sehr gut zu verwenden. Wenn die Kräfte $P$, $Q$, die Winkelgeschwindigkeit $\partial\varphi/\partial t$ und die Winkelbeschleunigung $\partial^2\varphi/\partial t^2$ eines jeden Elementes bekannt und durch $s$ ausgedrückt sind, so lassen sich die Spannung des Fadens und die durch die Bogenlänge und den Neigungswinkel der Tangente gegebene Gleichung der Curve, in welcher der Faden liegt, ableiten. Wenn umgekehrt die Vertheilung der Spannung, die Curve des Fadens und die Kräfte bekannt sind, so ergeben sich die Winkelgeschwindigkeit und Beschleunigung eines jeden Elementes unmittelbar.

§ 581. Man betrachte die Lage des Fadens in irgend einem Augenblick. $M$ sei ein Punkt auf dem Faden; man ziehe eine Gerade $ON$ von dem Coordinatenanfang $O$ aus parallel zu der Tangente in $M$, deren Länge der Spannung des Fadens bei $M$ proportional ist. Der Ort der Punkte $N$ für alle Lagen von $M$ stellt, ähnlich wie ein Hodograph, die augenblickliche Vertheilung der Spannung längs des Fadens dar.

Um die Sache einfacher zu gestalten, wollen wir annehmen, die gegebenen Kräfte $P$ und $Q$ seien Null. Die Gleichungen (5) und (6) zeigen, dass dann die augenblicklichen Werthe von $T$, $\varphi$, $s$, $-(\partial\varphi/\partial t)^2$, $\partial^2\varphi/\partial t^2$ bei einem Faden genau ebenso miteinander verbunden sind, wie der Radiusvector, die Länge, Zeit, die radialen und transversalen Kräfte bei einem Massenpunkt, welcher den Hodographen beschreibt.

Mittelst dieser Analogie lässt sich manchmal ein Problem über die augenblickliche Vertheilung der Spannung längs eines Fadens in ein bekannteres Problem über die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes verwandeln. Bildet der Faden eine geschlossene Curve, so ist die zugehörige Curve ebenfalls geschlossen. Wenn der Faden zwei Enden hat, so müssen sich die Endbedingungen in beiden Curven entsprechen.

§ 582. **Beispiele.** Beisp. 1. Man zeige, wie sich die im vorigen Paragraphen besprochene Analogie aus den Coordinatengleichungen der Bewegung eines Fadens in § 574 ableiten lässt und entwickle aus dieser Analogie die Gleichungen (5) und (6). Man zeige ferner, dass die Analogie auch dann besteht, wenn sich der Faden in einem Raum von drei Dimenensionen bewegt.

Beisp. 2. Man bestimme die durch die Bogenlänge und den Neigungswinkel der Tangente ausgedrückte Gleichung der Gestalt eines geschlossenen Fadens und die Vertheilung der Spannung, wenn Anfangs das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit eines jeden Elementes der Spannung dieses Elementes proportional ist und die Winkelgeschwindigkeit für die Zeit $dt$ constant bleibt. Es wird angenommen, gegebene Kräfte seien nicht vorhanden.

In diesem Fall werden die Gleichungen (5) und (6)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} - T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 = -\mu T, \quad \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial t}\left(T^2\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) = 0.$$

Würde $s$ die Zeit vorstellen, so würden dies die Gleichungen für die Bewegung eines Massenpunktes sein, an dem eine Centralkraft angreift, die wie der Abstand variirt. Der Massenpunkt müsste eine Ellipse beschreiben. Man erhält mithin

$$\frac{1}{T^2} = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\sqrt{\mu}\, s.$$

Daraus ergibt sich die Vertheilung der Spannung und die durch die Bogenlänge und den Neigungswinkel der Tangente ausgedrückte Gleichung. Wenn $l$ die Länge des Fadens bedeutet, so ist $\sqrt{\mu}\, l = 2\pi$; ist $a = b$, so wird die Curve ein Kreis.

Beisp. 3. Man zeige, dass die resultirende Beschleunigung irgend eines Punktes eines Fadens der Richtung nach durch die Tangenten in $N$ an die zugehörige Curve und der Grösse nach durch das Verhältniss eines Elementarbogens bei $N$ zu dem entsprechenden Bogen bei $M$ dargestellt wird. Man setze in den Gleichungen des § 574, $X = 0$ und $Y = 0$.

§ 583. **Momentankräfte.** Sind es Momentankräfte, die wirken, so erleiden die Gleichungen einige Modificationen. Sie lassen sich sämmtlich auf die gewöhnliche Art aus den entsprechenden Gleichungen

für endliche Kräfte durch Integration nach der Zeit ableiten. Im Allgemeinen jedoch ist es einfacher, sie mit Hülfe der Grundprincipien aufzustellen.

*Auf einen Faden, der auf einem glatten horizontalen Tisch ruht, wirkt an dem einen Ende eine Stossspannung; die Stossspannung an einem beliebigen Punkt und die Anfangsbewegung zu finden.*

$T$ sei die Stossspannung an irgend einem Punkt $P$, $T$ und $dT$ die Spannung an dem folgenden Punkt $Q$; an den Enden des Elementes $PQ$ greifen dann die Spannungen $T$ und $T+dT$ an. $\varphi$ sei der Winkel, den die Tangente an den Faden in $P$ mit einer festen Linie bildet; $u, v$ die Anfangsgeschwindigkeiten des Elementes in der Richtung der Tangente bez. der Normalen an den Faden im Punkt $P$. Zerlegt man in diesen beiden Richtungen, so wird

$$\left.\begin{aligned} m u ds &= (T + dT)\cos d\varphi - T \\ m v ds &= (T + dT)\sin d\varphi \end{aligned}\right\}$$

und beim Uebergang zur Grenze $u = \frac{1}{m}\frac{\partial T}{\partial s}$, $v = \frac{1}{m}\frac{T}{\varrho}$.

Nach § 577 ist aber $\partial u/\partial s = v/\varrho$. Als Gleichung für $T$ hat man also

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} - \frac{T}{\varrho^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Ist die Kette nicht homogen, so findet man leicht auf dieselbe Art

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{m}\frac{\partial T}{\partial s}\right) = \frac{1}{m}\frac{T}{\varrho^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wenn $\omega$ die Anfangswinkelgeschwindigkeit des Elementes $ds$ bedeutet, so ist nach § 577

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{\varrho} = \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T^2}{m\varrho}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

§ 584. Wenn sich der Faden, grade bevor die Stossspannung an dem einen Ende wirkt, in Bewegung befindet, so bedürfen diese Gleichungen nur einer geringen Aenderung. $(u_1, v_1)$, $(u_2, v_2)$ seien die Componenten der. Geschwindigkeit des Elementes $PQ$ grade vor und grade nach dem Stoss. Die Gleichungen des letzten Paragraphen sind dann einfach derart abzuändern, dass man

$$u = u_2 - u_1, \quad v = v_2 - v_1$$

setzt. Jede der Zerlegungen $(u_1, v_1)$, $(u_2, v_2)$ muss selbstverständlich den geometrischen Bedingungen in § 577 genügen.

§ 585. Beisp. Wenn $T_1$, $T_2$ die Stossspannungen an den Enden eines Bogens der Kette sind und in derselben Richtung wie die Kette positiv gerechnet werden, wenn ferner $u_1$, $u_2$ die Anfangsgeschwindigkeiten an den Enden in der Richtung der Tangenten in den Endpunkten sind, zu beweisen, dass die anfängliche kinetische Energie des ganzen Bogens

$$\tfrac{1}{2}(T_2 u_2 - T_1 u_1) \text{ ist.}$$

Dies ergibt sich leicht, wenn man $m(u^2+v^2)\,\partial s$ über die ganze Länge des Bogens integrirt. Es folgt aber auch sofort aus dem in Bd. 1 bewiesenen Satz, dass die durch einen Stoss verrichtete Arbeit das Product aus dem Stoss und der mittleren Componente der Geschwindigkeit des Angriffspunktes grade vor und grade nach der Wirkung des Stosses ist. Da nun der Faden von der Ruhe ausgeht, so ist die an jedem Ende verrichtete Arbeit das Product aus der Spannung und der halben anfänglichen Tangentialgeschwindigkeit.

§ 586. *Die Stossspannung und die Anfangsbewegung zu finden, wenn der Faden eine Curve doppelter Krümmung bildet.*

$u$, $v$, $w$ seien die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit eines Elementes $ds$ in der Richtung der Hauptaxen der Curve für dieses Element, wobei die Axe der $x$ die Hauptnormale, die der $y$ die Tangente und die der $z$ endlich die Binormale sei. Da die einzigen an dem Element angreifenden Kräfte die Stossspannungen an den Enden sind, so ist wie in § 583

$$u=\frac{1}{m}\frac{T}{\varrho},\quad v=\frac{1}{m}\frac{\partial T}{\partial s},\quad w=0 \quad \dots\dots\dots \quad (1).$$

Um die geometrischen Gleichungen zu erhalten, bedenke man, dass, wenn $(u, v, w)$ die Componenten der Geschwindigkeit an dem einen Ende $A$ des Elementes $ds$ in der Richtung der Hauptaxen für $A$ darstellen, die Componenten der Geschwindigkeit an dem andern Ende $B$ desselben Elementes in der Richtung der Hauptaxen für $B$, $(u+du$, etc.) sind. Daraus folgt, dass die Componenten $(\delta u, \delta v, \delta w)$ der relativen Geschwindigkeit der Enden $A$ und $B$ in der Richtung der Hauptaxen für $A$ durch § 21 gegeben sind, worin $d\varphi_1$ $d\varphi_2$, $d\varphi_3$ die Winkelverrückungen bedeuten, mittelst derer die Hauptaxen für $A$ in die Lage derjenigen für $B$ geschraubt werden. Bezeichnen $d\tau$ und $d\varepsilon$ den Torsions- und Contingenzwinkel, so ist

$$d\varphi_1=0,\quad d\varphi_2=-d\tau,\quad d\varphi_3=-d\varepsilon.$$

Sind aber $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten des Elementes $ds$ im Raum um die Hauptaxen für $A$, so ist

$$\delta u=-\omega_3\,ds,\quad \delta v=0,\quad \delta w=\omega_1\,ds.$$

Setzt man diese beiden Gruppen von Werthen für $\delta u$, $\delta v$, $\delta w$ gleich, so wird

$$\omega_1=\frac{u}{r},\quad \frac{\partial v}{\partial s}-\frac{u}{\varrho}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial s}+\frac{v}{\varrho}=-\omega_3 \quad \dots\dots \quad (2),$$

worin $r$ und $\varrho$ den Torsions- und Contingenzradius bezeichnen.

Durch Substitution aus (1) in (2) ergibt sich

$$\omega_1=\frac{T}{m\varrho r},\quad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial T}{m\partial s}\right)-\frac{T}{m\varrho^2}=0,\quad -\omega_3=\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T^2}{m\varrho}\right) \quad \dots \quad (3).$$

Die zweite dieser Gleichungen bestimmt die Anfangsspannung, wenn die Form des Fadens bekannt ist; sie ist dieselbe, wie die entsprechende Gleichung für die Ebene; die Anfangsspannung hängt daher von dem Torsionswinkel der Curve nicht ab. Die beiden anderen Gleichungen bestimmen die Anfangswinkelgeschwindigkeiten des Elementes, wobei die Winkelgeschwindigkeit um die Tangente nicht erforderlich ist, um die Anfangsbewegung zu finden.

Man kann sich, ähnlich wie in § 578 bei einem in der Ebene liegenden Faden, auch hier durch einen geometrischen Beweis von der Richtigkeit der obigen Gleichungen überzeugen.

§ 587. **Die Differentialgleichung für die Anfangsspannung.** Wenn die Form des Fadens durch die Gleichung $\varrho=F(s)$ gegeben ist, so findet man die Anfangsspannung durch Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} - \frac{T}{\varrho^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Das Integral hat bekanntlich die Gestalt

$$T = A\varphi(s) + B\psi(s) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

worin $\varphi$ und $\psi$ bestimmte Functionen von $s$ und $A$ und $B$ zwei unbestimmte Constanten sind. Die Constanten sind dann aus den bekannten Werthen der Spannung an den beiden Enden des Fadens zu bestimmen.

Hat man die Spannung an irgend einem Punkt des Fadens gefunden, so lassen sich die Geschwindigkeit und die Richtung der Bewegung eines jeden Elementes aus den Ausdrücken für die Componenten $u$ und $v$ in § 583 ableiten.

*Man erkennt also, dass die Bestimmung der Bewegung von der Integration der Differentialgleichung* (1) *abhängt.* Wir halten es deshalb für angezeigt, der Reihe nach einige Auflösungen hier folgen zu lassen, die sich nützlich erweisen werden.

In manchen Problemen erscheint auf der rechten Seite der Differentialgleichung (1) ein Zusatzglied z. B. $f(s)$. Die beiden ersten Glieder der Lösung (2) bilden die Complementärfunction; hat man sie gefunden, so lässt sich das particuläre Integral, welches die Folge von $f(s)$ ist, auf eine der verschiedenen Arten ableiten, die in der Lehre von den Differentialgleichungen angegeben werden. Am vortheilhaftesten ist es vielleicht, wenn man $T = z\varphi(s)$ oder $T = z\psi(s)$ setzt; die Differentialgleichung nimmt dann eine lineare Form an, aus der man $z$ findet. Es reicht daher hin, wenn wir im Folgenden annehmen, die rechte Seite der Differentialgleichung sei Null.

*1. Fall.* $\varrho$ sei constant, z. B. $\varrho = a$. *Der Faden hat dann die Gestalt eines Kreises.* Das Integral ist offenbar $T = Ae^{\frac{s}{a}} + Be^{-\frac{s}{a}}$.

*2. Fall.* $\varrho$ sei eine lineare Function von $s$, z. B. $\varrho = a + bs$. *Der Faden hat dann die Gestalt einer logarithmischen Spirale, deren constanter Winkel* arc cotg $b$ *ist.* Um die Gleichung aufzulösen, setzen wir $a + bs = e^x$; die Gleichung nimmt dann dieselbe Form, wie in dem letzten Paragraphen an. Die Complementärfunction reducirt sich auf

$$T = A(a + bs)^m + B(a + bs)^n,$$

worin $m$ und $n$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung $b^2 x(x - 1) = 1$ sind.

*3. Fall.* $\varrho$ sei eine quadratische Function von $s$, z. B. $\varrho = a + bs + cs^2$. Sind die Factoren reell, so lässt sich statt dessen schreiben $\varrho = c(s - \alpha)(s - \beta)$. Man nehme versuchsweise die Lösung

$$T = A(s - \alpha)^m (s - \beta)^n$$

an. Substituirt man in die Differentialgleichung und dividirt durch

$$(s - \alpha)^{m-2}(s - \beta)^{n-2},$$

so findet man

$$\left.\begin{array}{l}(m + n - 1)\{(m + n)s^2 - 2(\alpha n + \beta m)s\} \\ \quad + \alpha^2 n(n - 1) + 2\alpha\beta mn + \beta^2 m(m - 1) - c^{-2}\end{array}\right\} = 0.$$

Der Gleichung wird genügt, wenn man $m$ und $n$ so wählt, dass die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $s$ Null werden. Die beiden ersten Potenzen ergeben $m + n = 1$ und die letzte $mn(\alpha - \beta)^2 + c^{-2} = 0$. Das gesuchte Integral ist daher

$$T = A(s - \alpha)^m (s - \beta)^n + B(s - \alpha)^n (s - \beta)^m,$$

worin $m$ und $n$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x = \{(\alpha - \beta)c\}^{-2}$$

sind. Diese Auflösung rührt von Sir G. Stokes her, Bd. 8 der *Cambridge Phil. Trans.*, 1849.

Sind dagegen die Factoren der quadratischen Gleichung $\varrho = a + bs + cs^2$ imaginär, so lässt sich das Integral auf die Art ermitteln, dass man den eben gefundenen Werth von $T$ rational macht. Es empfiehlt sich jedoch, statt dessen

$$\varrho = c\{(s + \alpha)^2 + \beta^2\}$$

zu setzen und dann so zu verfahren. Setzt man $s + \alpha = \beta \operatorname{tg} \theta$, so nimmt die Differentialgleichung die Form an

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(T \cos \theta) + \left(1 - \frac{1}{\beta^2 c^2}\right) T \cos \theta = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist bekannt, es besteht aus trigonometrischen Gliedern oder Exponentialgrössen, je nachdem $\beta c$ grösser oder kleiner als die Einheit ist.

Sind die Factoren der quadratischen Gleichung $\varrho = a + bs + cs^2$ gleich, so lässt sich die Gleichung dadurch lösen, dass man $T = (s - a)z$ und $s - a = 1/x$ setzt. Sie reducirt sich dann auf $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{z}{c^2} = 0$. Man erhält daher

$$T = (s - a)\left\{A e^{\frac{1}{c(s-a)}} + B e^{-\frac{1}{c(s-a)}}\right\}.$$

Ist $c\varrho = s^2 + c^2$, *so hat der Faden die Gestalt einer Kettenlinie.* Das Integral ist dann

$$T = y(A\theta + B),$$

worin $y$ die Ordinate, von der Directix aus gemessen, und $\theta$ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente mit dem Horizont macht. Man erhält dieses Resultat, wenn man, wie eben erwähnt, $s = c \operatorname{tg} \theta$ setzt. Man kann aber auch anders verfahren. Man beachte, dass $T = y$ eine Auflösung ist; setzt man also $T = yz$, so ergibt sich eine lineare Gleichung der ersten Ordnung für $\partial z / \partial s$. Siehe die *Cambridge Senate House Problems für 1860 mit Auflösungen,* S. 65.

Eine andere Auflösung hat Besge in Bd. 9 von *Liouville's Journal,* 1844 gegeben; er führt die Gleichung auf eine früher von Euler gelöste zurück.

Wir wollen der Gleichung die Gestalt geben

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} = \frac{A T}{(a + 2bs + cs^2)^2}$$

und $\log T = \int U ds$ setzen, durch Substitution ergibt sich dann

$$\frac{\partial U}{\partial s} + U^2 = \frac{A}{(a + 2bs + cs^2)^2}.$$

Der Nenner auf der rechten Seite weist darauf hin, dass vielleicht ein Integral von der Form

$$U = \frac{V}{a + 2bs + cs^2}$$

möglich ist.

Durch Substitution in die Differentialgleichung findet man

$$\frac{\partial V}{\partial s}(a + 2bs + cs^2) + (V - b - cs)^2 = (b + cs)^2 + A.$$

Nun reducirt sich offenbar, wenn man $V - b - cs = \varkappa$ setzt und unter $\varkappa$ eine Constante versteht, die Gleichung auf

$$ac - b^2 + \varkappa^2 = A.$$

Man erhält also zwei Werthe für $\varkappa$ und damit zwei particuläre Integrale, nämlich

$$\log T = \int \frac{b + cs \pm \varkappa}{a + 2bs + cs^2} ds.$$

Eine jede dieser Integrationen lässt sich mit einer endlichen Anzahl von Gliedern ausführen. Sind die so gefundenen Werthe von $T, \varphi(s)$ und $\psi(s)$, so ist das gesuchte allgemeine Integral

$$T = M\varphi(s) + N\psi(s),$$

worin $M$ und $N$ zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

*4. Fall.* Wenn $\varrho^2$, nicht $\varrho$, eine quadratische Function von $s$ ist, z. B.

$$\varrho^2 = a + bs + cs^2,$$

so lässt sich ein Integral mit einer endlichen Anzahl von Gliedern in der Gestalt

$$T = A_0 + A_1 s + \cdots + A_n s^n$$

finden, vorausgesetzt, dass eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung $cn(n-1) = 1$ eine *positive* ganze Zahl ist. Diese quadratische Gleichung gibt die Bedingung an, unter welcher die Reihe für $T$ ein höchstes Glied hat; man substituire daher nur die höchste Potenz $A_n s^n$ der Reihe in die Differentialgleichung und lasse alle geringeren Potenzen, welche vorkommen, weg. Die Beziehung zwischen den sich folgenden Coefficienten findet man leicht durch Substitution. Diese Beziehung vereinfacht sich sehr, *wenn man vorher aus der quadratischen Gleichung für $\varrho^2$ entweder $bs$ oder $a$ entfernt.* Es geschieht dies dadurch, dass man $s = s' + m$ setzt und die Constante $m$ richtig wählt.

Ist eine Wurzel der quadratischen Gleichung $cn(n-1)=1$ eine ganze Zahl $n$, so kann man einem Integral eine der beiden Formen geben

$$T = A\varrho^2 \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^n \varrho^{2(n-1)}, \quad T = A' \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{n-2} \varrho^{2(n-1)},$$

siehe die Abhandlung des Verfassers in den *Proceedings of the Mathematical Society,* April, 1885.

*5. Fall.* Wenn $1/\varrho^2$ eine quadratische Function von $s$ ist, z. B.

$$1/\varrho^2 = a + bs + cs^2,$$

so setze man $T = z e^{\alpha s + \beta s^2}$. Durch Substitution und richtige Wahl von $\alpha$ und $\beta$ reducirt sich die Gleichung auf die Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + (2\alpha + 4\beta s)\frac{\partial z}{\partial s} + hz = 0.$$

Dieser Kunstgriff wird Liouville zugeschrieben.

Setzt man $\alpha + 2\beta s = \sigma$, so erhält man ein Integral in der Form einer endlichen Reihe, nämlich

$$z = A\left[\sigma^n + \frac{1}{2} n(n-1)\beta\sigma^{n-2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} n(n-1)(n-2)(n-3)\beta^2\sigma^{n-4} + \text{etc.}\right]$$

durch Substitution, wenn $2\beta n + h = 0$ einen Werth von $n$ liefert, der eine positive ganze Zahl ist. In der oben angeführten Abhandlung des Verfassers wird auch gezeigt, dass

$$z = \frac{A}{R}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^n R \quad \text{oder} \quad = A\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^{-n-1}\frac{1}{R}$$

ist, worin $\log R = \frac{\sigma^2}{2\beta}$ ist und wobei die eine oder die andere Form benutzt werden muss, je nachdem $n$ eine positive oder negative ganze Zahl ist.

§ 588. *Beispiele für Momentankräfte.* Beisp. 1. Wenn die Curve, welche der Faden bildet, eine solche Beschaffenheit hat, dass $\varrho^2 = \frac{s^2 - a^2}{i(i+1)}$ ist, worin $i$ irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, zu zeigen, dass ein Integral $T = \int P_i\,dx$ lautet, worin $x = s/a$ und $P_i$ eine Legendre'sche Function von $x$ von der $i^{\text{ten}}$ Ordnung ist.

Beisp. 2. Man verfolge den Lauf der Curve $\beta\varrho = (s-a)(s-b)$. Die Curve hat drei Zweige; der erste erstreckt sich von $s=a$ bis $s=b$, die Krümmung hat immer dieselbe Richtung und der Zweig endigt an jedem Ende mit einer unendlich grossen Anzahl von kleiner werdenden Windungen und ist schliesslich eine logarithmische Spirale, deren gleicher Winkel arctg $\beta/(a-b)$ ist. Der zweite Zweig geht von $s=b$ bis $\infty$; er windet sich wie eine logarithmische Spirale mit einer unendlich grossen Anzahl von Umdrehungen auf. Die sich zu- und aufwindenden Zweige haben dieselbe Richtung der Krümmung, wenn der Bogen in einem jeden Zweig von der unendlich kleinen Spitze aus gemessen wird. Der sich aufwindende Zweig geht schliesslich in's Unendliche, wie ein Zweig der Kettenlinie $\beta\varrho = s^2+\beta^2$ und die Tangente ist schliesslich parallel zu der Tangente im Punkt $s=\frac{1}{2}(a+b)$. Der dritte Zweig geht von $s=-c$ bis $-\infty$ und gleicht dem zweiten.

Beisp. 3. Ein auf einem Tisch in Ruhe liegender Faden erhält an seinem einen Ende einen Ruck und beginnt sich so zu bewegen, dass die Bewegungsrichtung eines jeden Elementes einen constanten Winkel mit der Tangente in diesem Punkt macht. Man beweise, dass die Curve, welche der ruhende Faden bildet, eine logarithmische Spirale ist.

Beisp. 4. Eine Stossspannung in der Richtung der Tangente wirkt auf das eine Ende eines gleichförmigen vollkommen biegsamen schweren Fadens, der auf einer glatten Ebene liegt. Wenn alle Massenpunkte des Fadens sich mit gleicher Geschwindigkeit zu bewegen anfangen, zu beweisen, dass der liegende Faden die Form einer Kettenlinie oder einer Geraden hat. [May Ex.]

Beisp. 5. An dem einen Ende eines unelastischen Fadens, welcher in einer kreisförmigen Röhre ruhig liegt und sie grade ausfüllt, wird in der Richtung der Tangente an diesem Ende ein momentaner Zug ausgeübt. Der Faden beginnt sich mit der kinetischen Energie $E$ zu bewegen. Wenn derselbe Faden ruhig daläge ohne eingeschlossen zu sein und ebenso an ihm gezogen würde, zu zeigen, dass er seine Bewegung mit der kinetischen Energie $2\pi E \coth(2\pi)$ [1]) anfangen würde. [Math. Tripos.]

Beisp. 6. Ein Stoss gleich der Einheit an dem Ende $A$ einer Kette $AB$ bringt Tangentialgeschwindigkeiten $u_1$, $u_2$ an ihren beiden Enden hervor. Wirkt der Stoss auf das Ende $B$, so sind die entsprechenden Geschwindigkeiten $u_1'$, $u_2'$. Wird an dem Ende $B$ ein materieller Punkt, dessen Masse die Einheit ist, befestigt und wirkt der Stoss gleich der Einheit auf das Ende $A$, zu beweisen, dass die Geschwindigkeiten an den beiden Enden in dem Verhältniss

$$u_1 + u_1'u_2 - u_2'u_1 : u_2$$

stehen, wobei alle Geschwindigkeiten in derselben Richtung längs des Bogens gemessen werden. [St. John's Coll., 1896.]

Da $T = A\varphi(s) + B\psi(s)$ ist, so wird, wenn auf die Enden einer Kette Stossspannungen $T_1$, $T_2$ wirken, die Tangentialgeschwindigkeit in jedem Punkt durch $u = T_1 f(s) + T_2 F(s)$ dargestellt, worin $f(s)$, $F(s)$ gewisse Functionen von $s$ sind. In dem ersten Fall ist $T_1 = 1$, $T_2 = 0$, daher $f(0) = u_1$, $f(l) = u_2$; in dem zweiten $T_1 = 0$, $T_2 = 1$, daher $F(0) = u_1'$, $F(l) = u_2'$ und in dem dritten

1) cosh $x$, sinh $x$, cotgh $x$, die sogenannten hyperbolischen Cosinusse, etc. werden durch die Gleichungen

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x}$$

definirt.

Fall ist, wenn $U_1$, $U_2$ die gesuchten Geschwindigkeiten an den beiden Enden bezeichnen, $T_1 = 1$ und der Stoss zwischen der Masse gleich der Einheit und dem Faden $T_2 = U_2$. Man erhält also $U_1 = u_1 + U_2 u_1'$, $U_2 = u_2 + U_2 u_2'$. Daraus ergibt sich dann das Verhältniss $U_1 : U_2$.

§ 589. **Anfangsbewegungen.** *Ein Faden steht in einer Ebene unter der Einwirkung gegebener Kräfte und befindet sich dabei entweder in Ruhe oder seine augenblickliche Bewegung ist bekannt. Unter der Voraussetzung, ein Bruch oder eine andere Veränderung finde statt, soll man die Anfangsänderungen der Bewegung und die Anfangsänderung der Spannung finden.*

$mPds$, $mQds$ seien die Componenten der Kräfte in der Richtung der Tangente bez. des Krümmungsradius für irgend ein Element $ds$ des Fadens; $u$, $v$ die Componenten der Geschwindigkeit in denselben Richtungen; $mT$ die Spannung; $\psi$ der Winkel, den die Tangente für das Element $ds$ mit der $x$-Axe macht und $\omega = \partial\varphi/\partial t$ die Winkelgeschwindigkeit des Elementes $ds$.

Wir haben nach § 577 die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v\omega = P + \frac{\partial T}{\partial s} \quad \text{. . . . . . . . (1)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\omega = Q + \frac{T}{\varrho} \quad \text{. . . . . . . . (2)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{\varrho} = 0 \quad \text{. . . . . . . . . . . (3)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{\varrho} = \omega \quad \text{. . . . . . . . . . . (4)}.$$

Aus ihnen leiten wir, wie in § 580, die beiden Gleichungen ab

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} - \frac{T}{\varrho^2} + \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{Q}{\varrho} = -\omega^2 \quad \text{. . . . . . (5)},$$

$$\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T^2}{\varrho}\right) + \frac{P}{\varrho} + \frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad \text{. . . . . . . (6)}.$$

Da die augenblickliche Bewegung des Fadens sowie die Kräfte gegeben sind, so stellen $\omega$, $P$ und $Q$ bekannte Functionen von $s$ dar. Es ist also (5) die Differentialgleichung, aus der $T$ zu ermitteln ist. Sie ist die nämliche, wie die früher in § 587 untersuchte. Wir nehmen daher an, ihre Auflösung sei gefunden. Die Integrationsconstanten sind aus den gegebenen Bedingungen an den Enden des Fadens zu bestimmen. So ergibt sich dann die Anfangsspannung.

Da die Anfangswerthe von $u$, $v$, $\omega$, $P$, $Q$ und $T$ bekannt sind, so folgen die Werthe für $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$ und $\partial\omega/\partial t$ aus (1), (2) und (6). Damit sind alle Anfangsbeschleunigungen bestimmt.

Differenzirt man (5) nach der Zeit, *so erhält man eine weitere Differentialgleichung zur Ermittelung von* $\partial T/\partial t$ *von derselben Art, wie zuvor.* Hat man sie aufgelöst, so ergeben sich $\partial^2 u/\partial t^2$, $\partial^2 v/\partial t^2$ und $\partial^2\omega/\partial t^2$ durch Differentiation von (1), (2) und (6).

Verfährt man auf diese Art, so findet man die augenblicklichen Werthe aller Differentialquotienten von $u$, $v$, $\omega$ für den Moment, in welchem der Bruch stattfindet.

Wenn $u_t$, $v_t$, $\omega_t$ die Werthe dieser Grössen nach der Zeit $t$ sind, so hat man nach dem Taylor'schen Satz (siehe Bd. 1, § 199)

$$u_t = u + \frac{\partial u}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} t^2 + \cdots$$

und ähnliche Ausdrücke für $v_t$ und $\omega_t$. Die Anfangsbewegung ergibt sich so bis auf einen beliebigen Grad der Annäherung.

§ 590. Um den Anfangskrümmungsradius $R$ der Bahn zu finden, welche ein Element des Fadens im Raum beschreibt, suche man die Componente der an diesem Element wirkenden Kräfte senkrecht zur Tangente an seine Bahn und setze das Resultat gleich $(u^2 + v^2)/R$. Die Bewegungsrichtung des Elementes bildet mit der Tangente und Normalen an den Faden Winkel, deren *Sinusse* $v/(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$ und $u/(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$ sind. Die an dem Element angreifenden Kräfte sind $P + \partial T/\partial s$ und $Q + T/\varrho$. Man hat mithin

$$\frac{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{R} = u\left(Q + \frac{T}{\varrho}\right) - v\left(P + \frac{\partial T}{\partial s}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Um die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher der Krümmungsradius des Fadens sich zu ändern beginnt, beachte man, dass $\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial \psi}{\partial s}$ ist. Daraus folgt $\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial \omega}{\partial s}$. Wenn man daher (5) nach $s$ differenzirt, so erhält man die Geschwindigkeit, mit welcher die Krümmung des Fadens sich zu ändern beginnt. Differenzirt man (6) nach $s$, so ergibt sich die Beschleunigung der Krümmungsänderung.

§ 591. *Wenn sich der Faden im Gleichgewicht befindet und an irgend einem Punkt durchschnitten wird*, so nehmen die Gleichungen zur Ermittelung der Anfangsspannung $T$ und der Winkelbeschleunigung $\partial\omega/\partial t$ eine einfache Gestalt an. Ist $T_0$ die Spannung vor dem Durchschneiden, so wird

$$0 = P + \frac{\partial T_0}{\partial s}, \quad 0 = Q + \frac{T_0}{\varrho}.$$

Ist ferner $T = T_0 + T'$ und bedenkt man, dass der Faden von der Ruhe ausgeht, so sind die Werthe von $T'$, $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$ und $\partial\omega/\partial t$ durch

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial s^2} - \frac{T'}{\varrho^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial T'}{\partial s}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{T'}{\varrho}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{T'}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T'^2}{\varrho}\right)$$

gegeben.

Durch Integration der ersten Gleichung erhält man $T'$ mit zwei willkürlichen Constanten, § 587. Um diese Constanten zu finden, untersuche man die Bedingungen an den Enden des Fadens. An dem Ende, durch welches der Schnitt geführt wurde, ist $T = 0$ und daher $T' = -T_0$. *Wenn der Faden auf seiner ganzen Länge frei ist*, so hat man auch an dem andern Ende $T = 0$; diese beiden Bedingungen reichen zur Bestimmung der zwei Constanten aus. *Geht der Faden über eine kleine glatte Rolle*, so sind die Theile des Fadens auf jeder Seite der

Rolle im vorliegenden Fall als zwei Fäden zu betrachten; man erhält also vier Constanten. Zu ihrer Bestimmung sind, ausser $T=0$ an jedem freien Ende, zwei Bedingungen an der Rolle vorhanden, nämlich, dass $T$ und $\frac{\partial u}{\partial}$ für jeden Theil des Fadens dieselben sein müssen.

Die Anfangsrichtung der Bewegung eines jeden Elementes findet man durch Zusammensetzung der Geschwindigkeiten $\frac{\partial u}{\partial t}dt$, $\frac{\partial v}{\partial t}dt$; die Anfangsrichtung der Bewegung bildet daher mit der Tangente an den Faden einen Winkel, dessen Tangente $\frac{\partial v}{\partial t}\Big/\frac{\partial u}{\partial t}$ ist. Um den Anfangskrümmungsradius der Bahn irgend eines Massenpunktes zu erhalten, hat man, wie aus Bd. 1, § 212 folgt, zuerst $\partial^2 u/\partial t^2$, $\partial^2 v/\partial t^2$ durch zweimalige Differentiation der Gleichungen (1) und (2) zu ermitteln.

§ 592. **Beispiele.** *Ein Faden befindet sich im Gleichgewicht und hat die Form eines Kreises um das Centrum einer abstossenden Kraft, welche in seinem Mittelpunkt liegt. Wird nun der Faden in irgend einem Punkt A durchschnitten, zu beweisen, dass die Spannung in einem beliebigen Punkt P sich augenblicklich in dem Verhältniss*

$$e^{\pi}+e^{-\pi}-e^{\pi-\theta}-e^{-(\pi-\theta)} : e^{\pi}+e^{-\pi}$$

*ändert, worin θ den zu dem Bogen AP gehörigen Centriwinkel bezeichnet.*

Bezeichnet $F$ die Centralkraft, so ist $P=0$ und $mQ=-F$. Es sei $a$ der Radius des Kreises. Die Gleichung in § 589 zur Bestimmung von $T$ wird dann

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s^2}-\frac{T}{a^2}=-\frac{F}{a}.$$

Wird $s$ von dem Punkt $A$ aus nach $P$ hin positiv gerechnet, so ist $s=a\theta$; ferner ist $F$ von $s$ unabhängig; daraus folgt

$$T=Fa+Ae^{\theta}+Be^{-\theta}.$$

Um die willkürlichen Constanten $A$ und $B$ zu bestimmen, hat man die Bedingung $T=0$ für $\theta=0$ und $\theta=2\pi$; ferner $T=Fa$, grade ehe der Faden durchschnitten wurde. Daraus folgt dann das oben angegebene Resultat.

Beisp. 2. Ein Faden wird um den unteren Theil eines verticalen Kreises gewunden und durch zwei Kräfte an den Enden eines horizontalen Durchmessers grade im Gleichgewicht gehalten. Der Kreis wird plötzlich entfernt; man beweise, dass die Spannung an dem tiefsten Punkt augenblicklich in dem Verhältniss $4 : e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}$ abnimmt.

Beisp. 3. Die Endglieder einer gleichförmigen Kette können frei auf zwei sich schneidenden Geraden gleiten, welche rechte Winkel miteinander bilden und gleichmässig gegen die Verticale geneigt sind. Die Kette befindet sich unter der Wirkung der Schwere im Gleichgewicht. Wenn nun die Kette in ihrem tiefsten Punkt bricht, zu zeigen, dass die Spannung in einem beliebigen Punkt $P$ der statischen Spannung mit $4\varphi/(\pi+4)$ multiplicirt gleich ist, worin $\varphi$ den Winkel bezeichnet, den die Tangente in $P$ mit dem Horizont macht.

Beisp. 4. Ein Faden, der die Gestalt des Bogens einer logarithmischen Spirale hat, liegt auf einem glatten Tisch und beginnt sich von der Ruhe aus unter der Wirkung einer Centralkraft $F$ zu bewegen, welche die Richtung vom Pol weg hat und wie die $n^{te}$ Potenz des Abstandes variirt. Man zeige, dass die Anfangsspannung durch

$$T=-rF\frac{n\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{n(n+1)\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}+Ar^p+Br^q$$

gegeben ist, worin $\alpha$ den constanten Winkel der Spirale angibt und $p$, $q$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x(x-1) = \mathrm{tg}^2\,\alpha$ sind. Man zeige, dass diese Lösung ihre Form ändert, wenn $\alpha$ derart ist, dass das erste Glied unendlich gross wird und finde die neue Form.

Beisp. 5. Eine gegebene schwere gleichförmige unelastische Kette ist in nahezu grader Linie so ausgestreckt, dass ihre beiden Enden sich auf derselben Höhe befinden; plötzlich wird das eine Ende losgelassen; man beweise, dass für eine erste Annäherung das doppelte Product aus den Spannungen an dem anderen Ende vor und nach dem Loslassen dem Quadrat des Gewichtes der Kette gleich ist.
[Math. Tripos, 1888.]

Beisp. 6. Ein schwerer Faden $AB$ wird im Gleichgewichtszustand über zwei kleine glatte Zapfen $P$, $Q$ gelegt, die in derselben horizontalen Linie liegen und dabei werden die Enden $A$, $B$ in gleicher Höhe über der Directrix der Kettenlinie gehalten, welche $P$ und $Q$ verbindet. Die Enden $A$, $B$ werden gleichzeitig losgelassen; man finde die Anfangsspannung in irgend einem Punkt und die Winkelbeschleunigung irgend eines Elementes.

Man betrachte den Faden $PQ$ und setze $T = T_0 + T'$, § 591, worin $T_0 = gy$ die statische Spannung und nach § 587, $T' = y(A\varphi + B)$ ist. Da der Faden $PQ$ in Bezug auf den tiefsten Punkt $C$ symmetrisch ist, so wird die Constante $A = 0$. Ebenso ist, an dem Zapfen $P$, $\partial u/\partial t = \partial T'/\partial s$. Wenn $b$ den Bogen $CP$, $h$ die Ordinate von $P$ bezeichnet, so erhält man $\partial u/\partial t = Bb/h$. Man betrachte dann weiter den Faden $PA$; wenn $k$ seine Länge angibt, so ist die Beschleunigung durch $k\,\partial u/\partial t = kg - T$ gegeben. Durch Substitution für $\partial u/\partial t$ und $T$ ergibt sich $B = \frac{-gh(h-k)}{h^2 + kb}$. Die Werthe von $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$, $\partial \omega/\partial t$ erhält man durch Differentiation, § 591.

§ 593. Beisp. 1. Ein Faden ohne Ende, der die Gestalt eines Kreises hat, rotirt in seiner eigenen Ebene mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $\omega$. Er wird an einem beliebigen Punkt durchschnitten; man finde die Anfangsspannung, den Anfangskrümmungsradius der Bahn irgend eines Elementes und die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Spannung ändert.

$OCA$ sei der durch den Bruchpunkt $A$ gehende Durchmesser und der Bogen werde von $O$ aus gemessen. $a$ sei der Radius und $s = a\varphi$. Da gegebene Kräfte nicht vorhanden sind, so ist $P = 0$, $Q = 0$. Aus (5) folgt sofort, weil $\varrho = a$ ist,

$$T = a^2\omega^2 + A\cosh\varphi + B\sinh\varphi,$$

worin $A$ und $B$ derart sind, dass, für $\varphi = \pm\pi$, $T = 0$ ist; folglich ist

$$T = a^2\omega^2(1 - \cosh\psi/\cosh\pi).$$

Um den Krümmungsradius der Bahn eines Elementes zu finden, beachte man, dass jedes Element sich mit der Geschwindigkeit $u = a\omega$ in der Richtung der Tangente an den Faden bewegt. Durch Zerlegung in der Richtung der Normalen zum Faden wird $u^2/R = T/a$, woraus $R = u^2 a/T$ folgt. Dies ergibt sich sofort aus Gleichung (7), da $v = 0$ und $Q = 0$ ist. $\partial\omega/\partial t$ findet man aus (6); da $\varrho = a$, so ist $a^2\,\partial\omega/\partial t = 2\,\partial T/\partial\psi$. Differenzirt man (5) nach $t$, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \frac{\partial T}{\partial t}}{\partial s^2} - \frac{\frac{\partial T}{dt}}{\varrho^2} - \frac{2T}{\varrho}\frac{\partial\omega}{\partial s} = -2\omega\frac{\partial\omega}{\partial t},$$

und da $\partial\omega/\partial s = 0$ ist, durch Integration dieser Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 2a^2\omega^3\left(\frac{\varphi\cosh\varphi}{\cosh\pi} - \frac{\pi\sinh\varphi}{\sinh\pi}\right).$$

Durch Differentiation von (5) und (6) nach $s$ lässt sich auch zeigen, dass die Geschwindigkeit $\partial\varrho/\partial t$, mit welcher sich der Krümmungsradius des Fadens ändert, Anfangs Null ist und dass die Beschleunigung Anfangs $2a\omega^2 \cosh\psi \,.\, \operatorname{sech}\pi$ ist.

Beisp. 2. Ein Faden bewegt sich unter dem Einfluss einer Centralkraft, welche die Richtung vom Coordinatenanfang weg hat. Wenn die augenblickliche Bewegung bekannt ist, zu zeigen, dass sich $T$ aus

$$\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} - \frac{T}{\varrho^2} + \frac{\partial F}{\partial r}\cos^2\varphi + \frac{F}{r}\sin^2\varphi = -\omega^2$$

ergibt. Geht der Faden von der Ruhe aus und sind beide Enden frei, zu beweisen, dass $\partial T/\partial t$ Anfangs durch den ganzen Faden Null ist.

Beisp. 3. Ein Faden von der Länge $2a\alpha$, welcher die Gestalt eines Kreisbogens vom Radius $a$ hat, befindet sich in Ruhe und steht unter der Wirkung einer Centralkraft $F(r)$, welche die Richtung von dem Mittelpunkt des Kreises weg hat. Man zeige, dass die augenblickliche Spannung an einem Punkt $P$

$$T = aF(a)(1 - \cosh\theta/\cosh\alpha)$$

ist, worin $\theta$ der zum Bogen $OP$ gehörige Centriwinkel ist und der Bogen $OP$ von dem Mittelpunkt $O$ des Fadens aus gemessen wird.

Beisp. 4. Ein schwerer gleichförmiger Faden von gegebener Länge wird im Zustand der Ruhe auf einen rauhen Tisch gelegt, dessen Reibungscoefficient $\mu$ ist; an jedem Ende des Fadens greift eine endliche Kraft an. Wenn jedes Element des Fadens sich in einer Richtung zu bewegen anfängt, welche den gegebenen Winkel $\beta$ mit der Tangente für das Element macht, zu beweisen, dass die Gleichung des Fadens

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a} e^{-2\varphi\operatorname{cotg}2\beta} + \frac{1}{b} c^{-\varphi\operatorname{cotg}\beta}$$

ist, worin $\varphi$ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente mit einer festliegenden Geraden macht. Man beweise auch, dass die Kraft an jedem Ende die Grösse $\mu b \sin\beta e^{\varphi_1 \operatorname{cotg}\beta}$ haben muss, worin $\varphi_1$ der Werth von $\varphi$ an dem betreffenden Ende ist. Wenn $a$ unendlich gross wird, so ist die Curve eine logarithmische Spirale und der Faden befindet sich im Gleichgewicht.

Beisp. 5. Wenn sich in dem letzten Beispiel jedes Element in einer Richtung zu bewegen beginnt, welche den Winkel $\varphi$ mit der Tangente macht, zu beweisen, dass die Gleichung des Fadens $a/\varrho = 1 + b\sec^2\varphi$ ist, worin $a$ und $b$ willkürliche Constanten sind und die Kraft an jedem Ende die Grösse $\mu a \sin\varphi$ hat.

## Ueber stationäre Bewegung.

§ 594. **Definition.** Die Bewegung eines Fadens, bei der die Curve, welche er im Raum bildet, derjenigen immer gleich, ähnlich und ähnlich gelegen bleibt, welche er in seiner Anfangslage bildete, soll stationär heissen.

*Die stationäre Bewegung eines homogenen unausdehnbaren Fadens zu untersuchen.*

Offenbar ist jedes Element des Fadens mit zwei Geschwindigkeiten behaftet, von denen die eine der Bewegung der Curve im Raum, die

andere der Bewegung des Fadens längs der Curve, welche er im Raum bildet, zu verdanken ist. $a$ und $b$ seien die Componenten der Geschwindigkeit der Curve in der Richtung der Axen zur Zeit $t$ und $c$ die Geschwindigkeit des Fadens längs der Curve. Behält man die frühere Bezeichnung bei, so ist alsdann

$$u = a + c \cos\varphi, \quad v = b + c \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

$a$, $b$, $c$ sind nun Functionen von $t$ allein, daher ist

$$\partial u/\partial s = - c \sin\varphi \, \partial\varphi/\partial s.$$

Nach Gleichung (9) des § 575 erhält man mithin

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = c \frac{\partial\varphi}{\partial s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Substituirt man die Werthe von $u$ und $v$ in die Bewegungsgleichungen, § 574, so wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial t}\cos\varphi - c\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= X + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T}{m}\cos\varphi\right) \\ \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial t}\sin\varphi + c\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= Y + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T}{m}\sin\varphi\right) \end{aligned}\right\}$$

und, wenn man für $\partial\varphi/\partial t$ seinen Werth einsetzt,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \left(X - \frac{\partial c}{\partial t}\cos\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(\frac{T}{m} - c^2\right)\cos\varphi\right\} \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= \left(Y - \frac{\partial c}{\partial t}\sin\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(\frac{T}{m} - c^2\right)\sin\varphi\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Gestalt der Curve muss von $t$ unabhängig sein; eliminirt man daher $T$, so darf die sich ergebende Gleichung $t$ nicht enthalten. Dies ist im Allgemeinen nur dann der Fall, wenn $\partial a/\partial t$, $\partial b/\partial t$, $\partial c/\partial t$ constant sind. Jedenfalls wird ihr Werth durch die bekannten näheren Umstände des Problems bestimmt. Die obigen Gleichungen müssen dann unter der Annahme aufgelöst werden, dass $s$ die einzige unabhängige Variabele ist und $t$ constant bleibt.

§ 595. **Gleichförmige stationäre Bewegung.** Sind $a, b, c$ constant, so nehmen die Gleichungen eine einfachere Gestalt an. Es ist dann

$$0 = mX + \frac{\partial}{\partial s}(T'\cos\psi), \quad 0 = mY + \frac{\partial}{\partial s}(T'\sin\psi) \cdot \quad . \quad (4),$$

worin $T' = T - mc^2$ ist. Dies sind die Gleichgewichtsgleichungen eines Fadens, an dem dieselben gegebenen Kräfte $mX$ und $mY$ angreifen. Wir erhalten so eine Analogie zwischen der stationären Bewegung und dem Gleichgewicht eines homogenen Fadens, die sich gut verwenden lässt.

*Wenn z. B. ein Faden unter der Wirkung der Schwere eine gleichförmige stationäre Bewegung haben kann, so muss seine Form in jedem Augenblick dieselbe sein, wie die eines Fadens, der sich unter der Wirkung*

*der Schwere im Gleichgewicht befindet.* Die Gestalt der beweglichen Curve muss daher eine Kettenlinie sein. Die Art der Kettenlinie hängt von den Endbedingungen ab und, wenn diese sich mit den Eigenschaften einer Kettenlinie nicht vertragen, so ist eine gleichförmige stationäre Bewegung unmöglich.

Welche Kettenlinie der Faden aber auch bilden mag, jedenfalls übertrifft die Spannung in jedem Punkt des beweglichen Fadens die Spannung in dem entsprechenden Punkt der festliegenden Kettenlinie um $mc^2$. Es ist daher an einem Punkt, dessen Coordinate, von der Directrix aus gemessen, $y$ ist, $T = m(gy + c^2)$.

Allgemeiner gesprochen, geht aus den Gleichungen (4) hervor, dass ein Faden nur dann eine gleichförmige stationäre Bewegung haben kann, wenn jede seiner Lagen derart ist, dass er unter der Wirkung der augenblicklichen Kräfte im Gleichgewichtszustand darin ruhen könnte. Nimmt man an, diese Bedingung sei erfüllt, so müssen auch die Bedingungen an den Enden, wenn die Curve des Fadens nicht geschlossen ist, sich mit dieser Form vertragen. Diese Bedingungen sind nothwendig und ausreichend.

Wichtig ist bei diesem Theorem der Fall, in welchem der Faden eine geschlossene Curve bildet, die sich im Raum nicht fortbewegt. Er wurde zuletzt in den *Solutions of Cambridge Problems*, 1854 von Walton und Mackenzie besprochen, welche das Problem, wie folgt, aufstellten: Wenn eine gleichförmige Kette ohne Ende von beliebiger Gestalt der Wirkung von Kräften, die nur von der Lage des angegriffenen Massenpunktes abhängen, und den Reactionen glatter Flächen unterworfen ist, so fährt sie, in Bewegung gesetzt, fort, sich in derselben Form derart zu bewegen, dass jeder Punkt der Kette seine Bewegung in der Richtung der Tangente in diesem Punkt beginnt.

§ 596. **Beispiele.** Beisp. 1. Ein horizontaler Cylinder dreht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um seine Axe und eine um ihn gelegte Kette ohne Ende rotirt mit ihm in der Art, dass ihre Gestalt im Raum immer dieselbe bleibt; man zeige, dass die Gestalt der Curve von der Geschwindigkeit nicht abhängt. [Math. Tripos, 1854.]

Beisp. 2. Ein gleichförmiger Faden $AB$ von gegebener Länge wird in die Form eines Bogens einer logarithmischen Spirale gebracht und unterliegt der Einwirkung des Centrums einer abstossenden Kraft, welche in dem Pol $O$ der Spirale liegt, und deren Beschleunigung $\mu/(\text{Abstand})^2$ ist. Jedes Element beginnt sich mit der Geschwindigkeit $\mu$ in der Richtung der Tangente zu bewegen. An den Enden $A$, $B$ greifen die Kräfte $F_1$, $F_2$ an. Wenn $F_1 = m(u^2 + \mu/OA)$ und $F_2 = m(u^2 + \mu/OB)$ ist, worin $m$ die Masse pro Längeneinheit bedeutet, zu beweisen, dass der Faden die Spirale gleichförmig beschreibt.

Beisp. 3. Eine leichte biegsame unausdehnbare Röhre von kleinem gleichförmigem Querschnitt wird mit ihren Enden an zwei Punkten aufgehängt, die in derselben Horizontalen liegen, und ist mit Wasser gefüllt, welches mit gleichförmiger Geschwindigkeit durch sie fliesst. Man beweise, dass sie die Gestalt der gewöhnlichen Kettenlinie annimmt und dass die longitudinale Spannung constant ist. [Math. Tripos.]

§ 597. Beisp. **Die Gestalt des elektrischen Kabels.** *Ein elektrisches Kabel wird durch ein Schiff, welches sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer Geraden bewegt, auf den Boden eines Meeres von gleichmässiger Tiefe niedergelegt und mit der Geschwindigkeit c, welche der des Schiffes gleich ist, von dem Schiff abgegeben. Man bestimme die Gestalt des Fadens, wenn die Bewegung stationär ist.*

Man betrachte den Theil des Kabels zwischen dem Schiff $A$ und dem Grund $B$. Wenn die Reibung des Wassers an dem Faden vernachlässigt wird, so ist die Schwere, um den Auftrieb des Wassers vermindert, die einzige an dem Faden angreifende Kraft; sie werde durch $g'$ dargestellt. Die Gestalt der beweglichen Curve ist alsdann die gewöhnliche Kettenlinie und die Spannung an irgend einem Punkt übertrifft die Spannung in der Kettenlinie (siehe § 595) um das Gewicht einer Länge des Fadens gleich $c^2/g'$.

Um die specielle Kettenlinie zu bestimmen, welche der Faden bildet, betrachten wir die Bedingungen an den Enden $A$ und $B$. Im Punkt $B$, in dem das Kabel den Boden trifft, muss die Tangente an die Kettenlinie horizontal sein. Denn sonst würden die Tangenten in den Endpunkten des Elementes des Fadens, welches in $B$ liegt, unter einem *endlichen* Winkel gegeneinander geneigt sein. Da nun $T$ in einer Kettenlinie nicht Null sein kann, so würde an der Masse dieses Elementes eine endliche resultirende Kraft angreifen und das Element mithin seine Lage mit unendlich grosser Geschwindigkeit ändern. Die Kettenlinie hat daher $B$ zum Scheitel.

Zur Bestimmung der Kettenlinie ist noch eine Bedingung nöthig. Wenn $l$ die Länge des Theils des Kabels zwischen dem Schiff und dem Grund ist und $h$ die Tiefe des Meeres, so muss der Parameter $\gamma$ der Kettenlinie der Gleichung

$$(h + \gamma)^2 = l^2 + \gamma^2$$

genügen. Wenn ferner $L$ die Länge des ausgegebenen Kabels, $D$ die von dem Schiff zurückgelegte Strecke bezeichnet, so ist nach einer Eigenschaft der Kettenlinie

$$D - L + l = \gamma \log (h + \gamma + l) - \gamma \log \gamma,$$

worin jede Seite die Abscisse des Schiffes in Bezug auf $B$ als Coordinatenanfang angibt. Substituirt man für $l$, so erhält man eine Gleichung, aus welcher $\gamma$ sich finden lässt, wenn $h$, $L$ und $D$ bekannt sind.

Das Problem der Legung eines elektrischen Kabels scheinen zuerst Longridge und Brooks (*Institution of Civil Engeneers,* Febr. 1858) untersucht zu haben. Eine andere Lösung gab Sir G. Airy in dem *Phil. Mag.* für Juli, 1858. Ferner findet man eine Discussion des Gegenstandes durch Woolhouse in den *Phil. Mag.* für Mai, 1860. Sie schliessen in ihre Entwickelungen sämmtlich die Reibung zwischen dem Wasser und dem Kabel ein.

§ 598. Wir wollen nun untersuchen, wie die Lösung beeinflusst wird, wenn die Reibung des Wassers an dem Kabel in Rechnung gezogen wird. Wir wollen annehmen, *die Reibung an einem Element des Kabels variire wie seine Geschwindigkeit im Raum und wirke in einer seiner Bewegungsrichtung entgegengesetzten Richtung.* Jedes Element hat eine Bewegung längs des Kabels und eine transversal zu ihm und die Reibungscoefficienten für diese beiden Bewegungen sind wahrscheinlich nicht genau gleich. Um jedoch die Formeln nicht zu complicirt zu machen, behandeln wir sie hier als gleich. $\mu$ sei der Reibungscoefficient.

Die $x$-Axe sei horizontal und $x'$ die Abscisse eines Punktes des Kabels von der Stelle aus gemessen, wo das Kabel den Grund berührt und in der Richtung der Bewegung des Schiffes. Ferner sei $s'$ die Länge der Curve, von demselben Punkt aus gemessen. Alsdann ist

$$x = x' + ct \quad \text{und} \quad s = s' + ct.$$

Behält man die frühere Bezeichnung bei, so hat man

$$X = -\mu u, \quad Y = -g' - \mu v$$

und

$$u = c - c \cos \varphi, \quad v = -c \sin \varphi.$$

Die Gleichungen (3) des § 594 werden mithin

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\mu c + \mu c \cos\varphi + \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(\frac{T}{m} - c^2\right)\cos\varphi\right\} \\ 0 &= -g' + \mu c \sin\varphi + \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(\frac{T}{m} - c^2\right) - \sin\varphi\right\} \end{aligned}\right\}.$$

Um sie zu integriren, setze man $\sin\varphi = \partial y/\partial s$, $\cos\varphi = \partial x/\partial s$. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} g'A &= -\mu cs + \mu cx + \left(\frac{T}{m} - c^2\right)\cos\varphi \\ g'B &= -g's + \mu cy + \left(\frac{T}{m} - c^2\right)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

worin $A$ und $B$ zwei willkürliche Constanten sind.

In dem Punkt, in welchem das Kabel den Boden trifft, muss entweder $T = 0$ oder $\varphi = 0$ sein. Denn, wäre $\varphi$ nicht Null, so würden die Tangenten in den Endpunkten eines unendlich kleinen Theils des Fadens einen endlichen Winkel miteinander machen. Wäre dann auch $T$ von Null verschieden und nimmt man die Componente der Spannungen an den beiden Enden in irgend einer Richtung, so würde eine endliche Kraft an einer unendlich kleinen Masse angreifen. Das Element würde daher seine Lage mit unendlich grosser Geschwindigkeit ändern. Wir wollen zuerst annehmen, $\varphi$ sei Null. In demselben Punkt ist dann auch $y = 0$ und $s' = 0$ und daher $B = -ct$.

Setzt man $\frac{\mu c}{g'} = e$, so erhält man durch Division

$$\frac{dy}{dx'} = \frac{s' - ey}{A - ex' + es'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Dies ist die Differentialgleichung der Curve, welche das Kabel bildet. Um sie zu integriren, setze man $p$ für $\partial y/\partial x'$ und drücke $s'$ durch die übrigen Grössen aus. Differenzirt man dann und schreibt $1 + p^2$ für $(\partial s'/\partial x)^2$ und $v$ für $A - ex' + e^2 y$, so wird

$$\frac{dv}{v} = \frac{-e\,dp}{(1 - ep)\sqrt{1 + p^2}}.$$

Die Variabeln sind jetzt getrennt und die Integrationen lassen sich ausführen. Die Gleichung kann zum zweiten Mal integrirt werden, das Resultat ist aber sehr lang. Die willkürliche Constante $A$ kann jeden Werth annehmen; sie hängt von der Länge der von dem Schiff zur Zeit $t = 0$ herabhängenden Kette ab.

Die Curve gleicht in ihrem tiefsten Theil einem Kreisbogen oder dem unteren Theil einer gewöhnlichen Kettenlinie. In ihrem oberen Theil dagegen sucht die Curve nicht vertical zu werden, sondern nähert sich einer Asymptote, welche einen Winkel mit dem Horizont macht, dessen Cotangente $e$ ist. Diese Asymptote geht nicht durch den Punkt, in welchem das Kabel den Grund berührt, sondern unter ihm durch und der kürzeste Abstand beträgt $A/e\,(e^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$; sie geht auch unter dem Schiff her.

Wenn in Folge der näheren Umstände des Problems die Spannung an dem tiefsten Punkt Null ist, so braucht die in diesem Punkt an die Curve gezogene Tangente nicht nothwendiger Weise horizontal zu sein. $\lambda$ sei der Winkel, den diese Tangente mit dem Horizont macht. In Bezug auf die Gleichungen (1) in § 594 hat man gleichzeitig

$$x' = 0,\ y = 0,\ s' = 0,\ T = 0 \text{ und } \varphi = \lambda.$$

Daraus folgt

$$Ag' = -c^2\cos\lambda,\quad Bg' = -c^2\sin\lambda - g'ct.$$

Die Differentialgleichung der Curve wird jetzt

$$\frac{dy}{dx'} = \frac{-c^2 \sin\lambda + g'(s' - ey)}{-c^2 \cos\lambda + g'(es' - ex')} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

die sich auf dieselbe Art, wie vorher, integriren lässt. Der Fall verdient Beachtung, in welchem $e = \operatorname{cotg}\lambda$ ist. Der Gleichung wird dann offenbar durch $y = x'/e$ genügt. Die beiden Constanten des Integrals von (3) werden durch die Bedingung bestimmt, dass für $x' = 0$ und $y = 0$, $dy/dx' = \operatorname{tg}\lambda$ sein muss. Beide Bedingungen werden durch die Beziehung $y = x'/e$ erfüllt. Dies ist mithin das gesuchte Integral. Die Gestalt des Kabels ist also eine Gerade, die mit dem Horizont den Winkel $\lambda = \operatorname{arc\,cotg} e$ macht und die Spannung ergibt sich aus der Formel

$$T = \frac{mg'y}{1 + \cos\lambda}.$$

Beisp. 2. Ein Kabel werde mit der Geschwindigkeit $c'$ von einem Schiff abgelassen, welches sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $c$ in einer Geraden auf der Oberfläche eines Meeres von gleichmässiger Tiefe bewegt. Wenn der Widerstand des Wassers gegen das Kabel dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist und der Widerstandscoefficient $B$ für Bewegung der Länge nach von dem Coefficienten $A$ für seitliche Bewegung verschieden ist, zu beweisen, dass das Kabel die Gestalt einer Geraden annehmen kann, welche den Winkel $\lambda$ mit dem Horizont macht, wobei sich $\lambda$ aus

$$\operatorname{cotg}^2\lambda = \sqrt{e^4 + \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2}$$

ergibt und $e$ das Verhältniss der Geschwindigkeit des Schiffes zu der Endgeschwindigkeit eines Theils des Kabels ist, welcher seitlich in das Wasser fällt. Man beweise auch, dass die Spannung aus der Gleichung

$$T = \left\{ y - \frac{B}{A} e^2 \left( \frac{c'}{c} - \cos\lambda \right)^2 \frac{y}{\sin\lambda} \right\} mg'$$

folgt. [*Phil. Mag.*]

## Kleine Schwingungen einer losen Kette.

§ 599. **Die an einem Ende aufgehängte Kette.** *Eine schwere nicht homogene Kette wird an ihrem einen Ende aufgehängt und hängt unter dem Einfluss der Schwere in einer Geraden herab. Es wird der Kette eine kleine Störung in einer verticalen Ebene gegeben; man soll die Bewegungsgleichungen finden* [1]).

1) Dieses Problem wurde zuerst von Daniel Bernoulli studirt, *Comm. Act. Petr.*, Bd. 6 und 7, S. 108 und 162, 1732—1735. Später untersuchte es Poisson in Bd. 7 des *Journal Polytechnique*, S. 385, 1807. Er setzt $(l - x)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} g^{\frac{1}{2}} t$ gleich $s$ oder $s'$, je nachdem das obere oder untere Zeichen genommen wird, und

$$y' = y(l - x)^{\frac{1}{4}}$$

und reducirt dadurch die Gleichung auf die Form

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial s \partial s'} = -\frac{1}{4} \frac{y'}{(s + s')^2}.$$

Er erhält das Integral mittelst zweier bestimmter Integrale und zweier Reihen

$O$ sei der Befestigungspunkt, die Axe $Ox$ gehe vertical nach abwärts und $Oy$ liege in der Störungsebene horizontal. $mds$ sei die Masse eines Bogenelementes, dessen Länge $PQ$ gleich $ds$ ist und $T$ sei die Spannung bei $P$. Ferner sei $l$ die Länge des Fadens, und es werde angenommen, ein Gewicht $Mg$ sei an dem unteren Ende befestigt. Die Bewegungsgleichungen lauten, wie in § 574,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial x}{\partial s}\right) + g, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial y}{\partial s}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Da die Bewegung sehr klein ist, so schwingt der Punkt $P$ in einem sehr kleinen Bogen und ist die Tangente in seinem Mittelpunkt horizontal. Man kann daher $\partial x / \partial t = 0$ setzen. Aus demselben Grund lässt sich $\partial x / \partial s = 1$ schreiben. Man erhält daher durch Integration der ersten Gleichung

$$T = Mg + g\int_x^l m\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

da $T = Mg$ für $x = l$ ist. Ist die Kette homogen, so nimmt die Gleichung die einfachere Form an

$$T = Mg + mg\,(l - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Man beachte (1) dass dieser Ausdruck von der Zeit nicht abhängt; (2) dass die Spannung in irgend einem Punkt der Kette dem Gewicht der unter diesem Punkt befindlichen ganzen Masse gleich ist.

*Die Kette sei homogen* und das Gewicht des am unteren Ende befestigten schweren Massenpunktes $n$-mal so gross als das der Kette; es ist dann $M = nml$. Setzt man $l' = (n + 1)\,l$, so wird die zweite Gleichung

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{(l' - x)\frac{\partial y}{\partial x}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und, schreibt man $l' - x$ für $\xi^2$,

$$\frac{4}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lässt sich in der Form zweier bestimmter Integrale ausdrücken

$$y = \int_0^\pi \varphi(ct + \xi\cos\theta)\,d\theta + \int_0^\pi \psi(ct + \xi\cos\theta)\log(\xi\sin^2\theta)\,d\theta \quad (6),$$

worin $4c^2 = g$ ist. Diese willkürlichen Functionen sind aus den näheren Umständen des gerade vorliegenden Problems zu bestimmen. Siehe Boole's *differential equations*, Kap. 18, S. 476.

---

und leitet daraus ab, dass eine einzelne Welle sich die Kette hinauf oder hinab mit gleichförmiger Beschleunigung oder Verzögerung bewegt, welche halb so gross ist, als die der Schwere. Eine allgemeinere Form der Poisson'schen Gleichung wird in Bd. 2 der *Théorie générale des surfaces* von Darboux, 1889 besprochen.

§ 600. *Wir wollen die schwingende Bewegung der Kette in ihre harmonischen oder Hauptoscillationen zerlegen* (Bd. 1, § 461). Am einfachsten ist es, die Differentialgleichung (5) zu Hülfe zu nehmen, obgleich man dasselbe Resultat auch ohne Mühe aus der Lösung in bestimmten Integralen ableiten kann.

Setzt man $y = u \sin(pct + \alpha)$, worin $4c^2 = g$ ist, so dass sich also die Bewegung eines jeden Elementes nach einem constanten Intervall wiederholt, so wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + p^2 u = 0 \quad \text{. . . . . . . . (7).}$$

Dem Integral dieser Gleichung geben wir die Form

$$u = A J_0(p\xi) + B Y_0(p\xi) \quad \text{. . . . . . . (8),}$$

worin $A$ und $B$ zwei Integrationsconstanten sind und $J_0$, $Y_0$ zwei Functionen sind, sogenannte Bessel'sche Functionen, die man in der Gestalt

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots,$$

$$Y_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\log(x\sin^2\varphi)\,d\varphi + 2\log 2\,J_0(x)$$

$$= J_0(x)\log x + \frac{x^2}{2^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \cdots$$

schreiben kann. Siehe Forsyth's *differential equations*, Art. 104, Gray und Mathews *treatise on Bessels functions*, Kap. 2.

*Zuerst nehmen wir an, es sei kein Gewicht an dem unteren Ende der Kette befestigt.* Alsdann ist $M = 0$ und $l' = l$. Da $Y_0$ den Term $\log\xi$ enthält, welcher für $\xi = 0$ oder $x = l$ unendlich gross wird, so ergibt sich die Constante $B = 0$. Benutzt man die in bestimmten Integralen ausgedrückte Lösung, so muss aus demselben Grund die Function $\psi$ Null sein. Die Schwingung ist daher durch

$$y = A J_0(p\xi)\sin(pct + \alpha) \quad \text{. . . . . . . (9)}$$

gegeben. Da für $x = 0$, d. h. $\xi = \sqrt{l}$, $y = 0$ ist, so werden die Perioden der Hauptschwingungen durch

$$J_0(p\sqrt{l}) = 0 \quad \text{. . . . . . . . . (10)}$$

dargestellt. Die Gleichung $J_0(x) = 0$ hat eine unendlich grosse Anzahl von reellen positiven Wurzeln. Sir G. Stokes hat für die $i^{te}$ Wurzel den folgenden Ausdruck angegeben

$$\frac{x}{\pi} = i - 0{,}25 + \frac{0{,}050661}{4i-1} - \frac{0{,}053041}{(4i-1)^3} + \frac{0{,}262051}{(4i-1)^5} - \cdots \quad (11).$$

Siehe seine *Mathematical and Physical papers*, Bd. 2, S. 353 oder die *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, Bd. 60, Thl. 1. Die erste Wurzel für $i = 1$ ist $x/\pi = 0{,}766$, die übrigen Wurzeln findet man bis auf zwei Decimalstellen genau aus $x/\pi = i - \frac{1}{4}$. Die ersten vierzig Wurzeln von $J_0(x) = 0$ mit den entsprechenden Werthen von $J_1(x)$ haben Willson und Peirce in dem *Bulletin of the American Mathematical Society*, Bd. 3, 1897 zusammengestellt.

Es sei $\tau$ die vollständige Periode der einer Wurzel $\varrho$ der Bessel-schen Gleichung (10) entsprechenden Hauptschwingung; alsdann ist

$$\tau = \frac{4\pi}{\varrho}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

*Die Perioden für verschiedene Ketten sind daher den Quadratwurzeln aus ihrer Länge proportional.*

Soll die Kette eine Hauptschwingung ausführen, so muss sie Anfangs in Ruhe sein und die Gestalt der Curve $y = CT_0(p\xi)$ haben, worin $C$ eine willkürliche Constante und $\xi^2 = l - x$ ist.

*Zweitens wollen wir annehmen, ein materieller Punkt von der Masse $M = nml$ sei an dem untersten Punkt der Kette befestigt.* Wir benutzen dann die beiden Hülfsfunctionen $J_0$ und $Y_0$. Wenn der Faden eine Hauptschwingung macht, so ist

$$y = \{AJ_0(p\xi) + BY_0(p\xi)\}\sin(pct + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Zur Ermittelung des Verhältnisses $A/B$ und der Periode der Schwingung dienen die beiden Bedingungen: (1) wie zuvor, für $x = 0$, d. h. $\xi^2 = l'$, $y = 0$ und (2) für $\xi^2 = l' - l$ muss der Werth von $y$ der Differentialgleichung der Bewegung des Massenpunktes $M$ genügen. Diese Gleichung ist

$$M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Mg\frac{\partial y}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Wir erhalten so die beiden folgenden Gleichungen

$$AJ_0(p\sqrt{l'}) + BY_0(p\sqrt{l'}) = 0,$$

$$A\{p^2 fJ_0(pf) - 2pJ_1(pf)\} + B\{p^2 fY_0(pf) - 2pJ_1(pf)\} = 0,$$

worin $J_1(x) = -dJ_0(x)/dx$, $Y_1(x) = -dY_0(x)/dx$ und $f^2 = l' - l$ ist. Eliminirt man $A/B$, so erhält man eine etwas complicirte Determinantengleichung zur Ermittelung der Werthe von $p$.

**Beispiele.** Beisp. 1. Das Gesetz für die Dichtigkeit sei $m = A(l + l' - x)^{-\frac{1}{2}}$, worin $l$ die Länge der Kette und $A$, $l'$ zwei Constanten sind. An dem unteren Ende werde ferner ein Gewicht $2Ag\sqrt{l'}$ befestigt; man beweise, dass

$$y = f\left\{(l + l' - x)^{\frac{1}{2}} - \left(\tfrac{1}{2}g\right)^{\frac{1}{2}}t\right\} + F\left\{(l + l' - x)^{\frac{1}{2}} + \left(\tfrac{1}{2}g\right)^{\frac{1}{2}}t\right\}$$

ist.

Die Integration lässt sich ausführen, wenn man

$$\theta = (l + l')^{\frac{1}{2}} - (l + l' - x)^{\frac{1}{2}}$$

setzt. Die Bewegungsgleichung nimmt dann die Gestalt $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{g}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$ an, die auf die gewöhnliche Art aufgelöst wird.

Beisp. 2. Man zeige ferner, dass die harmonischen Perioden der Kette und des Gewichtes durch

$$\varkappa l'^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \varkappa \{(l+l')^{\frac{1}{2}} - l'^{\frac{1}{2}}\} = 1$$

gegeben sind.

Um den Beweis zu führen, substituire man in die Differentialgleichung, welche in dem letzten Beispiel gefunden wurde, $y = f(\theta) \sin(\varkappa t + \alpha)$; es ergibt sich ein trigonometrischer Ausdruck für $f(\theta)$. Da für alle Werthe von $t$, wenn $x = 0$ ist, $y = 0$ wird, so reducirt sich die Gleichung für $y$ auf

$$y = \sin \varkappa\theta \left\{ A_\varkappa \sin \varkappa t \left(\frac{1}{2} g\right)^{\frac{1}{2}} + B_\varkappa \cos \varkappa t \left(\frac{1}{2} g\right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

worin $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ zwei willkürliche Constanten sind. Wenn aber $x = l$ ist, so muss $y$ der Bewegungsgleichung des Gewichtes, nämlich $\partial^2 y/\partial t^2 = -g\, \partial y/\partial x$ genügen. Daraus folgt das gesuchte Resultat durch Substitution.

Beisp. 3. Man beweise, dass die Hauptschwingungen einer nicht homogenen Kette, deren lineare Dichtigkeit der $n^{\text{ten}}$ Potenz des Abstandes von dem unteren Ende proportional ist, durch

$$y = A x^{-\frac{n}{2}} J_n(2b\sqrt{x}) \sin(pct + \alpha)$$

gegeben sind, worin $g = 4c^2$, $4b^2 = p^2(n+1)$ und $x$ von dem unteren Ende aus nach oben gemessen wird. (Greenhill.]

Ist die lineare Dichtigkeit $m = \varkappa x^n$, so wird Gl. (1)

$$\varkappa x^n \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g\varkappa}{1+n} x^{n+1} \frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

Setzt man $y = u \sin pct$ und, wie zuvor, $x = \xi^2$, so wird daraus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2n+1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + 4b^2 u = 0.$$

Bekanntlich ist, wenn $u = U$ das Integral der Gleichung

$$\frac{du}{dx^2} + \frac{a}{x}\frac{du}{dx} + bu = 0$$

darstellt, nach einem Satz der Differentialrechnung $u = \frac{1}{x}\frac{d}{dx} U$ das Integral derselben Gleichung, falls man $a + 2$ anstatt $a$ schreibt. Daraus folgt unmittelbar in unserem Fall

$$u = A\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^n J_0(2b\xi).$$

Das gesuchte Resultat lässt sich dann leicht aus den bekannten Beziehungen zwischen den Bessel'schen Functionen $J_n$ und $J_0$ ableiten.

§ 601. **Die Bewegung einer einzelnen Welle.** Ein geometrischer Punkt $P$ bewege sich längs der Kette so, dass die Geschwindigkeit d. h. $\partial y/\partial t$ des Massenpunktes, welcher zur Zeit $t$ mit $P$ zusammenfällt, einer constanten Grösse $A$ stets gleich kommt. Wenn $v$ die Geschwindigkeit ist, mit welcher sich $P$ bewegt, und man verfolgt in

Gedanken die Bewegung von $P$, so erhält man durch Differentiation von $\partial y/\partial t = A$ nach $t$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} v = 0.$$

$Q$ sei ebenfalls ein Punkt der Kette und derart, dass die Tangente an die Kette in $Q$ mit der Verticalen einen Winkel macht, dessen Tangente, d. h. $\partial y/\partial x$ gleich $B/T$ ist, worin $B$ eine constante Grösse bedeutet. Ist $v'$ die Geschwindigkeit, mit der sich $Q$ bewegt, so hat man

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial y}{\partial x}\right) v' = 0.$$

Eliminirt man die zweiten Differentialquotienten von $y$ aus diesen Gleichungen und aus (1) in § 599, so ergibt sich leicht, dass, wenn $P$ und $Q$ in irgend einem Augenblick zusammenfallen,

$$vv' = T/m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

ist.

$AB$ sei ein gestörter Theil der Kette und bewege sich in der Richtung $AB$ auf einer sonst im Gleichgewicht befindlichen Kette. An den Grenzen der Störung können die beiden Theile des Fadens keinen endlichen Winkel miteinander machen. Denn sonst würde an einem Element des Fadens eine endliche bewegende Kraft angreifen, nämlich die Resultante der beiden endlichen Spannungen an seinen Enden. Alsdann würde die Störung sich augenblicklich weiter über die Kette verbreiten und eine neue Form annehmen. Schliesst man einen solchen Fall aus, so muss, so lange die Bewegung endlich ist, an dem oberen und unteren Ende der Störung $\partial y/\partial t = 0$ und $\partial y/\partial x = 0$ sein. Ist nun $P$ ein Punkt, in welchem $\partial y/\partial t = 0$ ist und $Q$ ein Punkt, für welchen $\partial y/\partial x = 0$ ist, so kann man sich denken, $P$ und $Q$ lägen grade in der Grenze der Welle und bewegten sich daher beide mit der Geschwindigkeit dieser Grenze. Setzt man $v = v'$, so erhält man für die Geschwindigkeit von $P$ und $Q$

$$v^2 = T/m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Daraus ergibt sich, dass die Geschwindigkeit einer einzelnen Welle, welche sich die Kette hinaufbewegt, bei ihrer Annäherung an das obere Ende grösser wird. Das obere Ende der Welle rückt etwas schneller voran, als das untere, weil die Spannung an dem oberen grösser als an dem unteren ist; die Länge der Welle vergrössert sich daher allmählich. Bewegt sich dagegen die Welle die Kette hinab, so vermindert sich die Geschwindigkeit aus demselben Grunde.

Wenn die Kette homogen ist, so rücken die Grenzen einer einzelnen Welle die Kette mit einer Beschleunigung hinauf, welche der Hälfte derjenigen der Schwere gleichkommt, und mit einer Verzögerung von derselben Grösse die Kette hinab.

§ 602. **Die an beiden Enden aufgehängte Kette.** Eine unelastische nicht homogene Kette wird an zwei festen Punkten aufgehängt und steht unter dem Einfluss der Schwere. Eine geringe Störung wird ihr in ihrer Ebene gegeben; man soll die kleinen Schwingungen finden.

Die $x$-Axe sei horizontal, die $y$-Axe vertical. $C$ sei irgend ein Punkt auf der Kette, wenn sie im Gleichgewicht hängt und der Bogen $s$ werde von $C$ aus gemessen. $(x, y)$ seien die Coordinaten des Punktes $P$, der durch $CP = s$ bestimmt wird. $T$ sei die Spannung in $P$, $mgds$ das Gewicht des in $P$ liegenden Elementes $ds$. Die Gleichgewichtsgleichungen sind

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) - mg = 0.$$

Wenn $\alpha$ der Winkel ist, den die Tangente in $P$ mit der $x$-Axe macht, so findet man leicht

$$T = \frac{wg}{\cos\alpha}, \quad m = w\frac{\partial \operatorname{tg}\alpha}{\partial s} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (1),$$

worin $w$ eine unbestimmte Constante bezeichnet.

Befindet sich die Kette in Bewegung und sind $(x + \xi, y + \eta)$ die Coordinaten der Lage des Massenpunktes $P$ zur Zeit $t$ und ist die Spannung in diesem Punkt $T' = T + U$, so werden die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left\{T'\left(\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial\xi}{\partial s}\right)\right\}, \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left\{T'\left(\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\eta}{\partial s}\right)\right\} - g,$$

welche sich durch Subtraction der Gleichgewichtsgleichungen auf

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial\xi}{\partial s} + U\frac{\partial x}{\partial s}\right), \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial\eta}{\partial s} + U\frac{\partial y}{\partial s}\right) \quad (2)$$

reduciren, wenn die Quadrate kleiner Grössen vernachlässigt werden.

Da der Faden unelastisch ist, hat man

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial\xi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\eta}{\partial s}\right)^2 = 1.$$

Entwickelt man und lässt die Quadrate kleiner Grössen weg, so wird

$$\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial\xi}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial\eta}{\partial s} = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (3).$$

Man erhält so drei Gleichungen, aus welchen sich $\xi$, $\eta$ und $U$ als Functionen von $s$ und $t$ ergeben.

§ 603. **Die Geschwindigkeit der Wellen.** *Die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher sich eine einzelne Welle der Kette entlang bewegt.*

Wenn eine kleine Störung längs der Kette so fortrückt, dass keine plötzliche Richtungsänderung der Kette an den Grenzen der Welle stattfindet, so muss an diesen Grenzen $\partial\xi/\partial s = 0$, $\partial\eta/\partial s = 0$, $\partial\xi/\partial t = 0$,

$\partial\eta/\partial t = 0$ und $U = 0$ sein. Wenn $v$ die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher die eine Grenze der Welle längs der Kette fortrückt, so erhält man, wie in § 601, wenn man in Gedanken dieser Grenze folgt,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + v \frac{\partial^2 \xi}{\partial s \partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial s} + v \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} = 0$$

und daher

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$$

mit einer ähnlichen Gleichung für $\eta$. Die dynamischen Gleichungen an der Grenze werden daher

$$\left(v^2 - \frac{T}{m}\right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} = \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \left(v^2 - \frac{T}{m}\right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} = \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s}$$

und die geometrische Gleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \frac{\partial x}{\partial s} = - \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Daraus ergibt sich leicht $v^2 = T/m$. Setzt man für $T$ und $m$ ihre Werthe ein und bezeichnet mit $\varrho$ den Krümmungsradius bei $P$, so wird

$$v = \sqrt{g \varrho \cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

*Die Geschwindigkeit an jeder Grenze der Welle wird daher durch den vierten Theil der verticalen Sehne des Krümmungskreises in diesem Punkt dargestellt.*

Beisp. Eine Kette befindet sich im Gleichgewicht unter der Wirkung beliebiger Kräfte, welche nur Functionen der Lage des Elementes im Raume sind, an welchem sie angreifen. Man zeige, dass die Geschwindigkeit einer jeden Grenze einer einzelnen Welle durch den vierten Theil der Sehne des Krümmungskreises an dieser Grenze in der Richtung der resultirenden Kraft dargestellt wird.

§ 604. **Die Bewegungsgleichung mit dem Krümmungsradius und dem Winkel zwischen der Tangente und dem Horizont als Variabelen.** *So weit als möglich die Bewegungsgleichungen einer schweren schlaffen nicht homogenen Kette aufzulösen.*

Es empfiehlt sich, die unbekannten Grössen $\xi$, $\eta$, $U$ durch eine einzige Function $\varphi$ auszudrücken.

$\alpha + \varphi$ sei der Winkel, den die Tangente in $P$ mit dem Horizont zur Zeit $t$ macht. Alsdann ist

$$\cos(\alpha + \varphi) = \frac{\partial x + \partial \xi}{\partial s}, \quad \sin(\alpha + \varphi) = \frac{\partial y + \partial \eta}{\partial s},$$

also

$$-\varphi \sin\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial s}, \quad \varphi \cos\alpha = \frac{\partial \eta}{\partial s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und

$$\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = -\varrho \varphi \sin\alpha, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \varrho \varphi \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\xi = -\int \varrho \varphi \sin\alpha \, d\alpha + A, \quad \eta = \int \varrho \varphi \cos\alpha \, d\alpha + B \quad \ldots\ldots \quad (7),$$

worin $A$ und $B$ zwei unbestimmte Functionen von $t$ sind.

Die Gleichungen (2) werden jetzt, wenn man aus den vorstehenden Gleichungen und aus (1) substituirt,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\frac{1}{\cos^2\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-g\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{U}{w}\cos\alpha\right)\\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\frac{1}{\cos^2\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(g\varphi + \frac{U}{w}\sin\alpha\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Wenn der Kürze wegen Accente Differentiationen nach der Zeit angeben und man entwickelt auf der rechten Seite von (8), so kann man den Gleichungen die Gestalt geben

$$\left.\begin{aligned}-\xi''\sin\alpha + \eta''\cos\alpha - g\left(\varphi\sin\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\cos\alpha\right) &= U\,\frac{\cos^2\alpha}{w}\\ \xi''\cos\alpha + \eta''\sin\alpha + g\varphi\cos\alpha &= \frac{\partial U}{\partial\alpha}\,\frac{\cos^2\alpha}{w}\end{aligned}\right\}.$$

Differenzirt man die erste nach $\alpha$ und addirt das Resultat zur zweiten, so wird

$$\frac{\varrho\varphi''}{\cos\alpha} - g\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 2\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{U\cos\alpha}{w}\right).$$

Differenzirt man dagegen die zweite und zieht die erste von dem Resultat ab, so erhält man

$$2g\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{U\cos\alpha}{w}\right).$$

Daraus ergibt sich offenbar

$$U\cos\alpha = wg\left(2\int\varphi\,d\alpha + C\alpha + D\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = g\,\frac{\cos\alpha}{\varrho}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + 4\varphi + 2C\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

worin $C$ und $D$ zwei unbestimmte Functionen von $t$ sind. Dies sind die allgemeinen Gleichungen zur Bestimmung der kleinen Schwingungen einer lockeren Kette.

Ist die Gestalt der Curve für die ungestörte Lage gegeben, so ist $\varrho$ als Function von $\alpha$ bekannt. Die Gleichung (10) kann dann dazu benutzt werden, $\varphi$ als Function von $\alpha$ und $t$ auszudrücken. Die Spannung findet man darauf aus Gl. (9) und die Verschiebungen $\xi$, $\eta$ eines Punktes der Kette aus den Gleichungen (7).

§ 605. Die Bestimmung der ganzen Bewegung hängt daher von der Auflösung einer einzigen Gleichung ab. Nimmt man an, die Integration sei ausgeführt worden, so enthält der Ausdruck für $\varphi$ zwei neue willkürliche Functionen von $\alpha$ und $t$. Sie lassen sich durch $\psi(P)$ und $\chi(Q)$ darstellen, worin $\psi$ und $\chi$ willkürliche Functionen von zwei bestimmten Combinationen $P$ und $Q$ der Variabelen sind. Die beliebigen Functionen $A$ und $B$ sind nicht unabhängig von $C$ und $D$; die Beziehungen zwischen ihnen erhält man durch Substitution in die Gleichungen (8).

Wir haben so vier willkürliche Functionen, deren Werthe aus den näheren Umständen des Problems zu bestimmen sind. Es seien $\alpha_0$, $\alpha_1$ die Werthe von $\alpha$, welche den beiden Enden des Fadens entsprechen. Alsdann sind die Werthe von $\varphi$ und $\partial\varphi/\partial t$ durch das Problem gegeben, wenn für alle Werthe des $\alpha$ von $\alpha = \alpha_0$ bis $\alpha = \alpha_1$, $t = 0$ ist; auch die Anfangswerthe von $A$ und $B$ sind alsdann bekannt. Die Werthe von $\psi(P)$ und $\chi(Q)$ sind also für alle Werthe von $P$ und $Q$ zwischen den beiden Grenzen, welche $\alpha = \alpha_0$, $t = 0$ und $\alpha = \alpha_1$, $t = 0$ entsprechen,

bestimmt. Die Formen von $\psi$ und $\chi$ für Werthe von $P$ und $Q$, die ausserhalb dieser Grenzen liegen, und die Werthe von $A$ und $B$, wenn $t$ nicht Null ist, erhält man aus den Bedingungen an den Enden der Kette. Liegen die Enden fest, so ist sowohl $\xi$ wie $\eta$ für alle Werthe von $t$ sowie für $\alpha = \alpha_0$ und $\alpha = \alpha_1$ Null. Es kann auf diese Art vorkommen, dass die willkürlichen Functionen $A$, $B$, $\psi$ und $\chi$ unstetig sind.

In vielen Fällen setzen uns die näheren Umstände des Problems in den Stand, die Gestalt von $C$ sofort zu bestimmen. Nimmt man z. B. an, der Faden sei im Gleichgewichtszustand um eine Verticale, z. B. die $y$-Axe, symmetrisch, die Aufhängungspunkte lägen in derselben horizontalen Linie fest und die Anfangsbewegung sei ebenfalls um die $y$-Axe symmetrisch, so ist die ganze folgende Bewegung symmetrisch. $\varphi$ muss daher eine Function von $\alpha$ sein und, wenn es entwickelt wird, nur ungrade Potenzen von $\alpha$ enthalten. Substituirt man eine solche Reihe in die Gleichung (10), so ergibt sich $C = 0$.

§ 606. **Schwingungen einer Kette, welche die Gestalt einer Cycloide hat.** Es gibt verschiedene Fälle, in denen sich die Gleichung zur Ermittelung der kleinen Bewegungen einer Kette mehr oder weniger vollständig integriren lässt. Am meisten Interesse bietet wohl der Fall, in welchem die Kette im Gleichgewichtszustand *die Form einer Cycloide* hat. Es ist dann, wenn $b$ den Radius des rollenden Kreises bezeichnet, $\varrho = 4b \cos\alpha$. Die Dichtigkeit der Kette an irgend einem Punkt ist durch $m = \omega/4b \cos^2\alpha$ gegeben, der untere Theil der Kette ist daher nahezu gleichförmig dicht, während die Dichtigkeit weiter die Kette hinauf schnell wächst und an der Spitze unendlich gross wird.

Die Gleichung zur Ermittelung der Schwingungen hat die einfache Gestalt

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{g}{4b}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + 4\varphi + 2C\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11),$$

in welcher alle Coefficienten constant sind.

Zwei Bewegungsfälle sind zu besprechen (1), wenn die Kette in verticaler Richtung hin- und herschwingt und (2), wenn sie von der einen Seite nach der anderen schwingt. Die Resultate werden in den beiden folgenden Beispielen angegeben.

Beisp. 1. *Eine schwere, an zwei in derselben Horizontalen liegenden Punkten aufgehängte Kette hängt unter der Einwirkung der Schwere herab und hat die Gestalt einer Cycloide. Man finde die symmetrischen Schwingungen der Kette, wenn der unterste Punkt sich lediglich aufwärts und abwärts bewegt.*

In diesem Fall ist $C = 0$. Um die Beschaffenheit und Dauer einer kleinen Schwingung zu finden, setzen wir

$$\varphi = \Sigma R \sin\varkappa t + \Sigma R' \cos\varkappa t,$$

worin $\Sigma$ die Summirung für alle Werthe von $\varkappa$ angibt und $R$, $R'$ Functionen von $\alpha$ allein sind. Substituirt man, so erhält man

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\alpha^2} + 4\left(1 + \frac{b\varkappa^2}{g}\right) R = 0$$

und eine ähnliche Gleichung für $R'$. Es folgt

$$R = L \sin 2\alpha \left(1 + \frac{b\varkappa^2}{g}\right)^{\frac{1}{2}},$$

worin $L$ eine willkürliche Constante bezeichnet, während die andere Constante dadurch bestimmt wird, dass die Bewegung um die $y$-Axe symmetrisch ist. Der Kürze wegen setze man $\lambda = 2\sqrt{1 + b\varkappa^2/g}$. Durch Substitution in (7) werden die von $R$ herstammenden Glieder

$$\xi = \Sigma L \frac{2b}{\lambda^2 - 4} \{ \lambda \cos \lambda\alpha \sin 2\alpha - 2 \sin \lambda\alpha \cos 2\alpha \} \sin \varkappa t,$$

$$\eta = \Sigma \left[ -L \frac{2b}{\lambda^2 - 4} \{ \lambda \cos \lambda\alpha \cos 2\alpha + 2 \sin \lambda\alpha \sin 2\alpha \} - L \frac{2b}{\lambda} \cos \lambda\alpha + H \right] \sin \varkappa t,$$

worin $H$ eine Constante bedeutet, die von der Lage der Aufhängungspunkte abhängt. Die von $R'$ herrührenden Glieder müssen zu den vorstehenden addirt werden, sie sind der Kürze wegen weggelassen worden. Sie ergeben sich, wenn man in der obigen Gleichung $\cos \varkappa t$ statt $\sin \varkappa t$ schreibt und die Constanten $L$, $H$ mit zwei anderen $L'$, $H'$ vertauscht.

Ist die Länge der Kette $2l$, so wird an jedem Ende $\sin \alpha_0 = l/4b$. An denselben Punkten ist ferner $\xi = 0$, $\eta = 0$. Diesen vier Bedingungen kann genügt werden, wenn

$$\frac{\operatorname{tg} \lambda\alpha_0}{\lambda} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_0}{2}$$

ist.

*Diese Gleichung bestimmt also die verschiedenen möglichen Werthe der Dauer der symmetrischen Schwingung einer nicht homogenen Kette, die in der Form einer Cycloide herabhängt.*

§ 607. *Wenn $\alpha$ nicht sehr gross ist, so sind die Schwingungen nahezu dieselben wie die einer gleichförmigen Kette*[1]. Da in diesem Fall $\alpha_0$ zwar klein ist, dagegen $\lambda\alpha_0$ nicht nothwendiger Weise klein sein muss, so ist die Gleichung zur Bestimmung von $\lambda$ annähernd

$$\operatorname{tg} \lambda\alpha_0 = \lambda\alpha_0.$$

Der geringste Werth von $\lambda\alpha_0$, den man annehmen kann, ist etwas kleiner als $\frac{3}{2}\pi$, nämlich $\lambda\alpha_0 = 4{,}4934$. Daher ist $\lambda$ gross und mithin nahezu $\varkappa = \lambda\,(g/4b)^{\frac{1}{2}}$. Die Ausdrücke für $\xi$ und $\eta$ nehmen die einfache Form an

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \Sigma L \frac{4b}{\lambda^2} \{ \lambda\alpha \cos \lambda\alpha - \sin \lambda\alpha \} \sin \left\{ \left(\frac{g}{4b}\right)^{\frac{1}{2}} \lambda t + \varepsilon \right\} \\ \eta &= \Sigma L \frac{4b}{\lambda} \{ \cos \lambda\alpha_0 - \cos \lambda\alpha \} \sin \left\{ \left(\frac{g}{4b}\right)^{\frac{1}{2}} \lambda t + \varepsilon \right\} \end{aligned}\right\}.$$

Die von $\cos \varkappa t$ abhängigen Glieder sind in diesen Werthen von $\xi$ und $\eta$ dadurch berücksichtigt worden, dass $\varepsilon$ in den trigonometrischen Factor aufgenommen wurde.

Die Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg} \lambda\alpha_0 = \lambda\alpha_0$ lassen sich durch fortgesetzte Annäherung finden. Die erste ist Null; da aber $\lambda$ in dem Nenner eines der kleinen Terme auftritt, so ist dieser Werth unzulässig. Die übrigen kann man durch die Formel $\lambda\alpha_0 = \frac{1}{2}(2i + 1)\pi - \theta$ ausdrücken, worin $\theta$ nicht sehr gross ist. Dadurch wird die Dauer der Schwingung nahezu $\frac{4}{2i+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{4gb}}$. Die einzelnen Schwingungen der Kette dauern daher nicht lange.

Dieses Resultat erklärt auch, weshalb es für eine Hängebrücke gefährlich werden kann, wenn die Truppen im Schritt über sie marschiren. Es ist offenbar

1) Eine andere Methode, die kleinen Schwingungen einer aufgehängten Kette zu discutiren, findet man in einem Aufsatz von Röhrs in Bd. 9 der *Cambridge Transactions*, 1851. Röhrs nimmt an, die Kette sei homogen, symmetrisch um die Verticale und im Anfang nahezu horizontal. In der zweiten Ausgabe der Abhandlung behandelt er die kleinen Schwingungen unter derselben Voraussetzung, aber auf andere Art. Seine Methode ist jedoch nicht annähernd so einfach, wie die unsrige, bei welcher die Näherungswerthe der Schwingungen für eine Kettenlinie aus den genauen für eine Cycloide abgeleitet werden.

möglich, dass die Schrittperiode einer der Schwingungszeiten der Brücke gleich oder nahezu gleich ist. Kommt dies vor, so folgt aus den §§ 338 und 340, dass die Stabilität der Brücke grosser Gefahr ausgesetzt sein kann.

Man beachte, dass die Glieder in dem Ausdruck für $\xi$ das Quadrat von $\lambda$, die in dem Ausdruck für $\eta$ dagegen nur die erste Potenz von $\lambda$ im Nenner haben. Da $\lambda$ gross ist, so kann man als erste Annäherung die Werthe von $\xi$ überhaupt weglassen und annehmen, jedes Element der Kette bewege sich einfach auf und nieder.

§ 608. Beisp. 2. *Eine an zwei Punkten aufgehängte Kette steht unter dem Einfluss der Schwere und hat die Gestalt einer Cycloide. Wenn sie in ihrer eigenen Ebene so von der einen Seite nach der anderen schwingt, dass ihr Mittelpunkt nur eine seitliche und keine irgend merkbare verticale Bewegung hat, die Schwingungszeiten zu finden.*

Wie in dem letzten Beispiel setzen wir $\varphi = \Sigma R \sin \varkappa t + \Sigma R' \cos \varkappa t$, worin $R$ und $R'$ Functionen nur von $\alpha$ sind. Substituirt man in Gleichung (11), so wird $2C = \Sigma h \sin \varkappa t + \Sigma \varkappa \cos \varkappa t$, worin $h$ und $\varkappa$ willkürliche Constanten sind. Die Gleichung für $R$ lautet

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} + 4\left(1 + \frac{b\varkappa^2}{g}\right) R = -h.$$

Setzt man, wie zuvor, $\lambda^2 = 4(1 + b\varkappa^2/g)$, so erhält man $R = -h/\lambda^2 + L \sin(\lambda\alpha + M)$.

Nimmt man daher das Glied in dem Ausdruck für $\varphi$, welches $\sin \varkappa t$ enthält, so ist

$$\frac{\xi}{\sin \varkappa t} = \frac{h' - hb\cos 2\alpha}{\lambda^2} + L\frac{2b}{\lambda^2 - 4}\{\lambda \cos(\lambda\alpha + M)\sin 2\alpha - 2\sin(\lambda\alpha + M)\cos 2\alpha\},$$

worin $h'$ eine durch die Integration eingeführte willkürliche Constante bedeutet. Substituirt man ferner in Gleichung (8), so ergibt sich $h' = -h(b + g/\varkappa^2)$ und auf dieselbe Art

$$\frac{\eta}{\sin \varkappa t} = -\frac{hb}{\lambda^2}(2\alpha + \sin 2\alpha)$$
$$-L\frac{2b}{\lambda^2 - 4}\{\lambda\cos(\lambda\alpha + M)\cos 2\alpha + 2\sin(\lambda\alpha + M)\sin 2\alpha\} - L\frac{2b}{\lambda}\cos(\lambda\alpha + M) + H.$$

Nimmt man an, die beiden Aufhängungspunkte lägen in derselben Horizontalen, so muss für $\alpha = \pm\alpha_0$, $\xi = 0$ und $\eta = 0$ sein. Diese Bedingungen werden erfüllt, wenn $M = \frac{1}{2}\pi$, $H = 0$ genommen wird, denn alsdann wird $\xi$ eine grade und $\eta$ eine ungrade Function von $\alpha$. In diesem Fall ist an dem tiefsten Punkt der Kette $\eta = 0$. Man erhält so zwei Gleichungen zur Ermittelung von $L/h$; setzt man sie gleich, so wird

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,2\alpha_0 - \lambda\,\mathrm{tg}\,\lambda\alpha_0 - \dfrac{\mathrm{tg}\,\lambda\alpha_0}{\cos 2\alpha_0}\dfrac{\lambda^2 - 4}{\lambda}}{2\alpha_0 + \sin 2\alpha_0} = \frac{\lambda\,\mathrm{tg}\,\lambda\alpha_0\,\mathrm{tg}\,2\alpha_0 + 2}{2\cos^2\alpha_0 + \dfrac{4}{\lambda^2 - 4}}.$$

§ 609. Ist $\alpha_0$ klein, so wird der Gleichung annähernd durch $\lambda\alpha_0 = i\pi$ genügt, worin $i$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet. In diesem Fall nehmen die vollständigen Ausdrücke für $\xi$ und $\eta$ die einfache Form an

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \Sigma L\frac{4b}{\lambda^2}(\cos\lambda\alpha_0 - \cos\lambda\alpha - \lambda\alpha\sin\lambda\alpha)\sin\left\{\left(\frac{g}{4b}\right)^{\frac{1}{2}}\lambda t + \varepsilon\right\}\\ \eta &= \Sigma L\frac{4b}{\lambda}\sin\lambda\alpha\sin\left\{\left(\frac{g}{4b}\right)^{\frac{1}{2}}\lambda t + \varepsilon\right\}\end{aligned}\right\}.$$

§ 610. **Beispiele.** Beisp. 1. Vertauscht man die Variabelen $\alpha$, $t$ mit $p$, $q$, wobei

$$p = t + \int \left(\frac{\varrho}{g \cos \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} d\alpha, \quad q = -t + \int \left(\frac{\varrho}{g \cos \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} d\alpha$$

ist, zu zeigen, dass die allgemeine Gleichung (10) der kleinen Schwingungen die Gestalt

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial p\, \partial q} + \frac{\mu^3}{4}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \alpha^2} + 4\mu\right)\varphi' = -\frac{\mu^3}{2} C$$

annimmt, worin $\mu^4 = g \cos \alpha / \varrho$ und $\varphi = \mu \varphi'$ ist.

Man zeige auch, dass der Coefficient von $\varphi'$ eine Function von $p + q$ ist, und dass dabei die Form der Function von dem Gesetz für die Dichtigkeit der Kette abhängt.

Diese Transformation kann von Nutzen sein, weil sich aus § 603 ergibt, dass an den Grenzen einer einzelnen Welle $p$ für die in der einen und $q$ für die in der anderen Richtung fortrückende Welle constant bleibt.

Beisp. 2. Ein Faden befindet sich unter dem Einfluss der Schwere im Gleichgewicht und hat eine solche Gestalt, dass seine auf $\varrho$ und $\alpha$ bezogene Gleichung $\frac{\cos \alpha}{\varrho} = \frac{b^4}{g} \sin^4 (2\alpha + c)$ ist, worin $b$ und $c$ beliebige Constanten sind. Man zeige, dass das Gesetz für seine Dichtigkeit durch $m = w \frac{b^4}{g} \frac{\sin^4 (2\alpha + c)}{\cos^3 \alpha}$ bestimmt wird. Wird eine solche Kette auf symmetrische Art in Bewegung gesetzt, zu beweisen, dass die Gleichung

$$\varphi = b \sin (2\alpha + c)\left\{F\left(t - \frac{\operatorname{cotg} (2\alpha + c)}{2b^2}\right) + f\left(t + \frac{\operatorname{cotg} (2\alpha + c)}{2b^2}\right)\right\}$$

diese Bewegung angibt.

Beisp. 3. Wenn ausser der Schwere an jedem Element der Kette auch noch eine kleine normale Kraft von der Grösse $Fg$ angreift, zu beweisen, dass die Bewegungsgleichung der Kette

$$\frac{\varrho}{g \cos \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} - 4\varphi - 2C = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + 2 \int \frac{F}{\cos \alpha} d\alpha$$

lautet.

Wenn die Kette nahezu horizontal, $\alpha$ also sehr klein und $F = f \sin (at - c\alpha)$ ist, zu beweisen, dass $g(c^2 - 4) - \varrho a^2$ der Nenner des entsprechenden Gliedes in dem Ausdruck für $\varphi$ ist.

Beisp. 4. Eine schwere Kette von der Länge $2l$ hängt an zwei Punkten $A$, $B$, welche in derselben Horizontalen liegen und deren Abstand von $2l$ nicht sehr verschieden ist. Jeder Massenpunkt der Kette wird aus seiner Ruhelage in einer Richtung ein wenig aufgestört, die senkrecht auf der durch $AB$ gehenden Verticalebene steht. Man finde die kleinen Schwingungen der Kette.

Beisp. 5. Ein schwerer Faden hängt an zwei festen Punkten $A$ und $B$, befindet sich im Gleichgewicht und hat dabei die Gestalt einer Kettenlinie, deren Parameter $c$ ist. Der Faden werde Anfangs verschoben und dabei mögen die Aufhängungspunkte $A$, $B$ sich so fortbewegen, dass

$$\varphi = \sigma (1 + \cos 2\alpha) + \sigma' \sin 2\alpha$$

ist, worin $\sigma$ und $\sigma'$ zwei kleine Grössen sind und die übrigen Buchstaben dieselbe Bedeutung, wie in § 604, haben. Wenn der Faden in seiner neuen Lage zur Ruhe gebracht wird, zu beweisen, dass er in diesem Ruhezustand bleibt.

§ 611. Beisp. 1. Ein gleichförmiger Faden in der Gestalt eines Kreises vom Radius $a$ ruht auf einer glatten Ebene und steht unter der Einwirkung einer centralen abstossenden Kraft, die in dem Abstand $r$ durch $ga^n/r^n$ gemessen wird. Man zeige, dass der Faden, der im Anfang in Ruhe ist und die Gestalt

$$r = a + \Sigma a_m \cos m\theta$$

hat, wenn er um ein Geringes verschoben wird, zu einer folgenden Zeit $t$ eine Form annimmt, die durch

$$r = a + \Sigma a_m \cos m\theta \cos m \left\{\frac{g}{a}\frac{m^2+n-2}{m^2+1}\right\}^{\frac{1}{2}} t$$

bestimmt wird, worin $\Sigma$ die Summirung von $m=1$ bis $m=\infty$ angibt. Man untersuche das Resultat, wenn (1) $m=1$ und $n=1$ und (2) $n=3$ ist.

[Math. Tripos, 1884.]

Beisp. 2. Ein Faden, der die Gestalt einer logarithmischen Spirale mit dem gleichen Winkel $\alpha$ hat, befindet sich unter der Wirkung einer centralen abstossenden in dem Pol liegenden Kraft im Gleichgewicht, wobei die an einem Element $ds$ in dem Abstand $r_1$ angreifende Kraft $f\,ds/r_1{}^2$ ist. Damit die Bewegungsgleichungen, wenn der Faden aus seiner Gleichgewichtslage ein wenig aufgestört wird, eine lineare Form mit constanten Coefficienten annehmen, wollen wir voraussetzen, er sei mit nicht angezogener Materie derart behaftet, dass die Masse eines Elementes $ds$, $a\,ds/r^3$ wird, worin $r$ den Abstand des Elementes vom Pol im Gleichgewichtszustand angibt. Der Massenpunkt, dessen Gleichgewichtscoordinaten $(r, \theta)$ sind, möge zur Zeit $t$ die Lage $(r_1, \theta_1)$ einnehmen, wobei $r_1 = r(1+\xi)$, $\theta_1 = \theta + \eta$ ist, und die Spannung sei $T_1 = T(1+V)$, unter $T$ die Spannung für das Gleichgewicht verstanden. Man zeige, dass die Bewegungsgleichungen lauten

$$\xi + \sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial\xi}{\partial\theta} + \sin^2\alpha\frac{\partial\eta}{\partial\theta} = 0,$$

$$\frac{a}{f}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\xi + 2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial\xi}{\partial\theta} + \sin^2\alpha\frac{\partial^2\xi}{\partial\theta^2} - V + \sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial V}{\partial\theta},$$

$$\frac{a}{f}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = 2\sin^2\alpha\frac{\partial\xi}{\partial\theta} + \sin^2\alpha\frac{\partial^2\eta}{\partial\theta^2} + \sin^2\alpha\frac{\partial V}{\partial\theta}.$$

Daraus leite man ab, dass die Bewegung durch

$$\xi = Am\sin^2\alpha\sin m(vt-\theta),$$
$$-\eta = A\{\cos m(vt-\theta) + m\sin\alpha\cos\alpha\sin m(vt-\theta)\}$$

dargestellt wird, worin $v^2 = \dfrac{\cos^2\alpha + m^2\sin^2\alpha}{1+m^2\sin^2\alpha}\cdot\dfrac{f\sin^2\alpha}{a}$ ist.

Wenn der Faden eine endliche Länge hat und seine Enden $A$ und $B$ so im Raum auf der Spirale festliegen, dass der Winkel $AOB = \beta$ ist und wenn die Schwingungsperiode $2\pi/p$ beträgt, zu beweisen, dass der Winkel $\beta$ eine Wurzel der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{h\beta} - e^{-h\beta}\right)\sin k\beta\,\frac{k^2-h^2}{hk} = 2 - \left(e^{h\beta} + e^{-h\beta}\right)\cos k\beta$$

sein muss, worin $h^2$ und $-k^2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 f\sin^4\alpha - x\sin^2\alpha(f\cos^2\alpha - ap^2) - ap^2 = 0$$

sind.

Beisp. 3. An einem nicht homogenen Faden $OA$ von der Länge $l$, dessen lineare Dichtigkeit in einem Punkt, der von $O$ um $x$ absteht, $Da/(b^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, wird an dem Ende $A$ ein materieller Punkt von der Masse $M$ befestigt, wobei $Ml = Da(b^2-l^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, $a$ und $b$ zwei Constanten bedeuten und $l$ kleiner als $b$ ist. Er wird auf eine glatte horizontale Ebene gelegt und mit der

Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um sein Ende $O$ als festen Punkt so in Rotation gesetzt, dass jeder Punkt einen Kreis beschreibt, dessen Centrum $O$ ist. Wenn er ein wenig gestört wird, zu zeigen, dass eine mögliche transversale Schwingung durch

$$\eta = A \sin \omega \sqrt{(q^2 - 1)}\, t \cdot \sin (q \operatorname{arc} \sin x/b + Q)$$

gegeben ist, worin $Q = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} Mq/Da - q \operatorname{arc} \sin l/b$ und $\eta$ der Abstand eines Elementes von der gleichförmig rotirenden Linie $OA$ ist.

## Die kleinen Schwingungen eines gespannten Fadens.

§ 612. *Die Enden eines elastischen Fadens, dessen Gewicht man vernachlässigen kann und dessen unausgedehnte Länge $l$ ist, sind an zwei Punkten befestigt, die den Abstand $l'$ voneinander haben. Der Faden wird so gestört, dass sich jeder Massenpunkt in der Längenrichtung des Fadens bewegt; man soll die Bewegungsgleichungen finden.*

$A$ sei der eine der festen Punkte und $AB$ der Faden, wenn er nicht ausgedehnt ist und in eine Gerade gebracht wird. Das Ende $B$ möge nun angezogen werden, bis es den zweiten festen Punkt $B'$ erreicht. $PQ$ sei ein Element des nicht gespannten Fadens, $P'Q'$ dasselbe Element zur Zeit $t$, $AP = x$ und die Abscisse $AP' = x'$. Ferner seien $T$ und $T + dT$ die Spannungen bei $P'$ und $Q'$, $M$ die Masse des ganzen Fadens, $m$ die der Längeneinheit des *nicht ausgedehnten* Fadens. Da die Masse eines Elementes $mdx$ beträgt, so ist die an ihm angreifende Effectivkraft $(mdx)(\partial^2 x'/\partial t^2)$. Der Unterschied der Spannungen an den beiden Enden des Elementes ist $dT$. Setzt man die beiden Ausdrücke gleich, so erhält man die Bewegungsgleichung

$$m \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Versteht man unter $E$ den Elasticitätsmodul, so ist nach dem Hooke'schen Gesetz

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 + \frac{T}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Durch Elimination von $T$ wird

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = \frac{E}{m} \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Man beachte, dass diese Gleichungen und Resultate, wenn man, wie es gewöhnlich geschieht, voraussetzt, das Hooke'sche Gesetz sei richtig, nicht lediglich Annäherungen sondern durchaus genau sind.

Es ist oft vortheilhafter, irgend einen speciellen Zustand des Fadens als normale Bezugslage zu wählen und die thatsächliche Lage eines Massenpunktes zur Zeit $t$ durch seine Verschiebung aus dieser Normallage auszudrücken. Wenn z. B. der unausgedehnte Zustand $AB$ des Fadens als der normale gewählt wird, so setzt man $x' = x + \xi$, versteht also unter $\xi$ die Verschiebung des Punktes, dessen Abscisse in

unausgedehntem Zustand $x$ ist. Die Bewegungsgleichung erhält dann die Gestalt

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wenn man dagegen die Gleichgewichtslage des zwischen den festen Punkten $A$, $B'$ ausgedehnten Fadens zur normalen Bezugslage nimmt, so fällt die Bewegungsgleichung etwas anders aus. Ist $x_1$ die Abscisse der Gleichgewichtslage desjenigen Punktes des Fadens, der sich zur Zeit $t$ in $P'$ befindet, so ist $x_1/l' = x/l$. Setzt man $x' = x_1 + \xi_1$ und substituirt für $x$ und $x'$ in (3), so wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \frac{E}{m} \left(\frac{l'}{l}\right)^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wir haben hier angenommen, die Bewegung eines jeden Massenpunktes in irgend einem Querschnitt sei dieselbe. Dies kann man für dünne Stäbe und Fäden als nahezu richtig ansehen. Wir verweisen dabei auf die Untersuchungen von Chree über die Längsschwingungen eines geraden Stabes. Er nahm an, der Körper habe eine beliebige Dicke, und zeigte, indem er die Bewegungsgleichungen eines elastischen festen Körpers zu Grunde legte, dass bei Beibehaltung der Glieder, welche von dem Quadrat des Verhältnisses der Dicke zu der Länge des Stabes abhängen, die erhaltenen Resultate mit der Fundamentalgleichung (3) übereinstimmen. *Quarterly Journal*, XXI, 1886; XXIII, 1889; XXIV, 1890.

Setzt man $E = ma^2$, so erhält die typische Gleichung (4) die Gestalt

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Man kann sie mit Hülfe des Operationscalculs oder einer der anderen Methoden auflösen, die sich auf Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten anwenden lassen. Man kann auch eine einfache Transformation der unabhängigen Variabelen vornehmen. Setzt man z. B. $at - x = p$, $at + x = q$, so wird

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right) a\xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(-\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right) \xi$$

und die Gleichung ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)^2 \xi = \left(-\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)^2 \xi,$$

also

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial p \, \partial q} = 0 \quad \text{und daher} \quad \xi = f(p) + F(q)$$

und wenn man die Werthe von $p$ und $q$ wieder einsetzt,

$$\xi = f(at - x) + F(at + x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

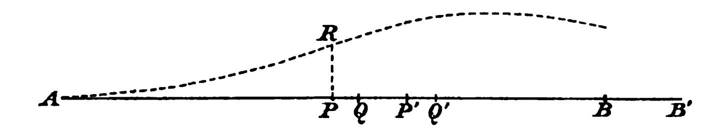
Manchmal ist es von Vortheil, zu abhängigen Variabeln die Geschwindigkeit und die Spannung eines Elementes des Fadens zu nehmen. Schreibt man $v = \partial\xi/\partial t$, $s = \partial\xi/\partial x$, so findet man

$$\left.\begin{aligned} v &= af'(at - x) + aF'(at + x) \\ s &= -f'(at - x) + F'(at + x) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

wobei die Spannung $T = ma^2 s$ ist. Der Differentialquotient $s$ wird gewöhnlich *die Dilatation* genannt und stellt die Ausdehnung eines Elementes bei $P$ für die Längeneinheit dar.

§ 613. **Die beiden Wellen.** Aus der Gleichung (6) ergibt sich, dass die allgemeinste Bewegung des Fadens durch Uebereinanderlagerung der durch $X = f(at - x)$ und $X' = F(at + x)$ bestimmten Bewegungen gefunden wird, wobei $\xi = X + X'$ ist. Wir wollen jede für sich betrachten.

In jedem Punkt $P$ des nicht ausgedehnten Fadens ziehe man die Ordinate $PR$, welche der Längsverschiebung $X$ von $P$ zu der ge-




gebenen Zeit $t$ gleich ist. Der auf diese Art bestimmte geometrische Ort von $R$ macht die thatsächliche Verschiebung eines jeden Punktes des Fadens zur Zeit $t$ sichtbar. Aendert sich $t$, so ändert sich auch dieser Ort und richtet sich nach der veränderlichen Bewegung des Fadens. Würde der Faden seitliche Schwingungen ausführen, so wäre diese Darstellung überflüssig, weil der verschobene Faden selbst den Ort für $R$ bilden würde.

Ein Punkt $C$ gehe von irgend einer Lage aus, rücke längs der Axe $AB$ fort und dabei sei, wenn $x$ seine Abscisse bezeichnet, $at - x$ constant und gleich $c$. Die Geschwindigkeit von $C$ ist dann gleichförmig und gleich $a$. Da die Verschiebung des in irgend einem Augenblick mit $C$ zusammenfallenden Punktes des Fadens gleich $f(c)$ ist, so bleibt die Verschiebung von $C$ immer die nämliche. Fällt daher $C$ beim Beginn seiner Bewegung mit dem Fusspunkt einer Ordinate von gegebener Grösse zusammen, so bleibt es stets in dem Fusspunkt einer Ordinate von derselben Grösse. Man kann statt dessen auch sagen, dass jede Ordinate des Ortes von $R$ sich beständig in positiver Richtung mit einer Geschwindigkeit, welche derjenigen von $C$ gleich ist, fortbewegt, ohne dass sich ihre Grösse ändert. Der Ort rückt auf der Axe fort, wie eine Welle auf der Oberfläche des Wassers.

Daraus folgt nun, *dass die Gleichung $X = f(at - x)$ eine wellenähnliche Bewegung darstellt, welche in positiver Richtung mit der gleichförmigen Geschwindigkeit a fortrückt, ohne ihre Gestalt zu ändern.* Genau ebenso stellt die Gleichung $X' = f(at + x)$ eine Wellenbewegung dar, welche sich mit der Geschwindigkeit $-a$ fortpflanzt. Sie bewegt sich in der negativen Richtung der Axe.

In dem Fall des Fadens ist die Geschwindigkeit einer jeden der beiden Wellen, wenn sie auf den unausgedehnten Faden als Normal-

zustand bezogen wird, $(E/m)^{\frac{1}{2}}$; für die Gleichgewichtslage des Fadens dagegen als normale Lage $(E/m)^{\frac{1}{2}} \cdot (l'/l))$. Man kann kurz sagen, die Geschwindigkeit sei derart, *dass die Zeit des Durchlaufens der Länge $l$ des unausgedehnten Fadens oder der Länge $l'$ des ausgedehnten Fadens $l(m/E)^{\frac{1}{2}}$ ist. Man beachte, dass diese Zeit weder von der Beschaffenheit der Störung, noch von der Spannung des Fadens abhängt.*

Jede der beiden Wellen, in welche die Bewegung zerlegt wurde, lässt sich weiter zerlegen, indem man die Function in einer Reihe von Sinussen und Cosinussen entwickelt. Diese Entwickelung sei

$$f(at - x) = A_1 \sin\{n_1(at - x) + \alpha_1\} + A_2 \sin\{n_2(at - x) + \alpha_2\} + \text{etc.}$$

Nimmt man irgend einen Term z. B. $X_n = A \sin\{n(at - x) + \alpha\}$, so nennt man die durch $X_n$ dargestellte Bewegung *eine einfache Welle* oder *eine harmonische Welle.* Der Coefficient $A$ drückt die Maximalausdehnung oder *die Amplitude* der Schwingung aus. *Die Periode* der Schwingung eines Massenpunktes ist $2\pi/na$; der reciproke Werth der Periode heisst ihre *Frequenz.* Der letzte Ausdruck rührt von Lord Rayleigh her. Zeichnet man die Curve auf, die zur Abscisse $x$ und zur Ordinate $X_n$ hat und betrachtet dabei $t$ als constant, so erkennt man, dass die Theile der Curve, welche zwischen den durch $x$, $x \pm 2\pi/n$, $x \pm 4\pi/n$, etc. gegebenen Ordinaten liegen, einander ähnlich und gleich sind. Mit andern Worten, die Werthe der Ordinaten wiederholen sich, wenn $x$ um $2\pi/n$ zunimmt. *Die Grösse $2\pi/n$ heisst daher die Länge der Welle.* Daraus folgt, dass die Periode und die Länge derjenigen Wellen am grössten ist, für welche $n$ den kleinsten Werth hat. Von zwei Schwingungen mit ungleicher Periode heisst diejenige mit der kürzeren Periode *die steilere,* die mit der längeren *die flachere.*

§ 614. *Lösung von d'Alembert. Ein endlicher Theil $EOF = 2c$ eines langen Fadens wird Anfangs so gestört, dass die Längsgeschwindigkeit $v$ und die Dilatation $s$ an einem Punkt im Abstand $x$ von $O$ durch $v_0 = \varphi(x)$, $s_0 = \psi(x)$ gegeben ist; dabei bleibt der Rest des Fadens auf jeder Seite von $EF$ ungestört. Man soll die Grösse und Form der beiden resultirenden Wellen finden.*

Man hat

$$\xi = f(at - x) + F(at + x).$$

Zur Bestimmung von $f$ und $F$ sind zwei Gruppen von Bedingungen gegeben.

(1) Ist $t = 0$, so ist für alle Werthe von $x$ mit Ausnahme derjenigen, die zwischen $x = \pm c$ liegen, sowohl $v = 0$ als $s = 0$.

(2) Ist $t = 0$, so ist für alle Werthe von $x$, die zwischen $x = \pm c$ liegen, $v = \varphi(x)$ und $s = \psi(x)$.

Aus der ersten Gruppe ergibt sich nach (7)

$$af'(-x) + aF'(x) = 0, \quad -f'(-x) + F'(x) = 0.$$

Daraus folgt, dass für alle Werthe von $x$, die *nicht* zwischen $\pm c$ liegen, $f'(-x) = 0$ und $F'(x) = 0$ ist. Aus der zweiten Gruppe von Bedingungen erhält man

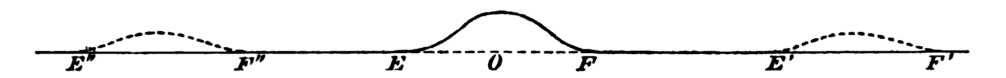
$$af'(-x) + aF'(x) = \varphi(x), \quad -f'(-x) + F'(x) = \psi(x).$$

Folglich ist

$$af'(-x) = \tfrac{1}{2}\{\varphi(x) - a\psi(x)\}, \quad aF'(x) = \tfrac{1}{2}\{\varphi(x) + a\psi(x)\}$$

für alle Werthe von $x$, die zwischen $\pm c$ liegen.

Da $x$ irgend einen willkürlichen Abstand bezeichnet, so bestimmen diese Gleichungen die Functionen $f'(z)$ und $F'(z)$ für alle reellen Werthe




von $z$ vollständig. Schreibt man $-at + x$ anstatt $x$, so ist $f'(at - x)$ Null, wenn $at - x$ nicht zwischen $\pm c$ liegt. Die durch diesen Term dargestellte Störung beschränkt sich daher auf den mit $E'F'$ bezeichneten Theil des Fadens, wobei die Abscissen $x_1$, $x_2$ von $E'$, $F'$ zur Zeit $t$ durch

$$at - x_1 = -c \quad \text{bez.} \quad at - x_2 = +c$$

gegeben sind. Diese Werthe von $x_1$, $x_2$ zeigen, dass $E'F'$ auf der positiven Seite der ursprünglichen Störung $EF$ liegt.

Ebenso ergibt sich, wenn man $at + x$ anstatt $x$ setzt, dass $F'(at + x)$ Null ist, wenn $at + x$ nicht zwischen $\pm c$ liegt. Die durch diesen Term dargestellte Störung beschränkt sich also auf den Theil $E''F''$ des Fadens, wobei die Abscissen $x_3$, $x_4$ von $E''$, $F''$ durch $at + x_3 = -c$, $at + x_4 = +c$ gegeben sind. Man sieht aus diesen Werthen von $x_3$, $x_4$, dass $E''F''$ auf der negativen Seite der ursprünglichen Störung liegt.

Die Werthe von $f(z)$ und $F(z)$ ergeben sich durch Integration von $f'(z)$ und $F'(z)$. Die beiden Integrationsconstanten reduciren sich auf nur eine in dem Ausdruck für $\xi$ und diese wird durch den bekannten Werth von $\xi$ an einem Punkt der Anfangsstörung von $EF$ bestimmt. An jedem Discontinuitätspunkt ändern sich die Integrationsconstanten, ohne dass dabei ein plötzlicher Wechsel in dem Werth von $\xi$ eintritt.

§ 615. *Die Bedingungen für das Vorkommen einer einzigen Welle.* Wenn in Folge der Anfangsstörung $v_0 = -as_0$, d. h. $\varphi(x) = -a\psi(x)$ wird, so ist die Welle $F'(at + x) = 0$; die Störung pflanzt sich daher nur in positiver Richtung fort und wird zur Zeit $t$ durch

$$v = -as = f'(at - x)$$

dargestellt. Ist dagegen die Anfangsstörung von solcher Beschaffenheit, dass $v_0 = as_0$, so rückt die Störung nur in negativer Richtung fort und wird durch $v = as = F'(at + x)$ dargestellt.

§ 616. *Ein elastischer Faden, der so ausgespannt ist, wie in § 612 beschrieben wurde, wird nach einem beliebigen Gesetz aber nur wenig gestört; man soll die Bewegungsgleichungen finden.*

Wir behalten dieselbe Bezeichnung, wie zuvor, bei und $(x', y', z')$ seien die Coordinaten von $P'$. Genau auf dieselbe Art, wie in § 574 lassen sich die Bewegungsgleichungen aufstellen. Da die Masse eines Elementes $m dx$ statt $m ds$ ist, so lauten sie

$$m \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial x'}{\partial s'}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$m \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial y'}{\partial s'}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$m \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial z'}{\partial s'}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

worin $ds'$ die Länge des Elementes $P'Q'$ bezeichnet. Ist $E$ der Elasticitätsmodul, so haben wir nach dem Hooke'schen Gesetz

$$\frac{\partial s'}{\partial x} = 1 + \frac{T}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Da die Störung sehr gering ist, so sind $\partial y'/\partial s'$, $\partial z'/\partial s'$ sehr klein und $\partial x'/\partial s'$ nahezu der Einheit gleich. Die erste Gleichung nimmt mithin die Gestalt an

$$m \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und die Hooke'sche Gleichung

$$\frac{\partial x'}{\partial x^2} = 1 + \frac{T}{E};$$

es sind dies dieselben Gleichungen, wie die Gl. (1) und (2) in § 612; so dass also bei nur geringer Störung die Längsbewegung von der seitlichen unabhängig ist.

In der zweiten Gleichung kann man $T$ als constant ansehen, da seine kleinen Variationen mit der kleinen Grösse $\partial y'/\partial s'$ multiplicirt werden. Man kann also $T = T_0$ setzen, worin $T_0 = E(l' - l)/l$ ist. Daraus folgt nach Gleichung (4) $\partial s'/\partial x = l'/l$ und mithin $\partial s' = \partial x_1$, wobei wie früher $x_1/l' = x/l$ ist. Die Bewegungsgleichung wird daher

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} = \frac{T_0 l}{m l'} \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} = \frac{T_0 l'}{m l} \frac{\partial^2 y'}{\partial x_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

je nachdem der unausgedehnte oder der ausgedehnte Faden als Normalzustand zu Grunde gelegt wird.

Die dritte Gleichung wird ebenso behandelt.

*Die Geschwindigkeit einer seitlichen Schwingung, in Einheiten der Länge des unausgedehnten Fadens ausgedrückt, beträgt also* $(T_0 l/m l')^{\frac{1}{2}}$. *Die Zeit, welche die Schwingung nöthig hat, um die Länge* $l$ *des unausgedehnten Fadens oder* $l'$ *des ausgedehnten zurückzulegen, ist* $(m l l'/T_0)^{\frac{1}{2}}$. *Diese Geschwindigkeit ist zwar von der Beschaffenheit der Störung unabhängig, aber nicht von der Spannung des Fadens.*

Wenn der Faden nur wenig elastisch ist, so kann man in der letzten Formel $l' = l$ setzen. Man kommt dann zu den Resultaten, die aus der Lehre vom Schall bekannt sind.

§ 617. Wir machen auf einen Unterschied zwischen den Bewegungsgleichungen für Längs- und seitliche Schwingungen aufmerksam. Bei den ersteren wurden, wenn überhaupt keine seitlichen Schwingungen vorkamen, keine Annäherungen gemacht, so dass also, wie schon gesagt wurde, die Gleichungen (4) und (6) in § 612 für grosse wie kleine Schwingungen gelten. Bei den letzteren dagegen wurde, auch wenn die Längsschwingungen unmerklich sind, angenommen, $\partial s'/\partial x$ und $\partial x'/\partial x$ seien so nahezu einander gleich, dass man das eine für das andere setzen kann. Bis auf kleine Grössen zweiter Ordnung ist

$$\frac{\partial s'}{\partial x} = \frac{\partial x_1}{\partial x}\left\{1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y'}{\partial x_1}\right)^2\right\}.$$

Wenn der Faden ohne merkliche Längsschwingungen oscillirt, so ist $\xi_1$ eine kleine Grösse zweiter Ordnung und da die Substitution für $\partial s'/\partial x$ auf der rechten Seite von (2) gemacht wird, welche bereits die kleine Grösse $\partial y'/\partial s'$ enthält, so ist die Differentialgleichung (6) bis auf die dritten Potenzen kleiner Grössen genau. Wenn dagegen der Faden gleichzeitig mit Längs- wie mit seitlichen Oscillationen schwingt, so ist $\xi_1$ eine kleine Grösse erster Ordnung; *die seitlichen und Längsschwingungen sind also nur dann unabhängig von einander, wenn man die Quadrate kleiner Grössen vernachlässigen kann.*

§ 618. Es gibt zwei Arten, die Bewegungsgleichungen auf wirklich vorkommende Fälle anzuwenden. Wir wollen zuerst, um dies klar zu machen, ein einfaches Beispiel nach beiden Methoden auflösen und dann einige Bemerkungen über die Resultate machen.

*Ein elastischer Faden, welcher die unausgedehnte Länge* $l$ *hat, ruht auf einem vollkommen glatten Tisch; seine Enden werden an zwei Punkten* $A, B'$ *befestigt, deren Abstand* $l'$ *grösser als* $l$ *ist. Das Ende* $B'$ *wird plötzlich losgelassen; man finde die Bewegung.*

**Die Auflösung mittelst unstetiger Functionen.** Behält man die Bezeichnung in § 612 bei, so wird die Bewegung durch die Gleichung

$$\xi = f(at - x) + F(at + x)$$

dargestellt, worin $\xi$ die Verschiebung des Massenpunktes bezeichnet, dessen Abscisse in dem unausgedehnten Faden $x$ ist. Die Bedingungen zur Bestimmung von $f$ und $F$ sind die folgenden:

1. Wenn $x = 0$, ist $\xi = 0$ für alle Werthe von $t$.
2. Wenn $x = l$, ist $T = 0$ und daher $\partial \xi/\partial x = 0$ für alle Werthe von $t$.
3. Wenn $t = 0$, ist $\xi = rx$ von $x = 0$ bis $x = l$, wobei $l' = (r + 1) l$ ist.
4. Wenn $t = 0$, ist $\partial \xi/\partial t = 0$ von $x = 0$ bis $x = l$.

Aus der ersten Bedingung folgt, dass die Functionen $F$ und $f$ gleich sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben. Aus der zweiten Bedingung ergibt sich $f'(at + l) = -f'(at - l)$, so dass sich also die Werthe der Function $f'$ mit ent-

gegengesetzten Vorzeichen wiederholen, wenn die Variabele um $2l$ vergrössert wird. Würden wir nun die Werthe von $f'(z)$ für alle Werthe des $z$ von $z = z_0$ bis $z = z_0 + 2l$ kennen, worin $z_0$ einen beliebigen Werth hat, so wäre die Form der Function vollständig bekannt. Die dritte Bedingung liefert nun $f(-x) - f(x) = rx$ und die vierte $f'(-x) = f'(x)$ von $x = 0$ bis $x = l$. Daher ist $f'(x) = -\frac{1}{2}r$ von $x = -l$ bis $x = l$. Daraus folgt, dass $f'(z) = -\frac{1}{2}r$ ist von $z = -l$ bis $z = l$, $f'(z) = \frac{1}{2}r$ von $z = l$ bis $z = 3l$ u. s. f., wobei das Zeichen jedesmal gewechselt wird, wenn die Variable durch die Werthe $l$, $3l$, $5l$, etc. geht. Wir wollen nun die Bewegung eines Punktes $P$ des Fadens betrachten, dessen unausgedehnte Abscisse $x$ ist. Seine Geschwindigkeit wird durch die Formel

$$v/a = f'(at - x) - f'(at + x)$$

bestimmt. Da $x < l$ ist, so hat man $v/a = -\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = 0$. Der Massenpunkt beginnt daher erst dann sich zu bewegen, wenn $at + x = l$ ist. Die zweite Function wechselt nun ihr Zeichen, und man hat $v/a = -\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}r = -r$. Der Massenpunkt fährt fort, sich mit dieser Geschwindigkeit zu bewegen, bis $at - x = l$ wird; alsdann wechselt die erste Function das Zeichen u. s. f. $AB$ sei der unausgedehnte Faden und ein Punkt $R$ möge von $B$ ausgehen und sich beständig längs des Fadens und wieder zurück mit der Geschwindigkeit $a$ bewegen. Man erkennt dann leicht, dass sich $P$ in Ruhe befindet, solange $R$ sich auf derselben Seite von $P$ befindet, wie das lose Ende des Fadens; befindet sich dagegen $R$ auf derselben Seite von $P$, wie das feste Ende des Fadens, so bewegt sich $P$ abwechselnd mit der Geschwindigkeit $\pm ra$. Der allgemeine Charakter der Bewegung ist daher: nachdem das Gleichgewicht des Fadens bei $B$ gestört worden ist, pflanzt sich eine Welle von der Länge $4l$ längs des Fadens fort und der Punkt $P$ beginnt seine Bewegung erst, wenn ihn die Welle erreicht; die Welle wird bei $A$ zurückgeworfen und kehrt zurück.

*Graphische Darstellung.* Man kann die Functionen $f$ und $F$ in dieser Lösung durch discontinuirliche Curven ersetzen und die Werthe von $v$ und $T$ durch Addition der Ordinaten erhalten.

Wir wollen den Faden $AB$ nach beiden Seiten bis in die Unendlichkeit verlängern und den verlängerten Theilen solche Anfangsverschiebungen geben, dass nach der Zerlegung der Bewegung in die beiden Wellen $X$, $X'$, die in entgegengesetzten Richtungen fortrücken, die Summe der Verschiebungen bei $A$ in Folge einer jeden Welle stets Null und die Summe der Spannungen bei $B$ ebenfalls Null ist. Die Bewegung des begrenzten Theiles $AB$ ist alsdann genau dieselbe, wie wenn $A$ festläge und $B$ frei wäre.

Wenn der Faden von der Ruhe ausgeht, so ist der Werth von $\partial\xi/\partial t$ Anfangs Null und wir können

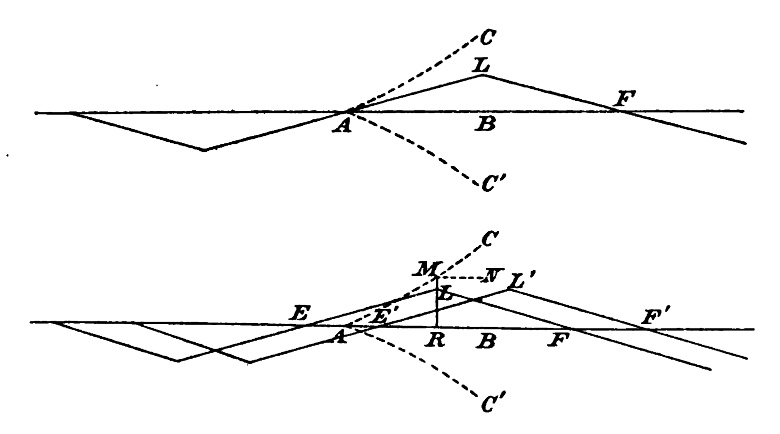
$$\xi = f(x - at) + f(x + at) \quad \text{. . . . . . . . . (A)}$$

setzen, so dass also die beiden fortrückenden Wellen gleich sind. Man zeichne nun zwei zusammenfallende Curven auf, die sich über den unendlich grossen Faden erstrecken und deren Ordinate $\xi$ die halbe anfängliche Verschiebung ist. Alsdann bewege man die eine von ihnen nach rechts, die andere nach links um eine Strecke gleich $at$. *Die Summe der Ordinaten dieser beiden Curven, welche einem Punkt $P$ des unausgedehnten Fadens entsprechen, ist die Verschiebung zur Zeit $t$. Die Spannung bei $P$ ist dieser Summe und die Geschwindigkeit bei $P$ der Differenz der Tangenten der Winkel proportional, welche die Tangenten an die Curven mit der $x$-Axe machen.*

Zwischen $A$ und $B$ ist $f(x) = \frac{1}{2}rx$ gegeben. Auf der linken Seite von $A$ müssen die Ordinaten der Function $f(x)$ denen auf der rechten Seite von $A$ gleich

sein aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, so dass die Summe der Ordinaten, wenn die fortrückenden Curven sich in $A$ kreuzen, Null ist. Auf der rechten Seite von $B$ müssen die Ordinaten denen auf der linken gleich aber so angeordnet sein, dass $\partial\xi/\partial x$ d. h. die Spannungen entgegengesetzte Vorzeichen haben. Die Curve $\xi = f(x)$ muss daher die Gestalt wie in der oberen Figur haben.

Nach einer Zeit $t$, die kleiner als $l/a$ ist, haben sich die beiden zusammenfallenden Curven getrennt und die beiden in der unteren Figur dargestellten




Formen angenommen. Die durch Addition der beiden Ordinaten erhaltene punktirte Linie $AMN$ stellt den Zustand des Fadens zur Zeit $t$ dar. Der Theil $AR$ des Fadens, welcher der Projection von $AM$ auf ihn gleich ist, bleibt in derselben Lage, wie zuvor, mit derselben Spannung und ohne Geschwindigkeit. Der übrige Theil $RB$, der $MN$ gleich ist, hat keine Spannung, weil die Tangente an $MN$ parallel zu $AB$ ist. Er nimmt ferner mit der Geschwindigkeit $ra$ ab, weil dies der Unterschied zwischen den Tangenten der Winkel ist, die $LF$ und $L'E'$ mit $AB$ machen.

Zur Zeit $t = l/a$ hat $M$ den Punkt $A$ erreicht und fällt $MN$ mit $AB$ zusammen. Nachher rückt der Punkt $M$ längs der Geraden $AC'$ weiter, wobei $MN$ stets parallel zu $AB$ bleibt. Zur Zeit $t = 2l/a$ wird der Zustand des Fadens durch $AC'$ dargestellt; jedes Element wird daher gleichmässig zusammengedrückt und hat keine Geschwindigkeit.

Der Fall, in welchem der Faden keine Anfangsspannung hat, aber nicht vom Zustand der Ruhe ausgeht, lässt sich in ähnlicher Art behandeln; dabei ist das positive Zeichen zwischen den Functionen in der Gleichung (A) durch das negative zu ersetzen.

§ 619. **Die Auflösung mittelst trigonometrischer Reihen.** Man nehme wie zuvor die Gleichung

$$\xi = f(at - x) + F(at + x)$$

und entwickle jede Function nach Vielfachen von Sinussen und Cosinussen. Man erhält

$$\xi = \Sigma[A \sin\{n(at - x) + \alpha\} + B \sin\{n(at + x) + \beta\}],$$

worin $\Sigma$ die Summirung für alle Werthe von $n$ angibt und $A$, $B$, $\alpha$ und $\beta$ Constanten bezeichnen, die in jedem Term verschieden sind und sich passender Weise als Functionen von $n$ ansehen lassen.

Da es sich um eine schwingende Bewegung handelt, so kann man annehmen, alle Werthe von $n$ seien reell und offenbar auch, ohne der allgemeinen Gültigkeit

Eintrag zu thun, sie seien positiv. Wir haben nicht vor, die Umstände zu besprechen, unter welchen diese Annahmen correct sind. Darüber findet man das Nähere bei dem Fourier'schen Theorem. Hier können wir die Annahmen als durch das Resultat gerechtfertigt betrachten, weil wir auf diese Art allen Daten des Problems genügen können.

Die vier Bedingungen des Problems setzen uns in den Stand, die Constanten zu bestimmen. Aus der ersten ergibt sich $\beta = \alpha + k\pi$, $B = (-1)^{k+1} A$, worin $k$ irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Durch Entwickelung findet man leicht, dass man $\xi$ die Gestalt

$$\xi = \Sigma (C \sin nat + D \cos nat) \sin nx$$

geben kann, worin $C$ und $D$ als Functionen von $n$ zu betrachten sind. Aus der zweiten Bedingung folgt $\cos nl = 0$, daher $nl = \frac{1}{2}(2i+1)\pi$, worin $i$ irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Die Perioden der Hauptschwingungen des Fadens (§ 53) sind daher bei richtigen Anfangsstörungen, wobei ein Ende fest und das andere lose ist, in der Form $4l/(2i+1)a$ enthalten.

Die Anfangsstörung wird durch die dritte und vierte Bedingung gegeben. Man hat

$$\Sigma D \sin nx = rx, \quad \Sigma Cn \sin nx = 0.$$

Um den Werth von $D$ in irgend einem Term zu finden, multiplicire man die erste Gleichung mit dem Coefficienten von $D$ in diesem Term und integrire über die ganze Länge des Fadens d. h. von $x = 0$ bis $x = l$; § 398. Man findet

$$D \frac{l}{2} = r \int_0^l x \sin nx \, dx = r \frac{\sin nl}{n^2}.$$

Die übrigen Terme verschwinden sämmtlich, da $\int_0^l \sin nx \sin n'x \, dx = 0$ ist, wenn $n$ und $n'$ verschiedene Zahlenwerthe haben. Dies ergibt sich auch aus der Regel in § 398.

Behandelt man die zweite Gleichung auf dieselbe Art, so erhält man $C = 0$. Die Bewegung wird mithin durch

$$\xi = \sum \frac{2r}{l} \frac{\sin nl}{n^2} \cos nat \sin nx$$

bestimmt. Setzt man nacheinander für $i$ seine Werthe 1, 2, 3, etc. so wird die Gleichung, ausführlich geschrieben,

$$\xi = \frac{8rl}{\pi^2} \left\{ \cos \frac{\pi at}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l} - \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi at}{2l} \sin \frac{3\pi x}{2l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi at}{2l} \sin \frac{5\pi ax}{2l} - \text{etc.} \right\}.$$

Diese Reihe für $\xi$ ist convergent und die Annäherung an die Bewegung wird bereits gross, wenn man nur die ersten Glieder nimmt. Wir wollen z. B. alle mit Ausnahme der beiden ersten weglassen und zur Vergleichung mit dem bei der ersten Lösung erhaltenen Resultat $at = \frac{1}{2} l$ setzen. Zeichnet man nun die Curve auf, deren Ordinate $-\partial \xi / \partial t$ und deren Abscisse $x$ ist, so ergibt sich, dass sie der Curve $\xi = 0$ für kleine Werthe von $x$ gleicht, dann mit einem Inflexionspunkt in die Höhe steigt und bei der Annäherung des $x$ an $l$ nahezu horizontal wird. Dies stimmt sehr wohl mit dem in § 618 gefundenen Resultat überein.

§ 620. Untersucht man diese Lösungen, so zeigt sich, dass zwei Arten von Bedingungen zur Bestimmung der willkürlichen Functionen vorhanden sind. (1) Die Bedingungen an den beiden Enden des Fadens. Sie haben das Besondere,

dass sie für alle Werthe von $t$ bestehen. (2) Die Anfangsbedingungen der Bewegung. Sie haben die Eigenschaft, dass sie *nicht* für alle Werthe von $x$ gelten, sondern nur für die Werthe, welche in einem gewissen durch die Länge des Fadens begrenzten Umkreis liegen. Die erste Gruppe wird benutzt, um die Art zu bestimmen, auf welche sich die Werthe der Functionen so wiederholen, dass sie für alle die Werthe der Variabelen, welche in dem Problem vorkommen, bekannt sind, wenn man sie in einem gewissen begrenzten Umkreis kennt. Die zweite Gruppe dient zur Bestimmung ihrer Werthe in diesem begrenzten Umkreis.

Bei der zweiten Art der Lösung werden die willkürlichen Functionen durch eine convergente Reihe harmonischer Ausdrücke ersetzt. Nimmt man eine begrenzte Anzahl von Termen als Annäherung, so erhält man eine vollkommen continuirliche Lösung, deren Anfangsbedingungen sich von denen des gegebenen Problems nur wenig unterscheiden. Der Unterschied wird um so kleiner, je mehr Terme der Reihe in der Auflösung enthalten sind.

Wie man aus einer Vergleichung der beiden Resultate erkennt, hat jede Form ihre Vortheile. Die erste bestimmt die Bewegung durch eine einfache Formel. Die zweite eignet sich besser, wenn die harmonischen Perioden gesucht werden.

Bei beiden Lösungen sind die willkürlichen Functionen discontinuirlich. Diese Discontinuität tritt bei der Lösung in § 618 offen zu Tag, während sie sich in § 619 in der Reihe verbirgt. Man hat den Einwand gemacht, dass bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen (§ 612) eine mögliche Discontinuität nicht in Erwägung gezogen wird und dass man deshalb diese Gleichungen nicht ohne weitere Untersuchung auf Fälle anwenden könne, bei welchen die in der Lösung auftretenden willkürlichen Functionen unstetig sein sollen. Diese Frage ist viel discutirt worden; wir können hier nur wenige Bemerkungen darüber machen. In De Morgan's *Differential Calculus*, Kap. 21, S. 727 findet man eine kurze Geschichte des Streites zwischen D'Alembert und Lagrange und eine Besprechung der Schwierigkeit. In der *Mécanique Analytique, Séconde Partie*, S. 385 zeigt Lagrange, dass man den Gebrauch unstetiger Functionen vermeiden kann, wenn man den Faden als die Grenze eines leichten mit Massen beladenen Fadens auf die in § 402 beschriebene Art ansieht. Poisson macht in seinem *Traité de Mécanique* andere Vorschläge. Man lässt jetzt allgemein den Gebrauch unstetiger Functionen zu.

Die Discontinuität der Lösung in § 618 rührt von dem Widerspruch her zwischen der Bedingung (2), dass $T=0$ für $x=l$ und der Bedingung (3), dass $T=Er$ von $x=0$ bis $x=l$ sein soll. Dieser Widerspruch ist aber nur scheinbar, weil man die gegebenen Anfangsbedingungen durch andere ersetzen kann, die durchaus unzweideutig sind und sich von den obigen beliebig wenig unterscheiden. Ist $\alpha$ eine endliche beliebig kleine Grösse derart, dass eine Spannung, die kleiner als $E\alpha$ ist, vernachlässigt werden kann, so lässt sich die Bedingung (3) durch eine continuirliche Function $\xi=\varphi(x)$ ersetzen, worin $\varphi'(x)$ sich von $r$ um weniger als $\alpha$ für alle Werthe von $x$ unterscheidet, die zwischen $x=0$ und $x=l-\beta$ liegen und dann bis Null abnimmt, wenn $x$ von $x=l-\beta$ bis $x=l$ wächst. Da man $\beta$ willkürlich klein annehmen kann, so bleibt die obige Lösung bei dieser Aenderung der Anfangsbedingungen wesentlich dieselbe. Der Unterschied besteht darin, dass die Spannung und die Geschwindigkeit statt plötzlich sich nur sehr schnell in der kurzen Zeit $\beta/\alpha$ ändern. Allerdings ist die Art, auf welche dieser rasche Wechsel vor sich geht, nicht bekannt, dies kommt aber lediglich daher, weil in den Anfangsbedingungen keine Bestimmung darüber getroffen ist. Geht man zur Grenze über, in der $\alpha$ und $\beta$ klein sind, so lassen sich die neuen Bedingungen den früheren beliebig nahe bringen. Einige Beispiele zu solchen Aenderungen findet man in De Morgan's *Differential Calculus*, S. 605—630.

Aehnliche Bemerkungen gelten für die Lösung durch trigonometrische Reihen. Nach dem Fourier'schen Satz (§ 619) ist

$$rx = \frac{8rl}{\pi^2}\left\{\sin\frac{\pi x}{2l} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{2l} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{2l} - \text{etc.}\right\}.$$

Da diese Reihe convergent ist, so wird der Anfangswerth von $\xi$ nur wenig geändert, wenn man $rx$ durch die ersten $n$ Terme der Reihe ersetzt, vorausgesetzt, dass $n$ so gross ist, dass es dem gewünschten Grad der Annäherung entspricht. Ist dies geschehen, so werden die Anfangsbedingungen vollkommen continuirlich und führt die zweite Lösungsmethode zu einem endlichen Werth von $\xi$, der durch die ersten $n$ Terme der obigen Reihe dargestellt wird. Um den Grad der so erhaltenen Annäherung zu prüfen, vergleiche man die Resultate einer numerischen Berechnung, die Sir G. Airy auf S. 163 seiner *Treatise on Sound* angestellt hat. Er nimmt an, nur acht Terme der Fourier'schen Reihe würden genommen und vergleicht die Werthe der beiden Seiten der Gleichung für die neunzehn Werthe von $x$, welche die Länge $l$ in achtzehn gleiche Theile zerlegen. Nach Division der beiden Seiten der Gleichung mit $rl$ erhält er für die beiden Seiten die folgenden Zahlen:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| linke Seite | 0, | 6, | 11, | 17, | 22, | 28, | 33, | 39, | 44, | 50, | 56, | 61, | 67, | 72, | 78, | 83, | 89, | 94, | 100. |
| rechte Seite | 0, | 5, | 11, | 17, | 22, | 28, | 33, | 39, | 45, | 50, | 55, | 61, | 67, | 72, | 77, | 83, | 89, | 95, | 100. |

Nach Ohm und Helmholtz *bemerkt das menschliche Ohr nur einfache, harmonische Schwingungen*. In der That führt das Ohr eine unbewusste Entwickelung der Luftschwingungen in eine Reihe trigonometrischer Terme aus, welche bei unserer Lösung durch den Gebrauch der Fourier'schen Reihe nachgeahmt wird. Diese Entwickelung ist daher nicht ein blosser analytischer Kunstgriff zu Rechnungszwecken, sondern hat in der Natur eine wesentliche Bedeutung. Siehe *die Lehre von den Tonempfindungen,* S. 35.

§ 621. *Die beiden Enden eines elastischen Fadens, dessen unausgedehnte Länge $l$ ist, sind an zwei Punkten befestigt, welche den Abstand $l'$ von einander haben. Der Faden führt seitliche Schwingungen aus; man soll die Töne ermitteln, die er hervorbringen kann.*

Wenn man die Gleichgewichtslage des Fadens als die normale annimmt, $y$ die seitliche Verschiebung irgend eines Massenpunktes und $m$ die Masse der Längeneinheit des unausgedehnten Fadens bedeutet, so ist die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

worin $a^2 = T_0 l'/ml$ ist, wie in § 616 gezeigt wurde. Da die *Töne* gesucht werden, die hervorgebracht werden können, so benutzen wir die Lösung in trigonometrischen Reihen. Wir setzen also

$$y = \Sigma[A\sin\{n(at - x_1) + \alpha\} + B\sin\{n(at + x_1) + \beta\}] \quad \ldots \quad (2).$$

Wenn man $x_1 = 0$ setzt, wird für alle Werthe von $t$, $y = 0$, daher ist, wie in § 619

$$y = \Sigma(C\sin nat + D\cos nat)\sin nx_1 \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Für $x_1 = l'$ ist wieder $y = 0$, daher $nl' = i\pi$, worin $i$ eine ganze Zahl bezeichnet. Mithin ist

$$y = \Sigma\left(C\sin\frac{i\pi at}{l'} + D\cos\frac{i\pi at}{l'}\right)\sin\frac{i\pi x_1}{l'} \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

worin $\Sigma$ die Summirung für alle Werthe von $i$ angibt, welche ganze Zahlen sind.

Die Bewegung, welche entsteht, wenn man nur die Glieder nimmt, die irgend eine Periode haben, und alle anderen weglässt, heisst *ein Ton*. Die Töne, welche irgend ein Instrument hervorbringen kann, nennt man *harmonische Obertöne*. Der specielle Ton aber, welcher die längste Periode hat, d. h. der durch $i = 1$ bestimmte, wird *der Grundton* genannt. Die Periode des Grundtons ist $2l'/a$. Bezeichnet man sie mit $\tau$, so sind die Perioden der harmonischen Obertöne der Reihe nach $\tau, \frac{1}{2}\tau, \frac{1}{3}\tau$, u. s. f.

Die Länge der entsprechenden Wellen findet man durch Multiplication der Perioden mit der Geschwindigkeit $a$. Bezeichnet $\lambda$ die Länge der Welle des Grundtons, so ist $\lambda = 2l'$ und die Länge der harmonischen Wellen $\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{3}\lambda$, u. s. f. Siehe § 613.

Die Durchschnittspunkte des Fadens und der Geraden, welche die festen Endpunkte verbindet, heissen *die Knoten* und die von der Geraden am weitesten entfernten Punkte des Fadens *die Bäuche*. Setzt man $y = 0$, so erhält man die Knoten $\sin i\pi x_1/l' = 0$; für $dy/dx_1 = 0$ die Bäuche $\cos i\pi x_1/l' = 0$. Der Grundton hat also einen Bauch und keinen Knoten zwischen den festen Endpunkten. Der nächste harmonische Oberton hat zwei Bäuche und einen dazwischenliegenden Knoten u. s. f. Von Wichtigkeit ist, (1) dass die Lage der Bäuche und Knoten während der Bewegung festliegt, (2) dass die Knoten und Bäuche abwechseln, (3) dass der Abstand zwischen einem Knoten und dem folgenden Bauch ein Viertel der Länge einer jeden den Ton bildenden Welle beträgt, wobei die Länge auf dem gespannten Faden gemessen wird. Siehe § 433.

In den meisten Fällen, in denen Fäden als schwingende Körper benutzt werden, ist die Länge des gespannten und nicht gespannten Fadens so wenig verschieden, dass man $l' = l$ setzen kann. Die Resultate stimmen dann mit den gewöhnlich gebrauchten überein. Es wird dann $x_1 = x$.

*Die Klangfarbe der Töne.* Soll der Faden einen gegebenen harmonischen Oberton hervorbringen, so müssen die Anfangsbedingungen so sein, dass die Amplituden aller anderen Töne Null werden. In der Praxis lässt sich diese Bedingung nicht erfüllen; man kann nur erreichen, dass die Amplitude des beabsichtigten Tones viel grösser wird als die der anderen. Daraus folgt, dass jeder Ton von einer Anzahl von Hülfstönen begleitet ist, deren Perioden von der des Tones, den man hervorzubringen wünscht, verschieden sind. Werden daher Töne von gegebener Periode auf zwei Instrumenten von verschiedener Construction hervorgebracht, so können sie von verschiedenen Reihen von Hülfstönen begleitet sein. Man sagt dann, die Töne hätten verschiedene *Klangfarbe* [1]).

---

1) Brook Taylor scheint der erste gewesen zu sein, der die Schwingungen eines gespannten Fadens theoretisch untersucht hat. Seine Abhandlung *De motu nervi tensi* wurde 1713 von der *Royal Society* gedruckt. Mit Hülfe gewisser allgemeiner Schlüsse kam er zu dem Resultat, dass jeder Punkt des Fadens in demselben Augenblick durch die Axe gehe, welche die festen Enden verbindet. Daraus schloss er, dass in irgend einem gegebenen Augenblick sowohl die Krümmung als die Geschwindigkeit in allen Punkten den Ordinaten proportional sei. Auf diese Art fand er die Gestalt des Fadens und zeigte, dass die Schwingungsdauer $(Wl/T)^{\frac{1}{2}}$ proportional sei, worin $W$ das Gewicht, $l$ die Länge und $T$ die Spannung bedeutet. Der von Taylor discutirte Bewegungszustand würde heute durch die Gleichung $y = A \sin nx \sin (nat + \alpha)$ dargestellt werden.

D'Alembert besprach in zwei Abhandlungen (Berliner Akademie, 1747) die Taylor'sche Lösung und bestritt, dass seine Schlüsse nothwendig correct sein müssten. Er gab zwar zu, dass Taylor einige richtige Lösungen entdeckt habe, behauptete aber, die allgemeine Lösung sei noch nicht gefunden. Er suchte namentlich zu zeigen, dass es ausser den von Taylor gefundenen noch eine unendlich grosse Anzahl anderer Curven gebe, welche ein gespannter Faden bilden könne. Er kam dann zu einer Gleichung, die der modernen partiellen Differentialgleichung der Bewegung äquivalent ist und fand ihr allgemeines Integral mit zwei willkürlichen Functionen. Auch Euler lieferte verschiedene Beiträge zu dem Gegenstand.

D. Bernoulli fand 1753 (Berliner Akademie) sowohl die D'Alembert'sche wie die Euler'sche Lösung zu complicirt und wies nach, dass man ihre Resultate

*Die Resonanzböden.* Die in der Luft durch einen schwingenden Faden hervorgerufenen Töne sind im Allgemeinen so schwach, dass sie das Ohr nur dann vernehmen kann, wenn sie vorher durch einen Resonanzboden oder auf andere Art verstärkt werden. Bei dem Klavier z. B. werden die Saiten zwischen zwei Pflöcken gespannt, die an dem Resonanzboden befestigt sind. Wenn die Saite schwingt, bleibt zwar die Spannung an jedem der beiden Pflöcke unverändert, *die Componente* aber senkrecht zu der die Pflöcke verbindenden Geraden macht eine regelmässige Aenderung ihrer Grösse durch, welche dieselbe Periode wie die Saite hat. Diese Componente der Spannung sucht den Resonanzboden zu biegen und verursacht so eine erzwungene Schwingung von derselben Periode.

*Die äusseren Kräfte.* Wenn an jedem Element des Fadens eine beschleunigende Kraft $Y$ angreift, so ändert sich die Bewegungsgleichung (1) insofern, als auf der rechten Seite das Glied $Y$ addirt werden muss. Wir suchen zuerst ein particuläres Integral z. B. $y = y_1$ auf die gewöhnliche aus der Theorie der Differentialgleichungen bekannte Art. Setzt man nun $y = y_1 + \eta$, so nimmt die Gleichung wieder die Gestalt (1) an mit dem einzigen Unterschied, dass $\eta$ für $y$ steht; die Lösung wird dann so, wie früher, bewerkstelligt. Theoretisch kann man ein beliebiges particuläres Integral wählen; wenn es aber den näheren Umständen des Problems nicht angepasst wird, so müssen die nöthigen Correctionen an dem Werth von $\eta$ gemacht werden und die Lösung kann unter Umständen complicirt sein.

Wenn $Y$ eine Function von $x$ allein ist, so setze man $a^2 y_1 = -\iint Y(dx)^2$ und wähle die beiden Constanten so, dass $y_1$ den gegebenen Bedingungen an dem Ende des Fadens genügt. Den Werth von $\eta$ liefert dann (4); man sieht also, dass die Kraft $Y$ zwar die Gleichgewichtslage, um welche der Faden schwingt, aber nicht die harmonischen Perioden ändert.

Wenn $Y = f \sin pat$ eine Function nur von $t$ ist, so haben wir

$$y = y_1 + \eta,$$

$$y_1 = -\frac{f}{p^2 a^2} \sin pat + L \sin\{p(at - x) + \lambda\} + M \sin\{p(at + x) + \mu\},$$

$$\eta = \Sigma[A \sin\{n(at - x) + \alpha\} + B \sin\{n(at + x) + \beta\}].$$

Der durch $n = p$ definirte Term ist aus der $\Sigma$ ausgeschlossen, weil das Auftreten von $\sin pat$ uns zu einer anderen Behandlung dieses Terms zwingt. Bedenkt man, dass für $x = 0$ und $x = l$, $y = 0$ ist, so ergibt sich

---

durch Superposition der verschiedenen Taylor'schen Trochoiden erhalten kann. Dies heisst soviel, als die Verschiebung gleich $\Sigma A \sin nx \sin nat$ machen. Euler erwiderte in demselben Band, er gebe die Einfachheit der Bernoulli'schen Lösung zu, zweifelte aber, dass jede Bewegung in eine solche Reihe eingeschlossen werden könne, d. h. er bezweifelte, dass man jede Function in der Fourier'schen Form entwickeln könne. Dieser Ansicht scheint auch D'Alembert gewesen zu sein.

Dass selbst Lagrange seiner Zeit diese Meinung theilte, geht aus seinen eigenen Angaben in Art. 16, Bd. 1 der alten Turiner Memoiren, 1759 und aus denjenigen D'Alembert's in seinen Opuskeln, Bd. 1, S. 65 hervor. In Bd. 3 dagegen derselben Memoiren (1762—1765) spricht Lagrange eine andere Meinung aus und gibt den jetzt nach seinem Namen genannten Beweis des Fourier'schen Theorems. Es ist von Interesse, dass er zu diesem Beweis durch die Betrachtung geführt wurde, dass sich die Curve eines massiven Fadens als die Grenze eines Polygons ansehen lasse, das von einem leichten mit einer unendlich grossen Anzahl schwerer Massenpunkte beladenen Faden gebildet wird.

$$y_1 = \frac{-f}{p^2 a^2} \sin pat \left\{ 1 - \frac{\cos p\left(x - \frac{1}{2} l\right)}{\cos \frac{1}{2} pl} \right\}, \quad \eta = \Sigma (C \sin nat + D \cos nat) \sin nx .$$

Befindet sich der Faden Anfangs in Ruhe und in einer Geraden, so hat man nach der Fourier'schen Regel $D = 0$ und

$$C = -\frac{4f}{a^2 l} \frac{p}{n^2(n^2 - p^2)},$$

worin $nl = (2i + 1)\pi$ ist.

Wenn $p$ einem der Werthe von $n$ nahezu gleich ist, so wird die erzwungene Schwingung vergrössert, § 337. Ist die Vergrösserung beträchtlich, so kann es nöthig werden, die kleinen Glieder, welche $\eta$ enthalten und bei der Bildung der Bewegungsgleichung vernachlässigt wurden, in Rechnung zu ziehen.

Wenn $pl$ ein ungerades Vielfache von $\pi$ ist, z. B. $(2i' + 1)\pi$, so enthält der Ausdruck für $y$ zwei unendlich grosse Glieder. Bringt man sie auf den gleichen Nenner, so nehmen sie die Gestalt 0/0 an. Ermittelt man den Werth dieses Verhältnisses und setzt $(2i' + 1)\pi = n'l$, so wird

$$y = -\frac{f}{la^2 n'^3} [\sin n'at \{ n'l + \cos n'x \cdot n'(2x - l) - 5 \sin n'x \} + \cos n'at \sin n'x \cdot 2n'at].$$

Dazu kommen die Terme der Complementärfunction mit Ausnahme des unendlich grossen durch $n = n'$ definirten Terms.

Dieser Werth von $y$ genügt der Differentialgleichung (1) und den gegebenen Bedingungen an den Enden des Fadens ($y = 0$ an jedem Ende), auch dann, wenn alle Terme der Complementärfunction und der letzte Term in dem Coefficienten von $\sin n'at$ weggelassen werden. Die übrigbleibenden Terme stellen daher *die Bewegung eines gespannten Fadens dar, an dem eine seitliche Kraft angreift, deren Periode nicht dieselbe ist wie die einer freien Schwingung,* wobei der Faden Anfangs in einer Geraden liegt und jedes Element eine seitliche Geschwindigkeit hat, welche dem Anfangswerth von $dy/dt$ gleich kommt.

§ 622. **Beispiele.** Beisp. 1. Ein schwerer elastischer Faden $AB$, dessen unausgedehnte Länge $l$ ist, hängt an einem Punkt $A$ unter der Wirkung der Schwere. Wenn $\xi$ die verticale Verschiebung des Punktes, der von $A$ den Abstand $x$ bei nicht ausgedehntem Faden hat, und $a$ die in Einheiten der unausgedehnten Länge gemessene Geschwindigkeit einer Welle bezeichnet, so ist

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + g, \quad \text{daher} \quad \xi = -\frac{gx^2}{2a^2} + \frac{glx}{a^2} + f(at - x) - f(at + x),$$

worin $f(z)$ sich mit entgegengesetzten Vorzeichen wiederholt, wenn $z$ um $2l$ vergrössert wird. Wenn der Faden Anfangs nicht ausgedehnt und in Ruhe ist, zu beweisen, dass

$$f(z) = \pm \frac{gz^2}{4a^2} + \frac{glz}{2a^2}$$

ist, worin das obere Zeichen gilt, wenn $z$ zwischen $-l$ und 0 liegt und das untere, wenn es zwischen 0 und $l$ liegt. Daraus leite man ab, dass die ganze Länge zwischen $l$ und $l + gl^2/a^2$ hin und her schwingt.

Man nehme die andere Form der Lösung und zeige, dass die harmonischen Perioden $p = \dfrac{4l}{(2i+1)a}$ sind, worin $i$ eine ganze Zahl bedeutet. Man zeige auch, dass

$$\xi = -\frac{gx^2}{2a^2} + \frac{glx}{a^2} - \frac{16gl^2}{\pi^3 a^2} \sum \frac{\sin\left(\frac{2i+1}{2}\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{2i+1}{2}\frac{\pi at}{l}\right)}{(2i+1)^3}$$

ist, worin die Summirung sich von $i = 0$ an bis $i = \infty$ erstreckt. Man beachte, dass die harmonischen Perioden von $g$ unabhängig sind.

Beisp. 2. Der Anfangszustand eines Fadens, dessen Länge in beiden Richtungen unendlich gross ist, wird durch $\xi = f(x)$ und $\partial\xi/\partial t = F(x)$ bestimmt. Man zeige, dass die Verschiebungen zur Zeit $t$ durch

$$\xi = \frac{1}{2} f(x + at) + \frac{1}{2} f(x - at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(\lambda)\, d\lambda$$

gegeben sind. [Riemann's Partielle Differentialgleichungen.]

Beisp. 3. Ein Faden $AB$ wird mit einer solchen Spannung ausgedehnt, dass die Geschwindigkeit einer Welle gleich $a$ ist. Das eine Ende $A$ liegt fest, während das andere $B$ nach dem Zwangsgesetz $y = G \sin pat$ erschüttert wird. Wenn $A$ der Coordinatenanfang ist, zu zeigen, dass die erzwungene Schwingung

$$y = G\frac{\sin px}{\sin pl} \sin pat$$

ist. Wenn der Faden von der Ruhe ausgeht, und Anfangs gerade ist, so sind die zusätzlichen freien Schwingungen $y = \Sigma M \sin mx \sin mat$, worin $ml = i\pi$ und $M(p^2 l^2 - i^2\pi^2) = -2Gpl(-1)^i$ ist. Das Zeichen $\Sigma$ giebt die Summirung für alle ganzen positiven Werthe von $i$ an.

Ist $pl$ ein Vielfaches von $\pi$, wie z. B. $pl = i'\pi$, so enthält der Ausdruck für $y$ zwei unendlich grosse Terme. Um die neue in der Lösung angenommene Form zu finden, suchen wir den Werth des Unterschiedes (z. B. $Y$) dieser Terme, wie in § 621 angegeben wurde. Man erhält

$$l \cos pl\, Y = G\{\sin px \cos pat \cdot at + \cos px \sin pat \cdot x\}$$

und ein Glied, das man in die Complementärfunction einschliessen kann. Die Lösung $y = Y$ genügt der Differentialgleichung und den gegebenen Bedingungen an beiden Enden des Fadens. Sie stellt daher eine erzwungene Schwingung dar, während die übrigen Terme der Reihe $\Sigma M \sin mx \sin mat$ eine freie Schwingung ausdrücken, § 325.

Tyndall beschreibt in seiner *Treatise on Sound*, 1867, wie man die Erschütterung eines Fadens experimentell bequem untersuchen kann, wenn man ihn an das eine Ende einer tönenden Gabel befestigt.

Beisp. 4. *Unendlich lange Fäden.* Man leite aus Beisp. 3 die Bewegung ab, wenn der Faden unendlich lang ist.

Zu diesem Zweck verlege man den Coordinatenanfang in das erschütterte Ende. Setzt man $l - x$ statt $x$ und bedenkt, dass $ml = i\pi$ ist, so erhält man

$$y = G\left(\cos px - \frac{\cos pl \sin px}{\sin pl}\right)\sin pat + \sum \frac{2Gp \sin mx \sin mat(-1)^i}{l(p^2 - m^2)}.$$

Die Länge des Fadens ist eigentlich nicht genau gegeben; er soll nur unendlich lang sein. Man kann daher annehmen, entweder $pl$ sei ein unendlich grosses gerades oder ein unendlich grosses ungerades Vielfache von $\frac{1}{2}\pi$; der Unterschied zwischen den beiden Werthen von $l$ ist nur die endliche Grösse $\pi/2p$. Um nicht Terme bestimmen zu müssen, deren Nenner Null ist, wollen wir den letzteren Werth wählen. Da sich $m$ um $\pi/l$ vermehrt, wenn $i$ um die Einheit wächst, so setzen wir $dn = \pi/l$. Aus der Summirung wird ein Integral und man erhält

$$y = G \cos px \sin pat - \frac{2Gp}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin mx \sin mat\, dm}{m^2 - p^2} \quad \ldots \quad (A).$$

Der Integrand ist zwischen den Grenzen unendlich gross, da aber $pl$ ein ungerades und $ml$ ein gerades Vielfache von $\frac{1}{2}\pi$ ist, so leuchtet ein, dass nur der Hauptwerth des Integrals erforderlich ist.

Um ihn zu finden, benutze man zwei Partialbrüche und setze in dem einen $z-p=u$ und in dem anderen $z+p=u'$. Man erhält

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos cz}{z^2-p^2}\,dz=-\frac{\sin cp}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin cu}{u}\,du=-\frac{\sin cp}{p}(\pm\pi),$$

wobei man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, je nachdem $c$ positiv oder negativ ist. Ferner ist

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin az\sin bz}{z^2-p^2}\,dz=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(a-b)z-\cos(a+b)z}{z^2-p^2}\,dz.$$

Macht man die nöthigen Substitutionen, so wird

$$y=G\sin p(at-x)\ \text{oder}\ 0,$$

je nachdem es grösser oder kleiner als $x$ ist.

Nimmt man den Ausdruck (A) für $y$, ehe der Werth des Integrals eingesetzt ist, ergibt sich, dass die Phase der erzwungenen Schwingung genau der erschütternden Kraft folgt und jede freie Schwingung ihre eigene Periode hat. Nach der Substitution des Integrals sind die freien Schwingungen mit den erzwungenen zusammengesetzt, und die allgemeine Wirkung besteht darin, dass die Phase des Endresultates an verschiedenen Punkten des Fadens verschieden ist; siehe § 352.

Man hätte dieses Resultat auf einfachere Art erhalten können, wenn man dasselbe Verfahren, wie in § 618, angewandt hätte, jedoch wäre alsdann die Absorption der freien Schwingungen durch die erzwungenen nicht so klar hervorgetreten. Wir haben nämlich

$$y=f(at-x)+F(at+x).$$

Es is aber für $x=0$ und für alle positiven Werthe von $t$, $y=G\sin pat$; daher $G\sin pat=f(at)+F(at)$ und durch Elimination von $F$

$$y=f(at-x)-f(at+x)+G\sin p(at+x)\quad\ldots\ldots\quad (A).$$

Ferner ist für $t=0$ und für alle *positiven* Werthe von $x$, $\partial y/\partial t=0$ und $\partial y/\partial x=0$. Daraus folgt $f'(-x)=0$ und $f'(x)=Gp\cos px$. Setzt man daher $at\pm x$ für $x$, so wird $f(at+x)=G\sin p(at+x)$, während $f(at-x)=G\sin p(at-x)$ oder Null ist, je nachdem $at-x$ einen positiven oder negativen Werth hat. Es ergibt sich $y=0$ oder gleich $G\sin p(at-x)$, je nachdem $at$ kleiner oder grösser als $x$ ist.

Beisp. 5. Wenn, wie in Beispiel (3), der Faden von der Ruhe ausgeht, das Ende $A$ festliegt, das Ende $B$ dagegen nach dem Gesetz $y=f(t)$ erschüttert wird, zu beweisen, dass

$$y=-\frac{2\pi a^2}{l^2}\sum i(-1)^i\sin\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi at}{l}\int_0^t\left\{\sec^2\frac{i\pi at}{l}\int_0^t f(t)\cos\frac{i\pi at}{l}\,dt\right\}dt$$

für alle Werthe des $x$ zwischen 0 und $l$ mit Ausschluss des letzteren ist. Man zeige auch durch Anwendung des Fourier'schen Theorems, dass sich das Resultat in Beisp. 3 aus dem vorstehenden ableiten lässt.

Beisp. 6. Das Ende $O$ eines unendlich langen homogenen Fadens wird nach dem Gesetz $y = G \sin pat$ erschüttert und die Anfangsbedingungen sind durch $y = \varphi(x)$, $\partial y/\partial t = \psi(x)$ für alle positiven Werthe von $x$ gegeben. Man zeige, dass die Bewegung

$$y = G \sin pat \cos px + \int_0^\infty (C \sin nat + D \cos nat) \sin nx\, dn,$$

$$\tfrac{1}{2} \pi D = \int_0^\infty \varphi(x) \sin nx\, dx,$$

$$\tfrac{1}{2} \pi n a C = \int_0^\infty \{\psi(x) - Gpa \cos px\} \sin nx\, dx$$

ist.

Die Aufgabe ist nicht vollkommen bestimmt, weil der Zustand des Fadens an dem unendlich weit entfernten Ende nicht angegeben wird. Man kann annehmen, entweder dieses Ende läge fest und es wäre daher $y = 0$ oder es wäre frei, eine der Gleichgewichtsspannung gleiche Kraft greife an ihm an und $\partial y/\partial x$ sei gleich Null. Die Länge des Fadens ist in einem gewissen Grad willkürlich und kann so gewählt werden, dass entweder $\cos pl = 0$ oder $\sin pl = 0$ ist. Dies ist dasselbe, wie $\cos \infty = 0$ oder $\sin \infty = 0$ zu setzen. Wir nehmen

$$y = G \sin pat \cos px + \Sigma(A \sin nat + B \cos nat) \sin nx$$

an. Der Term, welcher $\cos nx$ enthält, wurde weggelassen, weil sich $y$ für alle Werthe von $t$, wenn $x = 0$ ist, auf den ersten Term reduciren muss. Wählt man $C$ so, dass $\cos pl = 0$ wird und macht an dem unendlich weit entfernten Ende $y = 0$, so werden die Werthe von $nl$ gleich $i\pi$. Setzt man $dn = \pi l$ und $Al = \pi C$, $Bl = \pi D$, so nimmt der Werth von $y$ die oben angegebene Gestalt an.

Um $D$ zu finden, setze man $t = 0$ und verfahre so, wie in § 399. Es wird

$$\int_0^\infty \varphi(x) \sin nx\, dx = B \int_0^l \sin^2 nx\, dx = \tfrac{1}{2} \pi D.$$

Der Werth von $C$ ergibt sich auf dieselbe Art.

Beisp. 7. Die Endpunkte $A$, $B$ eines Fadens sind befestigt; einer seiner Punkte $C$ wird um die Strecke $CC' = 2\gamma$ nach der Seite weggezogen und die Bewegung beginnt vom Zustand der Ruhe aus. Man zeige, dass zu irgend einer späteren Zeit der Faden die Gestalt dreier Geraden $AL$, $LM$, $MB$ hat.

Helmholtz hat das Problem mittelst trigonometrischer Reihen gelöst, es ist aber auch ein gutes Beispiel für die in § 620 beschriebene graphische Methode; man vergleiche Rayleigh's *Theory of sound*, 1894, Art. 146. Wenn man die Figur aufzeichnet und das Parallelogramm $AC'BD$ vervollständigt, so sieht man, dass $L$, $M$ von $C'$ ausgehen und auf $C'AD$, $C'BD$ so fortrücken, dass die Componente der Geschwindigkeit eines jeden der beiden Punkte parallel zu $AB$ gleich $\pm a$ ist. Nach der Ankunft der Punkte in $D$ wiederholt sich die Bewegung.

Beisp. 8. Ein schwerer Faden wird vertical an seinem einen Ende aufgehängt und dabei keiner seiner Theile ausgedehnt; wenn er nun der Wirkung der Schwere überlassen wird, zu beweisen, dass das untere Ende so schwingt, als ob eine Beschleunigung gleich der Schwere an dem unteren Ende (wo wir uns die Masse concentrirt denken) angriffe, welche die Richtung nach dem Mittelpunkt seiner Bahn hat. [Smith's Prize.]

Beisp. 9. Ein ausgedehnter Faden von der Länge $l$ ist an zwei gleichen Massen $M$ befestigt. Diese sind ihrerseits an Federn von der Stärke $\mu$ angebracht,

die seitliche Schwingungen zulassen. Wenn der Faden nun in seinem Mittelpunkt erschüttert wird, so ist die Schwingungsperiode $p$ durch

$$m a \operatorname{tg} \frac{\pi l}{p a} = \frac{p \mu}{2 \pi} - \frac{2 \pi M}{p}$$

gegeben, worin $m$ die lineare Dichtigkeit und $m a^2$ die Spannung des Fadens bedeutet. [Math. Tripos, 1881.]

Beisp. 10. Ein elastischer Stab von der Länge $l$ liegt auf einer glatten Ebene und wird seiner Länge nach zwischen zwei Pflöcken zusammengedrückt, die den Abstand $l'$ von einander haben. Der eine Pflock wird plötzlich entfernt; man zeige, dass der Stab den andern Pflock grade in dem Moment verlässt, in welchem er seinen natürlichen Zustand wieder erreicht, und alsdann mit einer Geschwindigkeit weiter rückt, welche dem $(l - l')/l^{\text{ten}}$ Theil der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Längswelle in dem Stab gleich kommt. [Math. Tripos, 1883.]

Beisp. 11. Ein aus einem elastischen Faden gebildeter Ring von der Masse $M$ und der natürlichen Länge $2\pi l$ wird um einen glatten Kreiscylinder gespannt; man beweise, dass die Zeit, welche eine Längsschwingung braucht, um den Weg um den Cylinder zurückzulegen, von der Grösse des Cylinders nicht abhängt.

Wenn der Ring sich im Gleichgewicht befindet, werden die Enden eines zu dem Centriwinkel $2\alpha$ gehörigen Bogens des Ringes so lange zusammengezogen, bis der Bogen seine natürliche Länge wieder erreicht hat, und alsdann die Enden losgelassen. Misst man $\theta$ von dem Durchmesser aus, der den Winkel $2\alpha$ halbirt, zu beweisen, dass zu irgend einer nun folgenden Zeit die Verschiebung des Endpunktes des entsprechenden Bogens aus der Gleichgewichtslage

$$-\frac{a-l}{a} \cdot \frac{2}{\pi - \alpha} \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n\theta \sin n\alpha \cos n\omega t}{n^2}$$

ist, worin $Ml\omega^2 = 2\pi E$, $a$ der Radius des Cylinders und $E$ der Elasticitätsmodul ist. [Math. Tripos, 1886.]

Der erste Theil des Problems ergibt sich aus dem Satz über die Geschwindigkeit einer Welle in § 613. Bei dem zweiten Theil führt die Differentialgleichung zu $\xi = \Sigma M \sin n\theta \cos n\omega t$. Die Werthe von $M$ ermittelt man mit Hülfe des Fourier'schen Theorems, wie in § 619.

§ 623. **Mehrere Fäden.** *Drei elastische Fäden, $AB$, $BC$, $CD$, von verschiedenem Material sind bei $B$ und $C$ aneinander befestigt und werden in einer Geraden zwischen den beiden festen Punkten $A$ und $D$ ausgespannt. Wenn die Massenpunkte des Fadens irgend eine Längsverschiebung erhalten und von der Ruhe ausgehen, die nun folgende Bewegnng zu finden* [1]).

1) Das Problem, die seitlichen Schwingungen eines gespannten Fadens zu finden, der aus zwei Theilen von verschiedener Art besteht, scheint zuerst Poisson, *Journal de l'École Polytechnique*, Bd. 11, 1820, gelöst zu haben. Poisson weist darauf hin, dass Euler und Bernoulli, die sich vor ihm an dem Problem versuchten, nur unvollständige Resultate erhalten hätten, *Mémoires de Pétersbourg*, 1771 und 1772. Der Letztere war zwar zu einer Gleichung für die Perioden gekommen, hatte aber die Form nicht gefunden, welche der Faden zu irgend einer Zeit während der Bewegung annimmt. Seine Resultate waren in einem gewissen Grad irrthümlich, weil er die Bedingung nicht hatte stellen wollen, dass die beiden Theile des Fadens eine gemeinschaftliche Tangente an dem Verbindungspunkt haben müssen. Später hat sich Bourget in den *Annales de l'école normale supérieure*, Bd. 4, 1867 mit dem Problem beschäftigt und einige Resultate

$A$ sei der Coordinatenanfang, $AD$ die Richtung, in welcher $x$ gemessen wird. Die unausgedehnten Längen von $AB$, $BC$, $CD$ seien $l_1$, $l_2$, $l_3$; $E_1$, $E_2$, $E_3$ ihre Elasticitätscoefficienten und $m_1$, $m_2$, $m_3$ die Massen ihrer Längeneinheiten. Der Kürze wegen sei ferner

$$E_1 = m_1 a_1^2, \quad E_2 = m_2 a_2^2, \quad E_3 = m_3 a_3^2.$$

Die übrige Bezeichnung sei dieselbe, wie zuvor.

Wenn der Faden *im Gleichgewichtszustand* zwischen den zwei festen Punkten $A$ und $D$ ausgestreckt ist, sei $T_0$ seine Spannung. In dieser Lage sind die Verschiebungen der Elemente eines jeden Fadens aus der Lage des unausgedehnten Fadens

$$\xi_1 = \frac{l_1' - l_1}{l_1} x = \frac{T_0}{E_1} x,$$

$$\xi_2 = l_1' - l_1 + \frac{l_2' - l_2}{l_2}(x - l_1) = \frac{T_0}{E_1} l_1 + \frac{T_0}{E_2}(x - l_1),$$

$$\xi_3 = \text{etc.} = \frac{T_0}{E_1} l_1 + \frac{T_0}{E_2} l_2 + \frac{T_0}{E_3}(x - l_1 - l_2).$$

Zur Zeit $t$ nach der Störung des Gleichgewichts seien diese Verschiebungen bezügl. $\xi_1 + \xi_1'$, $\xi_2 + \xi_2'$, $\xi_3 + \xi_3'$. Man erhält dann wie in § 619

$$\left.\begin{aligned} \xi_1' &= \Sigma L_1 \sin(n_1 x + M_1) \cos n_1 a_1 t \\ \xi_2' &= \Sigma L_2 \sin\{n_2(x - l_1) + M_2\} \cos n_2 a_2 t \\ \xi_3' &= \Sigma L_3 \sin\{n_3(x - l_1 - l_2) + M_3\} \cos n_3 a_3 t \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (1),$$

worin $\Sigma$ die Summirung für alle harmonischen Schwingungen angibt. Die Terme, welche $\sin n_1 a_1 t$, $\sin n_2 a_2 t$, etc. enthalten, sind weggelassen worden, weil der Faden von der Ruhe ausgeht und $\partial \xi_1'/\partial t$, $\partial \xi_2'/\partial t$, etc. daher mit $t$ verschwinden muss.

Zur Vergleichung der Coefficienten derselben harmonischen Schwingungen muss man annehmen, es sei

$$n_1 a_1 = n_2 a_2 = n_3 a_3 = 2\pi/p,$$

worin $p$ die Periode der harmonischen Schwingung angibt. Für die Constanten gelten die Bedingungen

$$\text{für} \quad x = 0, \qquad x = l_1, \qquad x = l_1 + l_2, \qquad x = l_1 + l_2 + l_3,$$

$$\xi_1' = 0, \qquad \xi_1' = \xi_2', \qquad \xi_2' = \xi_3', \qquad \xi_3' = 0,$$

$$E_1 \frac{\partial \xi_1'}{\partial x} = E_2 \frac{\partial \xi_2'}{\partial x}, \quad E_2 \frac{\partial \xi_2'}{\partial x} = E_3 \frac{\partial \xi_3'}{\partial x}.$$

Sie liefern

---

Poisson's corrigirt. Er bespricht auch die Schwingungen einer gespannten aus drei verschiedenen Theilen bestehenden Saite und gibt eine etwas complicirte Regel zur Ermittelung der Perioden an, wenn die Saite aus $n$ verschiedenen Theilen besteht. Schliesslich beschreibt er zehn verschiedene Experimente, welche die Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung zeigen. Diese Versuche werden dann noch einmal in Bd. 9 der *Annales de l'observatoire de Paris*, 1868, besprochen.

$$\left.\begin{aligned} &M_1 = 0, \\ &L_2 \sin M_2 = L_1 \sin(n_1 l_1 + M_1) \\ &E_2 n_2 L_2 \cos M_2 = E_1 n_1 L_1 \cos(n_1 l_1 + M_1) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} &L_3 \sin M_3 = L_2 \sin(n_2 l_2 + M_2) \\ &E_3 n_3 L_3 \cos M_3 = E_2 n_2 L_2 \cos(n_2 l_2 + M_2) \end{aligned}\right\},$$

$$0 = L_3 \sin(n_3 l_3 + M_3).$$

Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen zur Ermittelung der $M$:

$$0 = M_1, \quad \frac{\operatorname{tg} M_2}{E_2 n_2} = \frac{\operatorname{tg}(n_1 l_1 + M_1)}{E_1 n_1}, \quad \frac{\operatorname{tg} M_3}{E_3 n_3} = \frac{\operatorname{tg}(n_2 l_2 + M_2)}{E_2 n_2}, \quad 0 = \frac{\operatorname{tg}(n_3 l_3 + M_3)}{E_3 n_3}.$$

Löst man sie auf, so erhält man

$$\frac{\operatorname{tg} n_1 l_1}{E_1 n_1} + \frac{\operatorname{tg} n_2 l_2}{E_2 n_2} + \frac{\operatorname{tg} n_3 l_3}{E_3 n_3} = (E_2 n_2)^2 \frac{\operatorname{tg} n_1 l_1}{E_1 n_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} n_2 l_2}{E_2 n_2} \cdot \frac{\operatorname{tg} n_3 l_3}{E_3 n_3}.$$

Drückt man $n_1$, $n_2$, $n_3$ durch $p$ aus und substituirt, so wird

$$\frac{a_1}{E_1} \operatorname{tg} \frac{2\pi l_1}{p a_1} + \frac{a_2}{E_2} \operatorname{tg} \frac{2\pi l_2}{p a_2} + \frac{a_3}{E_3} \operatorname{tg} \frac{2\pi l_3}{p a_3} =$$

$$= \frac{E_2}{E_1 E_3} \frac{a_1 a_3}{a_2} \operatorname{tg} \frac{2\pi l_1}{p a_1} \operatorname{tg} \frac{2\pi l_2}{p a_2} \operatorname{tg} \frac{2\pi l_3}{p a_3}.$$

Diese Gleichung bestimmt die Periode $p$ einer Hauptschwingung. In gewissen Fällen ist sie leicht aufzulösen. Ist z. B. $E_1/a_1 = E_2/a_2 = E_3/a_3$, so findet man sofort $\Sigma l/a = \frac{1}{2} p i$, worin $i$ eine ganze Zahl ist. Oder wenn

$$l_1/a_1 = l_2/a_2 = l_3/a_3$$

ist, so hat man die sämmtlichen Perioden unmittelbar. In anderen Fällen sind Annäherungsmethoden zu benutzen.

§ 624. Wenn die Werthe von $p$ bekannt sind, so bestimmen die vorstehenden Gleichungen offenbar alle Constanten mit Ausnahme von $L_1$. Es bleibt daher für jede harmonische Function von $t$ eine Constante unbestimmt. Um sie ermitteln zu können, muss man die Anfangsbedingungen zu Hülfe nehmen. Wie dies ausgeführt wird, ist in § 399 in's Einzelne gezeigt worden.

Den Gleichungen lässt sich die Gestalt geben

$$\xi_1' = \Sigma P_n \cos nat, \quad \xi_2' = \Sigma Q_n \cos nat, \quad \xi_3' = \Sigma R_n \cos nat,$$

worin $P_n$, $Q_n$, $R_n$ die Stelle der Coefficienten in den Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen vertreten. Die erste dieser drei Gleichungen stellt in typischer Form die Bewegung eines Massenpunktes in dem Faden $AB$ dar, die zweite die Bewegung eines Massenpunktes in $BC$ etc. Nach § 399 kann man die drei Gruppen von Multiplicatoren typisch durch

$$m_1 dx P_n, \quad m_2 dx Q_n, \quad m_3 dx R_n$$

ausdrücken. Die Summirungen, von denen in § 399 die Rede war, werden hier Integrationen und erstrecken sich über die respective Länge der drei Fäden.

Nimmt man nun an, im Anfang sei

$$\xi_1' = f_1(x), \quad \xi_2' = f_2(x), \quad \xi_3' = f_3(x),$$

so findet man

$$\int_0^{l_1} m_1 dx f_1(x) P_n + \int_{l_1}^{l_1+l_2} m_2 dx f_2(x) Q_n + \int_{l_1+l_2}^{l_1+l_2+l_3} m_3 dx f_3(x) R_n$$

$$= \int_0^{l_1} m_1\, dx P_n^2 + \int_{l_1}^{l_1+l_2} m_2\, dx\, Q_n^2 + \int_{l_1+l_2}^{l_1+l_2+l_3} m_3\, dx R_n^2 .$$

Diese Integrationen lassen sich ausführen, wenn die Formen von $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ gegeben sind. Auf diese Art haben wir eine weitere Gleichung zur Ermittelung des $L$ erhalten, welches irgend einem Werth von $p$ entspricht. Die Integration auf der rechten Seite führt, wie man leicht sieht, zu dem Resultat

$$\tfrac{1}{2}(m_1 l_1 L_1^2 + m_2 l_2 L_2^2 + m_3 l_3 L_3^2).$$

Eine ähnliche Formel gilt auch bei einer beliebig grossen Anzahl von Fäden.

§ 625. **Beispiele.** Beisp. 1. Wenn die drei Fäden seitliche Schwingungen ausführen und $a_1$, $a_2$, $a_3$ die Geschwindigkeiten einer Welle in ihrer Längsrichtung sind und in Längeneinheiten der unausgedehnten Fäden gemessen werden, zu beweisen, dass die Perioden der Töne durch die Gleichung

$$\frac{\operatorname{tg} n_1 l_1}{n_1} + \frac{\operatorname{tg} n_2 l_2}{n_2} + \frac{\operatorname{tg} n_3 l_3}{n_3} = n_2^2 \frac{\operatorname{tg} n_1 l_1}{n_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} n_2 l_2}{n_2} \cdot \frac{\operatorname{tg} n_3 l_3}{n_3}$$

bestimmt werden, worin

$$n_1 a_1 = n_2 a_2 = n_3 a_3 = 2\pi/p$$

ist. Wenn die Anfangsstörung gegeben ist, zu zeigen, wie man die nun folgende Bewegung findet. Die Bedingungen für die Verbindungsstellen sind: (1) die Ordinaten sind für jeden Faden gleich, (2) die Tangenten fallen zusammen.

Beisp. 2. Zwei schwere Fäden $AB$, $BC$ von verschiedenem Material sind bei $B$ miteinander verbunden und hängen unter der Wirkung der Schwere von einem festen Punkt $A$ herab. Man beweise, dass die Perioden der verticalen Schwingungen durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi l_1}{a_1 p} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi l_2}{a_2 p} = \frac{E_1 a_2}{E_2 a_1}$$

gegeben sind, worin die Bezeichnung dieselbe wie bisher ist. Wenn die beiden Fäden Anfangs unausgedehnt sind, ihre Länge zu irgend einer Zeit zu finden.

Beisp. 3. Zwei Fäden $AB$, $BC$ aus verschiedenem Material sind bei $B$ an einem materiellen Punkt von der Masse $M$ befestigt, während die beiden anderen Endpunkte $A$ und $C$ im Raum festliegen. Wenn die Massenpunkte des Systems in der Längsrichtung der Geraden $AC$ schwingen, zu beweisen, dass die Periode $p$ einer Hauptschwingung eine Wurzel der Gleichung

$$M \frac{2\pi}{p} = \frac{E_1}{a_1} \operatorname{cotg} \frac{2\pi l_1}{a_1 p} + \frac{E_2}{a_2} \operatorname{cotg} \frac{2\pi l_2}{a_2 p}$$

ist, worin $l_1$, $l_2$ die unausgedehnten Längen der Fäden, $E_1$, $E_2$ ihre Elasticitätscoefficienten und $a_1$, $a_2$ die Geschwindigkeiten einer Welle bezeichnen und diese letzteren durch Einheiten der unausgedehnten Länge für die Zeiteinheit gemessen werden. Die Werthe von $p$, welche man erhält, indem man, wenn es möglich ist, die Contangenten gleichzeitig der Unendlichkeit gleich setzt, sind einzuschliessen.

Wenn das System kleine Schwingungen senkrecht zu der Geraden $AC$ ausführt, so liefert dieselbe Gleichung die Perioden, wenn man $E_1$ und $E_2$ durch $T_0$, die Spannung des Fadens im Gleichgewichtszustande, ersetzt.

Beisp. 4. Ein Massenpunkt ist an einem festen Punkt mittelst eines elastischen Fadens aufgehängt und führt kleine Schwingungen in verticaler Richtung aus. Wenn man annimmt, der Faden sei in seinem natürlichen Zustand gleichförmig und von geringer endlicher Masse, zu zeigen, dass die Dauer einer kleinen Schwingung annähernd die nämliche ist, wie dann, wenn der Faden kein Gewicht hat und die Masse des materiellen Punktes um ein Drittel der Masse des Fadens vermehrt wird. [Smith's Prize.]

Beisp. 5. Ein Faden, dessen Endpunkte fest liegen, schwingt seitlich mit der Periode $p$. Wenn eine kleine Masse, welche die Abstände $l_1$, $l_2$ von seinen Enden hat, an ihm befestigt wird, zu beweisen, dass die Periode in dem Verhältniss

$$1 + \sigma \sin^2 2\pi l_1/pa \text{ zu } 1$$

vergrössert wird, worin $\sigma$ das Verhältniss der angehefteten Masse zu der Masse des Fadens bedeutet. [Donkin's Acoustics].

Beisp. 6. Zwei Fäden $xA$, $Ax'$ sind bei $A$ verbunden; man beweise, dass kleine seitliche Schwingungen, die von $x$ nach $A$ fortrücken, bei $A$ theils reflectirt, theils gebrochen werden und dass die Verschiebungen in Folge der einfallenden, der reflectirten und der übertragenen Schwingungen sich wie $1 + \mu : 1 - \mu : 2$ zueinander verhalten, worin $\mu$ das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in $xA$ zu der in $Ax'$ bezeichnet. [Math. Tripos, 1846.]

Sind $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ die drei Verschiebungen, so ist

$$\eta_1 = \Sigma A \sin\{n(at - x) + \alpha\}, \quad \eta_2 = \Sigma B \sin\{n(at + x) + \beta\},$$
$$\eta_3 = \Sigma C \sin\{n'(a't - x) + \gamma\}.$$

Durch Vergleichung der Glieder von derselben Periode erhält man $na = n'a'$. Die Bedingungen am Verbindungspunkt liefern

$$\eta_1 + \eta_2 = \eta_3, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = \frac{\partial \eta_3}{\partial x}.$$

Daher sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gleich und stehen $A$, $B$, $C$ in dem angegebenen Verhältniss.

Beisp. 7. Zwei gleichförmige schwere elastische Balken $AB$, $CD$, die in jeder Beziehung gleich sind, werden durch einen leichten unausdehnbaren Faden $BC$ verbunden. Der Balken $AB$ liegt ohne Zwang auf einem glatten horizontalen Tisch, während $CD$ im Zustand der Ruhe unter der Wirkung der Schwere an einem Faden herabhängt, der bei $B$ befestigt ist und über eine glatte Rolle $P$ an der Kante des Tisches läuft. Dabei ist $PBA$ eine Gerade. Man untersuche die Bewegung des Fadens, wenn er losgelassen wird; beweise, dass seine Spannung, nachdem sie momentan um die Hälfte vermindert worden, constant bleibt, und dass seine Geschwindigkeit gleiche Zuwächse in gleichen Intervallen erfährt. [Math. Tripos, 1876.]

Die physikalischen Beziehungen bleiben dieselben, wenn man annimmt, die Stäbe befänden sich in einer Geraden auf dem Tisch und nur an $CD$ greife die Schwere an. Das Problem wird dadurch einfacher, weil die Rolle wegfällt. Damit der Schwerpunkt des ganzen Systems unverändert bleibe, bringe man weiter an jedem Massenpunkt eine Kraft an, die der Hälfte der Schwerkraft gleich kommt und in entgegengesetzter Richtung wirkt. Das Resultat ist, dass an dem Stab $AB$ die Kraft $\frac{1}{2}g$ in der Richtung $BA$ und an $CD$ ebenfalls $\frac{1}{2}g$ in der Richtung $CD$ angreift. Die Auflösung ist dann so wie in Beisp. 1, § 622.

Beisp. 8. Ein Massenpunkt ist an dem Mittelpunkt eines schweren Fadens befestigt, welcher zwischen zwei festen Punkten auf einem glatten horizontalen Tisch auf das Doppelte seiner Länge ausgedehnt ist. Die nicht ausgedehnte Länge des Fadens ist $2l$, sein Modul $n$-mal und das Gewicht des Massenpunktes $r$-mal so gross als der Modul bez. das Gewicht des Fadens. Der Massenpunkt wird um die Strecke $\lambda l$ nach einem der festen Punkte hin bewegt und losgelassen, wenn der Faden zur Ruhe gekommen ist. Man zeige, dass genug Bedingungen vorhanden sind, um die vier willkürlichen Functionen vollständig bestimmen und gebe an, wie sie anzuwenden sind. Man beweise, dass der Massenpunkt während des ersten Intervalls $\frac{2l}{a}$ die Geschwindigkeit $\lambda a\left(1-e^{-\frac{at}{rl}}\right)$ hat, worin $a^2=2gnl$ ist und die Zeit $t$ vom Ruhezustand aus gerechnet wird.

[Caius Coll., 1871.]

Beisp. 9. Drei Fäden $OA$, $OB$, $OC$ von demselben Material aber verschiedener Länge sind bei $O$ vereinigt und werden dadurch, dass sie mit festen Punkten $A$, $B$, $C$ verbunden sind, in Spannung gehalten. Die Winkel $BOC$, $COA$, $AOB$ seien mit $\alpha, \beta, \gamma$ bezeichnet. Man zeige, dass die Dauer der seitlichen Schwingungen der verschiedenen Töne, wenn $O$ frei ist, durch die Gleichung für $T$

$$\sqrt{\sin\alpha}\cdot\operatorname{cotg}\pi T_1/T+\sqrt{\sin\beta}\cdot\operatorname{cotg}\pi T_2/T+\sqrt{\sin\gamma}\cdot\operatorname{cotg}\pi T_3/T=0$$

bestimmt wird, worin $T_1$, $T_2$, $T_3$ die Dauer der Grundtöne von $OA$, $OB$, $OC$ bezeichnet, wenn $O$ festliegt. [Math. Tripos, 1884.]

Beisp. 10. Drei gleiche und ähnliche gespannte Fäden $AO$, $BO$, $CO$ werden bei $O$ miteinander verbunden und ihre anderen Endpunkte an drei festen Punkten $A$, $B$, $C$ befestigt, welche so liegen, dass die Winkel $AOB$, $BOC$, $COA$ einander gleich sind. Die Fäden schwingen in der Ebene $ABC$; man beweise, dass die Gleichung

$$a\operatorname{cotg}\varrho\, l'/a+b\operatorname{cotg}\varrho\, l'/b=0$$

die Perioden bestimmt, worin $a$ und $b$ die bez. Geschwindigkeiten einer Längs- und einer seitlichen Schwingung eines der Fäden, $l'$ die ausgedehnte Länge und $2\pi/\varrho$ eine Periode bezeichnet.

Man nehme für jeden Faden einen besonderen Coordinatenanfang $A$, $B$ bez. $C$. Da jeder sowohl nach der Länge als nach der Seite schwingt, so sind die Schwingungen für $OA$

$$\xi_1=A_1\cos\varrho t\,\frac{\sin mx_1}{\sin ml'},\quad \eta_1=B_1\cos\varrho t\,\frac{\sin nx_1}{\sin nl'},$$

worin $\varrho=ma=nb$ ist; siehe §§ 612, 616. Die Schwingungen der übrigen Fäden erhält man durch Aenderung der Indices. Da die Fäden bei $O$ aneinander befestigt wurden, so sind die Componenten der Verschiebungen parallel und senkrecht zu $AO$ einander gleich. Man erhält daher

$$B_1\sqrt{3}=A_3-A_2,\quad B_2\sqrt{3}=A_1-A_3,\quad B_3\sqrt{3}=A_2-A_1,\quad A_1+A_2+A_3=0.$$

Die Längs- und seitlichen Spannungen $T_1$, $T_2$ sind bezügl.

$$T_1=T_0+E\frac{l'}{l}\frac{\partial\xi}{\partial x_1},\quad T_2=T_0\frac{\partial\eta}{\partial x_1}.$$

Da die Spannungen in der allgemeinen Lage von $O$ sich das Gleichgewicht halten, so erhält man durch dieselbe Zerlegung

$$E\frac{l'}{l}m\operatorname{cotg}ml'=-T_0 n\operatorname{cotg}nl'.$$

Mittelst der in den §§ 612, 616 angegebenen Werthe von $a$ und $b$ gelangt man dann zu dem gesuchten Resultat.

Beisp. 11. Ein gleichförmiger Faden von der Länge $2l$ ist mit der Spannung $T$ zwischen zwei festen Punkten ausgedehnt. Man beweise, dass die Bewegung des Fadens, wenn er anfänglich durch eine Kraft $Y$ an einem Punkt, der den Abstand $b$ von dem einen Ende hat, zur Seite gezogen wird, durch

$$y = \frac{Y}{lm} \cdot \sum \sin\frac{i\pi b}{2l} \sin\frac{i\pi x}{2l} \frac{\cos nt}{n^2}$$

gegeben ist, worin $m$ die Masse der Längeneinheit, $a$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in der Längenrichtung des Fadens, $2nl = i\pi a$ ist und die Summirung von $i = 1$ bis $i = \infty$ geht.

Die Enden des Fadens sind an zwei Massen befestigt, von denen jede gleich $M$ ist und welche durch Federn von der Stärke $\mu$ an ihrer Stelle gehalten werden; in der Mitte des Fadens ist ferner die Masse $M'$ angebracht. Wenn $M'$ nach der Seite gezogen wird, zu beweisen, dass die Periode der Schwingungen $2\pi/pa$ ist, worin $p$ durch die Gleichung bestimmt wird

$$p \operatorname{tg} pl \{M'a^2(Mp^2a^2 - \mu) - 2T^2\} = T\{2Mp^2a^2 - 2\mu + M'p^2a^2\}.$$

[Math. Tripos, 1885.]

Nimmt man in dem zweiten Theil des Problems den Mittelpunkt zum Coordinatenanfang, so ist für den Faden auf der positiven Seite

$$y = (P\cos px + Q\sin px)\cos pat.$$

Die Bedingungen sind

$$(1)\quad M'\partial^2 y/\partial t^2 = -2T\partial y/\partial x \text{ für } x = 0;$$

$$(2)\quad M\partial^2 y/\partial t^2 = -T\partial y/\partial x - \mu y \text{ für } x = l.$$

Man erhält das Resultat, wenn man für $y$ substituirt und $Q/P$ eliminirt.

Beisp. 12. *Superposition.* Die Enden $A$, $B$ eines Fadens $AHB$ sind an leichten Ringen befestigt, die sich auf glatten einander parallelen Stäben frei bewegen können. Bei $A$, $H$, $B$ greifen Kräfte senkrecht zum Faden und parallel den Stäben von der Stärke

$$X = F\cos\varkappa t + G\sin\varkappa t,\quad Y = L\cos\lambda t + M\sin\lambda t \text{ bez. } Z = R\cos\mu t + S\sin\mu t$$

an. Man zeige, dass zur Zeit $t$ die nun folgende Verschiebung eines Punktes $P$ in $AH$ in der den Kräften entgegengesetzten Richtung

$$\frac{aX}{T\varkappa}\cdot\frac{\cos\varkappa(l-x)/a}{\sin\varkappa l/a} + \frac{aY}{T\lambda}\cdot\frac{\cos\lambda(l-h)/a\cdot\cos\lambda x/a}{\sin\lambda l/a} + \frac{aZ}{T\mu}\cdot\frac{\cos\mu x/a}{\sin\mu l/a}$$

ist, worin $T$ die Spannung des Fadens, $a$ seine Wellengeschwindigkeit und $x$, $h$, $l$ die natürliche Länge von $AP$, $AH$, $AB$ bedeutet. [Math. Tripos, 1886.]

Um den Beweis zu führen, betrachte man jede Kraft für sich. Nimmt man zuerst $Y$ und sind $\eta$, $\eta_1$ die seitlichen Verschiebungen zweier Punkte, von denen der eine in dem Faden $AH$, der andere in $HB$ liegt, und welche den Abstand $x$ bez. $x_1$ von $A$ bez. $B$ haben, so sind die Bedingungen

$$(1)\quad \partial\eta/\partial x = 0,\quad \partial\eta_1/\partial x_1 = 0 \text{ bei } A \text{ bez. } B;$$

$$(2)\quad \eta = \eta_1 \quad\text{und}\quad T(\partial\eta/\partial x + \partial\eta_1/\partial x_1) = Y \text{ bei } H.$$

Hat man die Verschiebung in Folge von $Y$ gefunden, so erhält man die in Folge von $Z$, indem man $h = l$ setzt und $Y$, $\lambda$ mit $Z$, $\mu$ vertauscht. Die Verschiebung in Folge von $X$ lässt sich dann aus der für $Z$ ableiten. Superponirt man die drei, so ergibt sich das gesuchte Resultat.

Beisp. 13. Ein Metallstab passt frei in eine Röhre von derselben Länge und verschiedener Substanz. Die Enden des Stabes und der Röhre sind durch gleiche

vollkommen starre Scheiben vereinigt, die symmetrisch angebracht sind. Man zeige, dass die Perioden der Töne, welche das System hervorbringen kann, und die einen Knoten in der Mitte des Systems haben, durch $2\pi l/x$ gegeben sind, worin $2l$ die Länge des Stabes oder der Röhre bedeutet und $x$ eine Wurzel der Gleichung

$$2Mx = ma \operatorname{cotg} x/a + m'a' \operatorname{cotg} x/a'$$

ist, unter $M$, $m$, $m'$ die Massen einer Scheibe, des Stabes bez. der Röhre und unter $a$, $a'$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Schalles in der Längsrichtung des Stabes und der Röhre verstanden.

Man bespreche die speciellen Fälle, wenn (1) $M$ sehr gross und (2) wenn es sehr klein ist, ferner wenn $ma = m'a'$ ist. [Math. Tripos, 1883.]

Beisp. 14. Die Enden eines gleichförmigen Stabes von der Länge $l$ sind durch Federn von gleicher Stärke mit zwei festen Punkten verbunden, die den Abstand $l$ von einander haben. Wenn die Längsschwingungen des Stabes durch

$$\xi = \{P \sin mx/l + Q \cos mx/l\} \sin rt$$

dargestellt werden, zu beweisen, dass

$$(m^2q^2 - l^2\mu^2) \operatorname{tg} m + 2mql\mu = 0$$

ist, worin $\mu$ die Stärke einer jeden der beiden Federn und $q$ das Verhältniss der Spannung zu der Ausdehnung des Stabes bezeichnet. [Math. Tripos, 1880.]

Beisp. 15. *Der Widerstand der Luft.* Nimmt man an, der Widerstand der Luft gegen die Schwingungen eines Fadens könne durch eine an jedem Element angreifende Kraft dargestellt werden, welche der Geschwindigkeit dieses Elementes proportional ist, so nimmt die Bewegungsgleichung die Gestalt an

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - 2f\frac{\partial\xi}{\partial t}.$$

Man soll die Wirkung des Widerstandes untersuchen, wenn der Faden zwischen zwei festen Punkten $A$, $B$ ausgespannt ist.

Um die Gleichung aufzulösen, entwickele man $\xi$ in eine Reihe von reellen oder imaginären Exponentialgrössen, wie $\xi = \Sigma M e^{hat+kx}$ und substituire in die Differentialgleichung; man findet

$$(ah + f)^2 = a^2k^2 + f^2.$$

Daraus erhält man für jeden Werth von $h$ zwei Werthe von $k$; bezeichnet man sie mit $\pm k$, so wird

$$\xi = \Sigma e^{hat}(Me^{kx} + M'e^{-kx}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Aus den Bedingungen des Problems folgt $\xi = 0$ für $x = 0$ und $x = l$ und für alle Werthe von $t$. Demnach ist $M = -M'$, $e^{kl} = e^{-kl}$. Nimmt man die Logarithmen, so ergibt sich, dass alle Werthe von $k$ imaginär und in $kl = i\pi\sqrt{-1}$ enthalten sind. Da der kleinste Werth von $k^2 = -\pi^2/l^2$ ist, so sind auch alle Werthe von $h$ imaginär, wenn der Widerstand so gering ist, dass $f < a\pi/l$ wird. Setzt man

$$k^2 = -q^2, \quad a^2p^2 = a^2q^2 - f^2,$$

so ist $ql = i\pi$ und

$$\xi = e^{-ft}\Sigma(A \sin pat + B \cos pat) \sin qx \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (A).$$

Ist der Widerstand so gross, dass $f > a\pi/l$ wird, so sind einige Werthe von $ah + f$ reell, nämlich diejenigen, welche durch die kleineren Werthe von $i$ bestimmt werden. Bezeichnet $\varrho$ einen von ihnen, so ist $\varrho^2 = -a^2q^2 + f^2$ und die entsprechenden Terme von $\xi$ sind

$$\xi = e^{-ft}\Sigma(Ae^{\varrho t} + Be^{-\varrho t}) \sin qx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B),$$

worin $f$ grösser als $\varrho$ ist.

Aus den Gleichungen (A) folgt: (1) bei jedem Ton, den der Faden hervorbringt, wird zu irgend einer gegebenen Zeit die Ausdehnung der Schwingung durch den Widerstand um denselben Theil ihres ursprünglichen Werthes reducirt, § 333; (2) die Lage der Knoten und Bäuche (welche durch sin $qx = 0$ bestimmt wird) ist die nämliche, wie die für keinen Widerstand; siehe § 261; (3) da

$$a^2p^2 = \frac{\pi^2 i^2 a^2}{l^2} - f^2$$

ist, so wird die Höhe des hervorgebrachten Tones (§ 613) vermindert und werden die tiefsten Töne am meisten verändert.

Der durch (A) dargestellte typische Term kann durch zwei Terme von der Form $e^{-ft}\sin(pat \pm qx)$ ausgedrückt werden. Jeder von ihnen stellt eine Welle von der Länge $\lambda = 2\pi/q$ und der Geschwindigkeit $v = pa/q$ dar; § 613. Mithin ist $v^2 = a^2 - \left(\frac{f\lambda}{2\pi}\right)^2$. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit aller Wellen durch den Widerstand vermindert wird; ist aber $f$ klein, so ist die Verringerung, da sie von dem Quadrat von $f$ abhängt, unbedeutend.

Beisp. 16. *Die Viscosität.* Eine Wirkung der Zähigkeit besteht darin, dass sie der Compression oder Ausdehnung eines Elementes des Fadens, dessen Enden sich mit etwas verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, entgegenwirkt; siehe § 368, Beisp. 2. Um dies analytisch darzustellen, wollen wir annehmen, die Spannung, welche ein ausgedehntes Element des Fadens ausübt, sei nicht einfach nur durch das Hooke'sche Gesetz gegeben, sondern habe noch ein Zusatzglied, das der relativen Geschwindigkeit der Enden des Elementes proportional ist. Diese relative Geschwindigkeit ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) dx;$$

man setze also

$$T = E\frac{\partial \xi}{\partial x} + 2Fm\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t}.$$

Substituirt man diesen Werth von $T$ in die Differentialgleichung des § 612, so wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2F\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t},$$

worin $E = ma^2$ ist. Liegen nun die Enden des Fadens fest, zu beweisen, dass

$$\xi = \Sigma e^{-Fq^2t}(A \sin pat + B \cos pat) \sin qx$$

wird, worin $ql = i\pi$ und $p^2 = q^2 - q^4F^2/a^2$ ist.

Daraus leite man ferner ab, dass (1) die Lage der Knoten und Bäuche durch die Zähigkeit nicht beeinflusst wird, dass (2) der Ton um so schneller erlischt, je grösser die Anzahl der Knoten ist, wobei der Grundton zuletzt verschwindet, (3) dass die Wellen von kurzer Länge merklich schneller durch die Zähigkeit vertilgt werden, als lange Wellen.

Wenn $i$ gross ist, so hat der Faden sehr viele Knoten und Bäuche und die relative Geschwindigkeit benachbarter Massenpunkte ist grösser, als dann, wenn nur wenige Knoten vorhanden sind. Man kann daher erwarten, dass die Zähigkeit einen grösseren Einfluss auf die Zerstörung der ersteren Bewegungstypen, als auf die der letzteren ausübt. In der That ergibt sich, dass die grossen Werthe von $i$ den Exponenten in $e^{-Fq^2t}$ wachsen lassen und wenn $i$ gross genug ist, dass $p$ imaginär wird und der Bewegungstypus die Form $Le^{-\varrho t}\sin qx$ annimmt; siehe § 333, Beisp. 2.

Beisp. 17. Das eine Ende $A$ eines Fadens liegt fest, während das andere $B$ nach dem Zwangsgesetz $\xi = G \sin pat$ erschüttert wird. Wenn man den Widerstand der Luft in Rechnung zieht und $x$ von $A$ aus misst, zu beweisen, dass die erzwungene Schwingung durch

$$\xi = N\{e^{sx} \sin(pat + qx + \alpha) - e^{-sx} \sin(pat - qx + \alpha)\}$$

dargestellt wird, worin $q^2 - s^2 = p^2$ und $asq = fp$ ist. Ferner hat man

$$\operatorname{cotg} \alpha = - \operatorname{cotg} ql \cdot \operatorname{tgh} sl, \quad N^2(\cosh 2sl - \cos 2ql) = \frac{1}{2} G^2.$$

Setzt man in dem typischen Term der Gleichung (1), Beisp. 15,

$$h = r \pm p\sqrt{-1}, \quad k = s \pm q\sqrt{-1},$$

so erhält man

$$\xi = \Sigma\{Ne^{rat+sx} \sin(pat + qx + \alpha) + N'e^{rat-sx} \sin(pat - qx + \alpha')\} \qquad (2),$$

worin

$$(ra + f)^2 - p^2a^2 = a^2(s^2 - q^2) + f^2 \quad \text{und} \quad (ra + f)p = asq$$

ist. In dieser Form der Lösung sind die Constanten $r, s, p, q$ ihrem Wesen nach reell. In dem Beispiel ist $\xi = 0$ für $x = 0$ und $\xi = G \sin pat$ für $x = l$, daher $N' = -N$, $\alpha' = \alpha$, $r = 0$. Ausserdem sind noch zwei weitere Gleichungen vorhanden, die man erhält, wenn man die Coefficienten von $\sin pat$ und $\cos pat$ gleich $G$ bez. Null setzt. Sie führen zu dem gesuchten Resultat.

Da die Welle die Geschwindigkeit $v = pa/q$ hat, so ergibt sich, wenn man $v$ durch $p$ und $f$ ausdrückt, dass $v^2 - a^2$ negativ wird, dass also die Geschwindigkeit durch Reibung vermindert wird.

Wenn die Anfangsbedingungen gegeben sind, so addiren wir zu der erzwungenen Schwingung die freien Schwingungen, welche einem an den Enden befestigten Faden entsprechen. Sie wurden in Beisp. 15 ermittelt und wir müssen nur $p'$ anstatt $p$ setzen, um die Buchstaben zu unterscheiden. Die Werthe von $A$ und $B$ ergeben sich dann mit Hülfe der Fourier'schen Regel. In schwierigeren Fällen nehmen wir die Multiplicatoren zu Hülfe, siehe § 383.

*Die Fluthwelle.* Die Gleichung, welche die Längsbewegung der Fluthwelle in einem Fluss oder Kanal von gleichmässiger Tiefe angibt, ist mit derjenigen identisch, welche die Längsschwingungen eines Fadens darstellt, wenn der Widerstand in beiden Fällen sich durch $2f\partial\xi/\partial t$ ausdrücken lässt. Auch ist die Höhe der Fluthwelle der Spannung des Fadens proportional. Das Fallen und Steigen der See an der Mündung des Flusses lässt sich daher durch eine Spannung $G \sin pat$ darstellen und, wenn man annimmt, im Abstand $l$ von der Mündung sei ein Wehr vorhanden, so kann man den Ausdruck für $\xi$ bei dem Faden benutzen, um die Höhe der Fluth an jedem Punkt des Flusses zu finden. Die Constanten $N, N', \alpha, \alpha'$ sind durch die Bedingungen $\xi = 0$ für $x = 0$ an dem Wehr und $E\partial\xi/\partial x = G \sin pat$ für $x = l$ zu bestimmen. Das schliessliche Resultat für die Höhe der Fluth findet man in Airy's *Tides and Waves,* art. 333.

§ 626. **Der Zusammenstoss von Stäben.** Beisp. 1. Zwei vollkommen elastische Stäbe $AB$, $CD$ von derselben Gestalt und dem nämlichen Material aber der Länge $l_1$, $l_2$ werden in dieselbe Gerade gelegt. $AB$ wird mit der Geschwindigkeit $V$ fortgeschleudert und trifft $CD$, das sich in Ruhe befindet; beide Stäbe haben dabei keine Anfangscompression. Es sei $l_1$ kleiner als $l_2$; man finde, wann sich die Stäbe trennen.

Wir nehmen an, die Stäbe seien in Berührung miteinander, wenn der Abstand zwischen ihren Enden $B$, $C$ dem Abstand der Molekularwirkung gleich wird. Die beiden Stäbe lassen sich nun so behandeln, als ob sie Theile eines einzigen Stabes wären, und dabei die beiden Theile, so lange die Stäbe

gegeneinander drücken, d. h. so lange die Spannung am Berührungspunkt negativ ist, in Berührung blieben. Sie trennen sich, wenn die gemeinschaftliche Spannung bei $B$ und $C$ positiv wird. Sobald dies eintritt, beginnen die Stäbe sich als getrennte Körper zu bewegen; ihre gegenseitige Action kann aber von Neuem anfangen, wenn diese Bewegung die Enden $B$ und $C$ wieder in den Abstand der Molekularwirkung bringt.

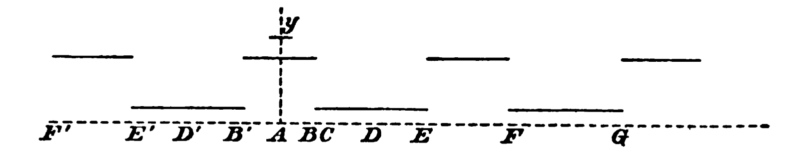
Das Problem des Zusammenstosses von Stäben hat Cauchy, *Académie des Sciences,* 1827 und *Bulletin des Sciences de la Société Philomathique,* 1826 und Poisson, *Traité de Mécanique,* 1833, Bd. 2, behandelt. In *Liouville's Journal,* Bd. 12, 1867 befindet sich ein langer Aufsatz von 140 Seiten von Saint-Venant, in welchem er ausführlich auf die Bedingungen der Trennung eingeht. Diese grossen Autoritäten weichen in der Auslegung ihrer Resultate und speciell bei der Angabe der Bedingungen, unter denen die Trennung stattfindet, beträchtlich von einander ab.

$P$ sei irgend ein Punkt eines der beiden Stäbe und $v$ seine Geschwindigkeit. Ist $s$ die Dilatation oder Ausdehnung eines Elementes bei $P$ pro Längeneinheit, so ist nach § 612, $s = \partial\xi/\partial x$ und ebenso auch $s = T/E$. Man hat, wenn $x$ von $A$ nach $D$ hin gemessen wird,

$$v = \varphi(at - x) + \psi(at + x), \quad as = -\varphi(at - x) + \psi(at + x).$$

Um $\varphi$ und $\psi$ zu finden, benutzen wir die folgenden Bedingungen: (1) für $t = 0$ ist $v = V$ von $x = 0$ bis $x = l_1$, $v = 0$ von $x = l_1$ bis $x = l_1 + l_2$, $s = 0$ von $x = 0$ bis $x = l_1 + l_2$, (2) für $x = 0$ ist immer $s = 0$ und ebenso für $x = l_1 + l_2$.

Es ergibt sich leicht, dass die Functionen $\varphi$ und $\psi$ dieselben sind und dass die Curve $y = \varphi(x)$ aus einer Reihe endlicher Geraden besteht, deren Längen abwechselnd $2l_1$ und $2l_2$ gleichkommen, während die Ordinaten $\frac{1}{2}V$ bez. Null sind. Sie werden in dem Diagramm dargestellt; die $y$-Axe theilt das System symmetrisch.




Mit Hülfe dieser Figur kann man den Bewegungszustand eines Punktes $P$ im Abstand $x$ von $A$ zu einer beliebigen Zeit $t$ leicht ermitteln. Man trage $AP'$ gleich $AP$ in negativer Richtung auf und lasse zwei Punkte $R$, $R'$ von $P$ bez. $P'$ ausgehen und beide mit der Geschwindigkeit $a$ in positiver Richtung vorrücken. Die Gleichungen zeigen, dass zu der Zeit $t$ nach dem Anfang des Zusammenstosses

$$v \text{ bei } P = \text{der Ordinate von } R' + \text{der Ordinate von } R,$$
$$as \text{ bei } P = -\text{der Ordinate von } R' + \text{der Ordinate von } R$$

ist.

Um zu bestimmen, wann sich die Stäbe trennen, muss man ausfindig machen, wann die gemeinschaftliche Spannung bei $B$ und $C$ verschwindet und positiv wird. $R$ und $R'$ mögen also von $B$ und $B'$ ausgehen; zuerst sind die Ordinaten für $R$ und $R'$ gleich Null bezügl. $\frac{1}{2}V$. Nach der Zeit $at = 2l_1$ erreicht $R'$ den Punkt $B$ und seine Ordinate wird dann Null. Da $l_1$ kleiner als $l_2$ ist, so hat der Punkt $R$ noch nicht $E$ erreicht, wenn $DE = BD$ ist, und seine Ordinate ist noch immer Null. Sowohl $v$ als $s$ werden daher in diesem Augenblick an dem Berührungspunkt $B$ Null.

Die Bildpunkte $R_1'$ und $R_1$ irgend eines Massenpunktes des Stabes $AB$ liegen offenbar immer zwischen $R'$ und $R$; wenn also $R'$ den Punkt $B$ erreicht, so befinden sich die Bildpunkte eines jeden Massenpunktes des Stabes auf $BE$. Man überzeugt sich daher leicht, dass in diesem Augenblick sowohl $v$ als $s$ für jeden Punkt des Stabes $AB$ Null ist und Null bleiben muss, bis der Punkt $R$, der von $B$ oder $C$ ausging, in $E$ ankommt.

Der von $C$ abgehende Punkt $R$ aber langt zu der durch $at = 2l_2$ gegebenen Zeit in $E$ an und seine Ordinate wird dann gleich $\frac{1}{2}V$. Die Spannung bei $C$ wird nun positiv und die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}V$; aus beiden Ursachen bewegt sich also das Ende $C$ von dem Ende $B$ hinweg. Die Spannung und Geschwindigkeit bei $B$ würden sofort ähnlichen Aenderungen unterliegen, wenn die Stäbe in Berührung blieben. Dies ist aber nicht der Fall. Da das Ganze von $A$ bis $B$ in diesem Augenblick ohne Geschwindigkeit und ohne Spannung ist, so bleibt das Ende $B$ in Ruhe.

Das Resultat ist: (1) die Stäbe stossen während der Zeit $2l_1/a$ gegeneinander; (2) sie bleiben in Berührung, aber ohne aufeinander zu wirken, während der zusätzlichen Zeit $2(l_2 - l_1)/a$; (3) der Stab $CD$ trennt sich alsdann von $AB$ und lässt ihn im Zustand der Ruhe ohne Spannung in irgend einem Theil zurück.

Haben die Stäbe verschiedene Anfangsgeschwindigkeit, wie z. B. $V_1$ und $V_2$, so kann man den zweiten Stab dadurch zur Ruhe bringen, dass man jedem Massenpunkt beider Stäbe eine $V_2$ gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeit ertheilt. Die Ergebnisse ändern sich nicht; nur hat schliesslich $AB$, anstatt in Ruhe zu bleiben, die Geschwindigkeit $V_2$.

Bei dem Zusammenstoss der beiden Stäbe ist die ganze Bewegungsgrösse $MV$ von dem einen auf den anderen übertragen worden, dessen Schwerpunkt sich daher mit der Geschwindigkeit $Vl_1/l_2$ wegbewegt. Auch die lebendige Kraft ist auf den zweiten Stab übergegangen, von der ein Theil $\frac{1}{2}MV^2 l_1/l_2$ in die lebendige Kraft der Translation und der Rest $\frac{1}{2}MV^2(1 - l_1/l_2)$ in die Energie (kinetische und potentielle) der inneren Schwingung verwandelt wurde. Diese innere Energie wird Null, wenn die beiden Stäbe gleich lang sind.

Es empfiehlt sich, die in der Theorie erhaltenen Resultate mit dem Gesetz für den Zusammenstoss zu vergleichen, das Newton aus Beobachtungen abgeleitet hat; Bd. 1, Art. 179. Da bei dem Zusammenstoss scheinbar lebendige Kraft verloren geht, so sind die Stäbe, auch wenn festgesetzt worden war, dass sie elastisch sein sollen, in der Newton'schen Formel als unvollkommen elastisch anzusehen. Setzt man in seiner Formel $u' = 0$, so wird der Coefficient $e$ offenbar gleich $l_1/l_2$. Man beachte, dass er nicht lediglich von der Beschaffenheit des Materials der beiden Stäbe abhängt.

Beisp. 2. Zwei elastische Stäbe $AB$, $CD$ von der Länge $l_1$, $l_2$; der Masse $M_1$, $M_2$ und der Anfangsgeschwindigkeit $V_1$, $V_2$ aber ohne anfängliche elastische Formänderung stossen in derselben Geraden $ABC$ gegeneinander. Wenn $A$ der Coordinatenanfang ist, zu zeigen, dass die Verrückungen für die beiden Stäbe

$$\xi_1 = \frac{M_1 V_1 + M_2 V_2}{M_1 + M_2} t + (V_1 - V_2) \frac{M_1 a_1}{l_1} \sum \frac{2}{p^2} \frac{\sin(pl_1/a_1)\sec^2(pl_1/a_1)\cos(px/a_1)\sin pt}{M_1 \sec^2(pl_1/a_1) + M_2 \sec^2(pl_2/a_2)},$$

$$\xi_2 = \frac{M_1 V_1 + M_2 V_2}{M_1 + M_2} t + (V_1 - V_2) \frac{M_2 a_2}{l_2} \sum \frac{2}{p^2} \frac{\sin(pl_2/a_2)\sec^2(pl_2/a_2)\cos(px/a_2)\sin pt}{M_1 \sec^2(pl_1/a_1) + M_2 \sec^2(pl_2/a_2)},$$

$$\frac{M_1 a_1}{l_1} \operatorname{tg} \frac{pl_1}{a_1} + \frac{M_2 a_2}{l_2} \operatorname{tg} \frac{pl_2}{a_2} = 0$$

sind, worin $\Sigma$ die Summirung für alle durch die dritte Gleichung gegebenen

Werthe von $p$ angibt und $a_1$, $a_2$ die Winkelgeschwindigkeiten in den beiden Stäben sind. [Saint-Venant.]

Zu entsprechenden Ausdrücken kommt auch Poisson in dem von ihm untersuchten Fall.

Beisp. 3. Zwei Stäbe $AB$, $CD$ von der Länge $l_1$, $l_2$ und der Geschwindigkeit $V_1$, $V_2$ stossen in derselben Geraden zusammen und in dem Moment der Berührung sind die Spannungen der Stäbe $Es_1$ bezüglich $Es_2$. Man zeige, dass die beiden Stäbe sich entweder sofort trennen oder eine Zeit lang in Berührung bleiben, je nachdem $V_2 + as_2$ grösser oder kleiner als $V_1 - as_1$ ist. [Saint-Venant.]

Beisp. 4. Zwei Stäbe von der Länge $l_1$, $l_2$ treffen sich und bewegen sich im Moment der Berührung mit der Geschwindigkeit $V_1$, $V_2$ und haben die Dilatationen $s_1$, $s_2$ gleichförmig über ihre Längen vertheilt. Wenn $V_1 \pm as_1$, $V_2 + as_2$ positiv und die beiden Werthe des ersten Ausdrucks grösser als der zweite sind, zu beweisen, dass die Stäbe während der Zeit $2l_1/a$ widereinander stossen und ohne Reaction während der Zeit $(l_2 - 2l_1)/a$ in Berührung bleiben, wenn $l_2$ grösser als $2l_1$ ist und sich alsdann trennen, wenn $s_2$ negativ ist. Bei positivem $s_2$ dagegen drücken sie wieder während der Zeit $2l_1/a$ gegeneinander; ihre Reaction setzt für die Zeit $(l_2 - 2l_1)/a$ aus und dann trennen sie sich.

§ 627. **Die Energie der Fädentheile.** *Man soll die Energie eines Theiles eines schwingenden Fadens finden.* Die Bezeichnung sei dieselbe wie in den §§ 612, 616.

Was die potentielle Energie anlangt, so ist die bei der Ausdehnung des Fadens von seiner unausgedehnten Länge $dx$ zu seiner ausgedehnten Länge $ds'$ verrichtete Arbeit nach Bd. 1, § 383 gleich

$$\frac{1}{2}E\left(\frac{ds'}{dx}-1\right)^2 dx.$$

Finden die Schwingungen nur der Länge nach statt, so ist $ds' = dx + d\xi$ und diese Arbeit

$$\frac{1}{2}E\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 dx.$$

Sind dagegen Schwingungen nach der Länge und nach der Seite vorhanden, so hat man

$$(ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 = (dx')^2\left\{1 + \left(\frac{l}{l'}\frac{dy'}{dx}\right)^2\right\},$$

weil man in dem zweiten Glied, da $y'$ klein ist, $x' = xl'/l$ setzen kann. Man erhält daher

$$\frac{ds'}{dx} = 1 + \frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{2}\frac{l}{l'}\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2.$$

Die bei der Ausdehnung des Elementes verrichtete Arbeit ist also

$$\frac{1}{2}E\left\{\frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{2}\frac{l}{l'}\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2\right\}^2 dx = \left\{\frac{1}{2}E\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\frac{l}{l'}\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2\right\}dx,$$

weil $E\,d\xi/dx = T$ ist und man in dem zweiten Glied die Gleichgewichtsspannung $T_0$ für die variabele Spannung $T$ setzen kann, wenn nur die Quadrate kleiner Grössen beibehalten werden.

Die kinetische Energie ist

$$\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2\right\}dx.$$

Wenn die Geschwindigkeit einer Welle der Längsschwingung $a$ ist und die einer Welle der seitlichen Schwingung $b$, so ist die ganze Energie des Elementes $dx$

$$\frac{1}{2}\left\{a^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2\right\}m\,dx + \frac{1}{2}\left\{b^2\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right)^2\right\}dx.$$

*Man soll die Intensität einer Reihe von Wellen finden, die durch*

$$\xi = \Sigma A \sin\{n(at - x) + \alpha\}$$

*dargestellt werden.*

Wenn die Wellen durch einen einzelnen Term gegeben sind, findet man durch Substitution die in der Länge $dx$ enthaltene Energie

$$= \frac{1}{2} m\, dx \cdot A^2 n^2 a^2$$

ist. Man beachte, dass $Ana$ der Coefficient des trigonometrischen Terms in dem Ausdruck für $\partial\xi/\partial t$ ist. *Die Intensität einer Welle wird daher durch* $\frac{1}{2} m C^2$ *gemessen, worin* $m$ *die Masse der Längeneinheit und* $C$ *die Amplitude der Geschwindigkeit des Massenpunktes ist.*

Wenn man alle Glieder in dem Ausdruck für $\xi$ berücksichtigt, so ist bekanntlich nach § 74 die ganze Energie die Summe der Energien, welche den einzelnen Gliedern zu verdanken sind. Aber auch ohne diesen Paragraphen erkennt man, dass die Zusatzterme, welche durch die Quadrirung der durch $\partial\xi/\partial x$ und $\partial\xi/\partial t$ dargestellten Summirungen eingeführt werden, sämmtlich trigonometrisch sind. Wie in § 73 erklärt wurde, wird die Intensität durch die über eine lange Zeit erstreckte mittlere Energie gemessen. Man findet das Mittel, indem man nach $t$ integrirt von $t = 0$ bis $t = \tau$, durch $\tau$ dividirt und dann $\tau$ sehr gross macht. Die trigonometrischen Glieder verschwinden ohne Unterschied, wenn $\tau$ gross ist, und es ergibt sich, dass die Energie der ganzen Reihe die Summe der Energien der einzelnen Glieder ist.

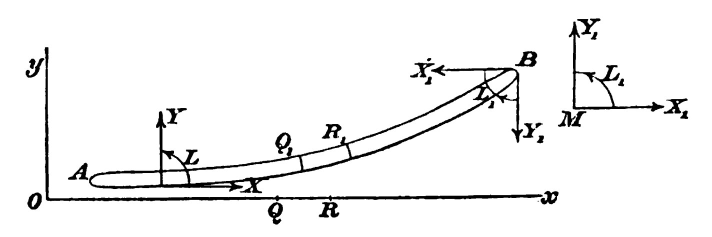
Beisp. Wenn der Faden zwischen zwei festen Punkten ausgespannt ist, so hat man $\xi = C \sin nx \sin(nat + \gamma)$, worin $nl = i\pi$ ist; man beweise, dass die ganze Energie durch $\frac{1}{4} m l a^2 \Sigma C^2 n^2$ ausgedrückt wird.

Prof. Donkin hat in seinem *Treatise on Acoustics*, 1870, S. 128 die Energie eines Fadens durch eine geistreiche Anwendung der Subtraktionsmethode gefunden.

§ 628. **Die Schwingungen der Stäbe.** *Ein dünner gleichförmiger gerader Stab, an dessen beiden Enden Kräfte angreifen, befindet sich im Gleichgewicht und macht, wenn er gestört wird, kleine Schwingungen in einer Ebene. Man soll die Bewegungsgleichungen aufstellen.*

Die Linie, welche durch den Schwerpunkt eines jeden senkrecht zu dem Stab geführten Querschnittes geht, heisst seine Axe. Die Axe $AB$ in der Gleichgewichtslage sei die $x$-Axe und die Ebene der Schwingungen die $xy$-Ebene. $D$ sei die Dichtigkeit des Stabes, $\omega$ die Fläche eines senkrecht geführten Schnittes und $\omega k^2$ das Trägheitsmoment dieser Fläche für eine Gerade, welche durch seinen Schwerpunkt geht und senkrecht auf der Schwingungsebene steht.

Es sei $P$ ein Punkt der Axe des Stabes; der endliche Theil $PB$ ist unter der Wirkung der umgekehrten Effectivkräfte und der an den Enden $P$ und $B$ an-




greifenden Kräfte im Gleichgewicht. $x$ sei die Abscisse von $P$ in der Gleichgewichtslage, $(x + \xi, \eta)$ seine Coordinaten zur Zeit $t$.

Die Action des einen Theiles $AP$ auf den anderen $PB$ werde zerlegt (1) in die beiden Kräfte $X$ und $Y$, die bei $P$ parallel den Axen angreifen und (2) das Paar $L$, das positiv in der Richtung genommen wird, welche der Bewegung der Uhrzeiger entgegengesetzt ist. Ebenso mögen die Kräfte an dem Ende $B$, welche an einer Masse $M$ angreifen, an die $B$ befestigt ist, in die Componenten $X_1$, $Y_1$, $L_1$ zerlegt werden. Die Reactionen auf den Theil $PB$ des Stabes sind dann $-X_1$, $-Y_1$ und $-L_1$. Im Gleichgewichtszustand ist sowohl $Y$ als $Y_1$ Null und $X$ sowohl wie $X_1$ gleich $-T$, wenn $T$ die gegebene Spannung des Stabes bezeichnet. Während der Bewegung sind daher $Y$ und $Y_1$ kleine Grössen und unterscheiden sich $X$ sowohl als $X_1$ von $T$ um kleine Grössen.

$QR$ sei ein Element der Axe des Theiles $PB$ des Stabes, wenn er sich im Gleichgewicht befindet und $Q_1 R_1$ seine Lage zur Zeit $t$. Die Coordinaten von $Q$ und $Q_1$ seien $(x_1, 0)$ bez. $(x_1 + \xi_1, \eta_1)$ und $\psi_1$ sei der kleine Winkel, den die Tangente an $Q_1 R_1$ mit der $x$-Axe macht. Man betrachte die Massenpunkte, die in einem elementaren Stück des Stabes enthalten sind, welches von zwei zu $QR$ senkrechten Ebenen begrenzt wird. Die linearen Effectivkräfte sind $D\omega dx \xi_1''$ und $D\omega dx \eta_1''$, worin die Accente Differentialquotienten nach der Zeit bezeichnen. Man nimmt gewöhnlich auch an, die Winkelbewegungsgrösse um eine Axe, die durch den Schwerpunkt senkrecht zur Schwingungsebene geht, sei $Ddx\omega k^2 \psi_1'$.

Nimmt man nun die Momente für den endlichen Stab $PB$ um die momentane Lage von $P$, so wird

$$\int \{\eta_1''(x_1 + \xi_1 - x - \xi) - \xi_1''(\eta_1 - \eta) + k^2 \psi_1''\} \omega D dx_1$$
$$= L - L_1 - Y_1(l - x - \xi) + X_1(h - \eta),$$

worin $l$ und $h$ die Coordinaten von $B$ zur Zeit $t$ sind und die Grenzen des Integrals von $x_1 = x$ bis $x_1 = l$ gehen. Da alle mit griechischen Buchstaben bezeichneten Grössen klein sind, so vernachlässigen wir ihre Producte. Bedenkt man ferner, dass $Y_1$ klein und $X_1$ nahezu gleich $-T$ ist, so erhält man

$$L - \int_x^l \omega \eta_1''(x_1 - x) D dx_1 - \int_x^l \omega k^2 \psi_1'' D dx_1 - L_1 - Y_1(l - x) - T(h - \eta) = 0 \quad (1),$$

wie sich auch schon aus der Figur ergibt.

Nach einem Satz der Statik kann man $L = \pm F/\varrho$ setzen, worin $\varrho$ der Krümmungsradius bei $P$, $F = k^2(E\omega + T)$ und $E$ eine Constante ist, welche von dem Material des Stabes abhängt und gewöhnlich Young's Elasticitätsmodulus genannt wird. (Man vergleiche die Note zu § 631 an dem Ende des Buches.) Das Moment $L$ in der Gleichung (1) ist in positiver Richtung genommen worden; wir setzen daher, weil der Stab sich gerade zu strecken sucht, $L = -F/\varrho$.

Da wir die Quadrate kleiner Grössen weglassen, so schreiben wir

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Differenzirt man die Gleichung (1) nach $x$ und bedenkt, dass $L_1$, $Y_1$, $l$, $T$ und $h$ von $x$ unabhängig sind, so wird

$$-F\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \int_x^l \omega \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} D dx_1 + \omega k^2 D \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + Y_1 + T\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2),$$

wie man leicht erkennt, wenn man sich an den Satz in der Integralrechnung erinnert, nach welchem

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^l \varphi(x, z)\, dz = -\varphi(x, x) + \int_x^l \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial x} dz \text{ ist.}$$

Durch wiederholte Differentiation nach $x$ erhält man

$$-F\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}-\omega D\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\omega k^2 D\frac{\partial^4\eta}{\partial x^2\partial t^2}+T\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (3).$$

Zerlegt man parallel zu der $x$- und $y$-Axe, so findet man auf dieselbe Art

$$\int\xi_1''\omega D dx_1 = X - X_1, \qquad \int\eta_1''\omega D dx_1 = Y - Y_1,$$

worin die Grenzen von $x_1 = x$ bis $x_1 = l$ gehen. Differenzirt man, so wird

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\omega D\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial x}+\omega D\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=0 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (4).$$

Die beiden letzten Gleichungen erhält man auch, wenn man die Kräfte, die an einem einzelnen Element bei $P$ angreifen, betrachtet.

Da $\omega k^2$ sehr klein ist, so kann man die Glieder, in denen es auftritt, vernachlässigen, wenn es nicht mit $E$ zu multipliciren ist. Den dritten Term in Gleichung (3) pflegt man daher wegzulassen. Wenn der Stab in seiner Gleichgewichtslage nicht ausgedehnt ist, so hat man auch $T=0$. Treten diese Vereinfachungen ein, so nimmt die Gleichung (3) die Gestalt

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+a^4\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}=0$$

an, worin $a^4 = k^2 E/D$ ist.

Die Theorie der seitlichen Schwingungen von Stäben hat Poisson in seiner Abhandlung über das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer Körper aufgestellt, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Vol. VIII; siehe auch seinen *Traité de Mécanique*, Vol. II, Art. 518. Der Term, welcher $\omega k^2\psi''$ enthält, findet sich bei Poisson nicht vor; er wurde von Clebsch in seiner Elasticitätstheorie angegeben; man sehe auch Donkin's *Acoustics*, 1870.

§ 629. Wenn die Differentialgleichung (5) integrirt wird, so sind die willkürlichen Functionen oder Constanten, die auftreten, mittelst der Bedingungen an den Enden und der Anfangsbewegung zu bestimmen.

An dem Ende $B$ ist $x=l$ und die Integrale in den beiden Gleichungen (1) und (2) verschwinden. Bedenkt man ferner, dass die Glieder, welche $\psi''$ und $T$ enthalten, wegzulassen sind, so werden diese Gleichungen für $x=l$

$$k^2 E\omega\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+L_1=0, \qquad k^2 E\omega\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}-Y_1=0 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (6).$$

Diese beiden Resultate kann man auch ohne die Gleichungen (1) und (2) leicht erhalten. Es sei $CB$ das letzte Element des Stabes und $BC=s$. Ferner seien $\varrho$, $\varrho'$ die Krümmungsradien bei $B$ und $C$; nimmt man dann die Momente um $C$ und bedenkt, dass der Stab nahezu grade ist, so wird

$$\frac{Ek^2\omega}{\varrho'}+L_1+Y_1 s=0;$$

es ist aber nach dem Taylor'schen Theorem

$$\frac{1}{\varrho'}=\frac{1}{\varrho}-s\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

Substituirt man und setzt die Potenzen von $s$ gleich, so ergeben sich die Gleichungen (6) sofort.

Ist das Ende $B$ frei, so ist $L_1=0$, $Y_1=0$; die Bedingungen (6) werden daher

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0 \text{ für } x=l.$$

Ist das Ende $B$ an einen Punkt der $x$-Axe befestigt, so ist zwar $L_1 = 0$, $Y_1$ aber kann einen beliebigen Werth haben; die Bedingungen sind daher

$$\eta = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0.$$

Ist dagegen das Ende $B$ so befestigt, dass nicht nur der Punkt $B$ sondern auch die Tangente in $B$ festliegt, so sind die Bedingungen $\eta = 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ für $x = l$. Die Reactionen bei $B$ ergeben sich dann aus den Gleichungen (6).

Ist das Ende $B$ frei, aber eine endliche Masse $M$ starr an ihm befestigt, so setzen wir

$$L_1 = MK^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \qquad Y_1 = M \frac{\partial^2 h}{\partial t^2},$$

worin $MK^2$ das Trägheitsmoment der Masse und $h$ den Werth von $\eta$ für $x = l$ bezeichnet. Setzt man $\psi$ für $\partial \eta / \partial x$, so sind die Endbedingungen für $\eta = h$

$$k^2 E \omega \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + MK^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \, \partial t^2} = 0, \quad k^2 E \omega \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - M \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0.$$

Ist die Masse ein materieller Punkt, so setze man Null statt $k^2$.

Befindet sich die Masse $M$ in irgend einem Punkt $C$ des Stabes zwischen $A$ und $B$, so behandle man jeden der Theile $AC$, $CB$ für sich und verfahre so, wie bei dem entsprechenden Problem für Fäden. Der Hauptunterschied besteht darin, dass (1) auf der einen Seite der Masse das Paar $L_1$, auf der anderen das Paar $L_2$ auftritt, und dass (2) der Steifigkeit des Stabes wegen der Werth von $\partial \eta / \partial x$ auf beiden Seiten der Masse gleich sein muss.

§ 630. Beisp. 1. Die Schwingungen eines Stabes zu finden, dessen beide Enden frei sind.

Die Bewegungsgleichung ist

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Es sei

$$\eta = \Sigma (P \sin m^2 a^2 t + Q \cos m^2 a^2 t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2);$$

$P$ und $Q$ sind dann Functionen von $x$, welche den Gleichungen

$$\frac{\partial^4 P}{\partial x^4} - m^4 P = 0, \qquad \frac{\partial^4 Q}{\partial x^4} - m^4 Q = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

genügen; mithin ist

$$P = A \sin mx + B \cos mx + \tfrac{1}{2} H \left(e^{mx} - e^{-mx}\right) + \tfrac{1}{2} K \left(e^{mx} + e^{-mx}\right) \quad (4).$$

An jedem Ende ist $\partial^2 \eta / \partial x^2 = 0$ und $\partial^3 \eta / \partial x^3 = 0$. Dies gibt für $x = 0$, $A = H$ und $B = K$ und für $x = l$

$$A \left(2 \sin ml - e^{ml} + e^{-ml}\right) = B \left(e^{ml} + e^{-ml} - 2 \cos ml\right),$$
$$B \left(2 \sin ml + e^{ml} - e^{-ml}\right) = A \left(2 \cos ml - e^{ml} - e^{-ml}\right).$$

Eliminirt man $B/A$, so wird

$$\tfrac{1}{2} \left(e^{ml} + e^{-ml}\right) \cos ml - 1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Die Gleichung für $Q$ führt offenbar zu demselben Resultat.

Bezeichnen $m_1$, $m_2$, etc. die Wurzeln der Gleichung (5), so sind die Perioden der möglichen Schwingungen des Stabes $2\pi / m_1^2 a^2$, $2\pi / m_2^2 a^2$, etc. Dies stimmt mit dem von Poisson gefundenen Resultat überein.

Man erkennt leicht, dass man dem Ausdruck für $\eta$ die Form

$$\eta = \Sigma X_m (L \sin m^2 a^2 t + M \cos m^2 a^2 t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

$$X_m = (e^{ml} + e^{-ml} - 2\cos ml)\left(\sin mx + \tfrac{1}{2} e^{mx} - \tfrac{1}{2} e^{-mx}\right)$$
$$+ \left(2\sin ml - e^{ml} + e^{-ml}\right)\left(\cos mx + \tfrac{1}{2} e^{mx} + \tfrac{1}{2} e^{-mx}\right) \quad . \quad . \quad (7)$$

geben kann, worin $\Sigma$ die Summirung für alle Werthe von $m$, die der Gleichung (5) genügen, angibt und $L$, $M$ zwei unbestimmte Constanten sind.

Ist der Stab an beiden Enden festgeklemmt, also so, dass die Endpunkte sowohl als die Tangenten in den Endpunkten festliegen, so sind die Endbedingungen $\eta = 0$ und $\partial y / \partial x = 0$. Verfährt man, wie oben, so gelangt man offenbar zu derselben Gleichung für $m$. *Die Schwingungsperioden eines an beiden Enden festgeklemmten geraden Stabes sind daher dieselben wie die eines an den Enden freien Stabes.*

Wenn die Anfangsverhältnisse der Bewegung durch $\eta = \varphi(x)$ und $\eta' = \psi(x)$ gegeben sind, so lassen sich die Werthe von $L$ und $M$ durch die Methode der Multiplicatoren ermitteln. Man denke sich, die Werthe von $\eta$ für alle Elemente des Stabes seien in aufeinander folgenden Horizontalreihen niedergeschrieben; nach § 399 wird dann der richtige Multiplicator zur Lostrennung der Verticalreihe mit $\cos m^2 a^2 t$ durch den Typus $D\,dx\,X_m$ dargestellt. Man erhält daher nach § 398

$$\int \varphi(x) X_m dx = M \int X_m^2 dx, \qquad \int \psi(x) X_m dx = L a^2 m^2 \int X_m^2 dx \quad . \quad . \quad (8),$$

worin die Grenzen aller Integrale $x = 0$ und $x = l$ sind.

Ist $y = LX$ irgend ein Integral der Differentialgleichung $m^4 \dfrac{d^4 y}{dx^4} = y$, so kann man das Integral $\int X^2 dx$ von $x = x_0$ bis $x = x$ finden und durch die Werthe von $X$, $X'$, $X''$, $X'''$ an den Grenzen ausdrücken, wobei die Accente Differentialquotienten nach $x$ bezeichnen. Um dies auszuführen, multipliciren wir die Differentialgleichung mit $y$ und integriren. Es ist dann

$$m^4 \int y\,dy''' - \int y^2 dx = 0;$$

daher

$$m^4 [yy''' - y'y'']_{x_0}^{x} + m^4 Y_2 - Y_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

worin $Y_0 = \int y^2 dx$, $Y_2 = \int y''^2 dx$ ist. Darauf multiplicire man die Differentialgleichung mit $y'$ und integrire. Man erhält

$$m^4 \int y'\,dy''' - \int y' y\,dx = 0;$$

daher

$$m^4 \left(y'y''' - \tfrac{1}{2} y''^2\right) - \tfrac{1}{2} y^2 = \tfrac{1}{2}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

worin $\alpha$ eine Constante bedeutet, welche dem doppelten Werth der linken Seite für die untere Grenze gleichkommt. Integrirt man noch einmal, so wird

$$2m^4 [y'y'']_{x_0}^{x} - 3m^4 Y_2 - Y_0 = \alpha (x - x_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Diese Gleichungen bestimmen $Y_2$ und $Y_0$. Man findet

$$4 Y_0 = 4\int y^2 dx = -\alpha (x - x_0) + m^4 [3yy''' - y'y'']_{x_0}^{x} \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Ebenso ergeben sich durch Multiplication der Gleichung mit $y''$ und $y'''$ die Werthe von $Y_1 = \int y'^2 dx$ und $Y_3 = \int y'''^2 dx$. *Diese Methode lässt sich auf Gleichungen von beliebigem Grad anwenden.*

Die Gleichung (12) mit Substitution des Werthes von $\alpha$ aus (10) hat Lord Rayleigh in seiner *Theory of Sound* Art. 164 gegeben; er hat sie freilich auf andre Art gefunden. In den meisten Fällen lässt die Gleichung (12) sich sehr vereinfachen, da die Constanten in dem Werth von $X$ dadurch bestimmt werden, dass man einige Differentialquotienten von $y$ an den Enden des Stabes gleich Null setzt. Sind beide Enden frei, so ist an jedem Ende $y'' = 0$, $y''' = 0$, daher $4\int X^2 dx = l\alpha$, und aus (10) geht hervor, dass der Werth von $X^2$ an jedem Ende $-\alpha$ ist. Sind beide Enden festgeklemmt, so ist $4\int X^2 dx = -l\alpha$, worin $-\alpha$ den Werth von $m^4 X''^2$ an jedem Ende angibt.

Beisp. 2. Man zeige, dass die Schwingungsperioden eines graden Stabes, *der an dem einen Ende festgeklemmt, an dem anderen frei ist,* durch

$$\tfrac{1}{2}(e^{ml} + e^{-ml})\cos ml + 1 = 0$$

bestimmt werden. [Poisson.]

Beisp. 3. Die Querschnitte zweier Stäbe haben gleichen Flächeninhalt; der Querschnitt des einen ist ein Kreis, der des anderen ein gleichseitiges Dreieck. Man beweise, dass die Quadrate der Perioden ihrer entsprechenden Töne sich wie $2\pi$ zu $3\sqrt{3}$ verhalten.

Beisp. 4. Wenn die Gleichung $\partial^2 u/\partial t^2 + \partial^4 u/\partial x^4 = 0$ und die Werthe von $u$ und $\partial u/\partial t$ für alle Werthe von $x$ für $t = 0$ gegeben sind, $u$ als Function von $t$ und $x$, von $x = -\infty$ an bis $x = \infty$, zu finden.

Ein elastischer Draht, der in der einen Richtung unbegrenzt ausgedehnt ist, wird an seinem einen Ende durch eine Klemmschraube festgehalten. Wenn eine Reihe einfacher seitlicher Wellen, welche sich in der Längsrichtung des Drahtes fortpflanzen, an der Klemmschraube zurückgeworfen wird, zu zeigen, dass die zurückgeworfenen Wellen dieselbe Amplitude, wie die einfallenden haben, dass ihre Phase aber um ein Viertel einer Wellenlänge beschleunigt ist. Wie verhält es sich, wenn das Ende, statt festgeklemmt zu sein, frei ist?

[Math. Tripos, 1879 und Rayleigh's *Theory of Sound*, Art. 192.]

Beisp. 5. Zwei gleiche und ähnliche elastische Stäbe $AC$, $BC$ sind bei $C$ unter einem rechten Winkel durch ein Gelenk verbunden, während ihre anderen Enden festgeklemmt sind. Der eine schwingt seitlich, der andre in der Längsrichtung; man beweise, dass die Perioden $2\pi l^2/f^2\theta^2$ sind, worin $\theta$ sich aus

$$1 + \cos\theta\cosh\theta + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cosh\theta - \cos\theta\frac{\sinh\theta}{\theta}\right)\frac{gl}{f^2}\cot\frac{\theta^2 f^2}{gl} = 0$$

ergibt, während $l$ die Länge eines jeden Stabes und $f$, $g$ zwei von dem Material abhängige Constanten bezeichnen.

Beisp. 6. Die Enden $A$, $B$ und ein Punkt $C$ eines Stabes $ACB$ liegen fest. Wenn $2\pi/m^2a^2$ eine Periode darstellt, zu beweisen, dass

$$\frac{\sin m(l_1 + l_2)}{\sin ml_1 \cdot \sin ml_2} = \frac{\sinh m(l_1 + l_2)}{\sinh ml_1 \cdot \sinh ml_2}$$

ist, worin $AC = l_1$, $CB = l_2$ gesetzt wurde.

Da $\eta$ und $\partial^2\eta/\partial x^2$ bei $B$ Null sind, so erhält man

$$\eta_2 = \{A\sin m(x - l_2) + H\sinh m(x - l_2)\}\sin m^2a^2t,$$

wobei $C$ der Coordinatenanfang ist. Den entsprechenden Ausdruck für $\eta_1$ findet man, wenn man darin $-l_1$ statt $l_2$ schreibt. Bei $C$ ist $\eta_1$ und $\eta_2$ Null, $\partial\eta_1/\partial x = \partial\eta_2/\partial x$, und, da das Paar bei $C$ dasselbe für jeden Stab ist, $\partial^2\eta_1/\partial x^2 = \partial^2\eta_2/\partial x^2$. Diese Bedingungen führen zu dem obigen Resultat.

Beisp. 7. An dem Mittelpunkt eines dünnen gleichförmigen elastischen Stabes von der Länge $2l$ und der Masse $P$, dessen Enden der Lage und Richtung nach festliegen, ist eine Masse $P/n$ befestigt. Man beweise (1), dass die symmetrischen seitlichen Schwingungen durch

$$\eta = \Sigma X(L \sin m^2 a^2 t + M \cos m^2 a^2 t),$$

$$X = \frac{\sinh mx - \sin mx}{\cosh ml - \cos ml} - \frac{\cosh mx - \cos mx}{\sinh ml + \sin ml}$$

bestimmt werden, worin $x$ von einem der beiden Enden nach dem Mittelpunkt zu gemessen wird; (2) dass $m$ der Gleichung

$$ml(1 - \cosh ml \cdot \cos ml) = n(\cosh ml \cdot \sin ml + \sinh ml \cdot \cos ml)$$

genügt; (3) wenn das System durch die Masse $P/n$ in Bewegung gesetzt wird, indem diese mit der Geschwindigkeit $V$ rechtwinkelig in seinem Mittelpunkt wider den Stab stösst und dann an ihm angeheftet bleibt, dass die seitliche Verschiebung zur Zeit $t$, $\eta = \Sigma XL \sin m^2 a^2 t$ ist, worin $L$ an Stelle des Ausdrucks

$$\frac{2V}{m^2 a^2} \frac{(\cosh ml \cdot \cos ml - 1)(\cosh ml - \cos ml)(\sinh ml + \sin ml)}{(\cosh ml \cdot \cos ml - 1)^2 + n(\cosh ml - \cos ml)^2}$$

steht.

[Math. Tripos, 1895.]

Wie die beiden ersten Theile des Problems aufzulösen sind, ist bereits erklärt worden. Bei dem dritten Theil benutze man die Methode der Multiplicatoren. Anfangs ist für alle Punkte des Stabes und für den Massenpunkt $\eta = 0$, während $d\eta/dt = 0$ für jeden Punkt des Stabes, für den Massenpunkt dagegen $= V$ ist. Wendet man das in § 399 angegebene Verfahren auf den Ausdruck für $\eta$ an, so erhält man

$$2m^2 a^2 \varrho L \left\{\int X^2 dx + \frac{l}{n} X_1^2\right\} = \frac{2\varrho l}{n} V X_1,$$

worin $\varrho \delta x$ die Masse des Elementes $dx$, $X_1$ den Werth von $X$ für $x = l$ bezeichnet und die Grenzen von 0 bis $l$ gehen. Daraus ergibt sich, nachdem man integrirt hat, das gesuchte Resultat.

Beisp. 8. Die Perioden der Schwingung eines elastischen Stabes $AB$ zu finden, dessen Enden $A$, $B$ festliegen.

Setzt man $b^2 = (E\omega + T)/\omega D$, $a^2 = T/\omega D$, so wird die Bewegungsgleichung eines elastischen Stabes, wie er in § 628 besprochen wurde,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + k^2 b^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - k^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0.$$

Sie stimmt mit der Gleichung überein, die Donkin in seinen *Acoustics*, Art. 178, gibt; vergleiche auch Clebsch. Die Endbedingungen sind

$$k^2 b^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{L_1}{\omega D} = 0, \quad -k^2 b^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + k^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} + \frac{Y_1}{\omega D} + a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

Substituirt man $\eta = Ae^{rx} \sin mt$, so erhält man die quadratische Gleichung

$$k^2 b^2 r^4 - (a^2 - k^2 m^2) r^2 - m^2 = 0$$

und bezeichnet man ihre Wurzeln mit $r^2 = -p^2$, $r^2 = q^2$, so ergibt sich

$$\eta = [A \sin px + B \cos px + H \sinh qx + K \cosh qx] \sin mt,$$

wozu noch ein ähnliches Glied mit $\cos mt$ kommt. Wir bemerken, dass $q^2$ grösser oder kleiner als $p^2$ ist, je nachdem $a^2$ grösser oder kleiner als $k^2 m^2$ ist. Da die Rotationsträgheit gewöhnlich klein ist, so hat $k^2 m^2$ nur bei sehr grossem $m$ keinen kleinen Werth. $k^2 b^2$ dagegen ist nicht nothwendiger Weise klein, da es den

Factor $E\varpi + T$ enthält. Bei einem steifen Stab ist $E$ und bei einem straff angezogenen Faden (wie bei einer Claviersaite) ist $T$ gross.

Liegen die Enden $A$, $B$ des Fadens fest, so hat man an jedem Ende $\eta = 0$, $d^2\eta/dx^2 = 0$. Diese Bedingungen führen zu $\eta = A \sin px \sin mt$, worin

$$m^2 = p^2 \frac{a^2 + k^2 b^2 p^2}{1 + k^2 p^2}$$

und $\sin pl = 0$ ist.

Beisp. 9. Ein Stab von der Länge $2l$ ist zwischen zwei festen Punkten $A$ und $B$ ausgedehnt und an seinem Mittelpunkt ist ein Massenpunkt $M$ angeheftet. Man beweise, dass die symmetrischen Schwingungen durch

$$\eta = L\left\{\frac{\sin p(x-l)}{p\cos pl} - \frac{\sinh q(x-l)}{q\cos ql}\right\} \sin mt$$

dargestellt werden, worin $-p^2$ und $q^2$ (d. h. die Wurzeln der quadratischen Gleichung in Beisp. 8), wenn man den Coordinatenanfang im Mittelpunkt annimmt, durch die Gleichung

$$\frac{\operatorname{tg} pl}{p} - \frac{\operatorname{tg} ql}{q} = \frac{2\mu}{Ml}\frac{p^2+q^2}{p^2q^2}$$

verbunden sind, in welcher $\mu$ die Masse des Stabes bezeichnet.

Beisp. 10. *Ein Stab $AB$ macht seitliche Schwingungen ohne Spannung; man leite die Bewegungsgleichung und die Endbedingungen aus den Lagrange'schen allgemeinen Gleichungen ab.*

Der Stab werde in $n$ Elemente, jedes von der Länge $l$ getheilt und

$$\eta_0, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_n$$

seien die Ordinaten der $n+1$ Endpunkte; siehe § 402. Jedes Element wirkt auf das nächste in der Reihe durch einen Druck $X$, eine Scheerkraft $Y$ und ein Paar $L = -F/\varrho$ ein und dabei ist, wenn man unter $\eta_s$ die trennende Ordinate versteht,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \frac{\eta_{s+1} - 2\eta_s + \eta_{s-1}}{l^2}.$$

Es seien ferner $X_0$, $Y_0$, $L_0$, $X_1$, $Y_1$, $L_1$ die an den Enden $A$, $B$ angreifenden Kräfte und Paare, wie in § 628.

Da die Ordinate des Schwerpunktes eines jeden Elementes $\frac{1}{2}(\eta_s + \eta^s{}_{+1})$ ist und die lebendige Kraft der Rotation vernachlässigt wird, so erhält man

$$2T = \Sigma \varpi D l \tfrac{1}{4}(\eta'_s + \eta'_{s+1})^2,$$

worin $\Sigma$ die Summirung von $s = 0$ bis $s = n-1$ angibt. Nach Bd. 1, § 349 ist ferner die Arbeitsfunction

$$U = -\tfrac{1}{2}\Sigma\varpi k^2 E l\left(\frac{\eta_{s+1} - 2\eta_s + \eta_{s-1}}{l^2}\right)^2 - L_1\frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{l} - Y_1\eta_n$$
$$+ L_0\frac{\eta_1 - \eta_0}{l} + Y_0\eta_0,$$

worin $\Sigma$ die Summirung von $s = 1$ bis $s = n-1$ verlangt. Die Lagrange'sche Gleichung für die Ordinate $\eta_s$ lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta'_s} - \frac{\partial U}{\partial \eta_s} = 0.$$

Bedenkt man, dass $\eta_s$ in zwei Termen von $T$ und drei Termen von $U$ vorkommt, so erhält man nach Division mit $\varpi D l$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{4}(\eta'_{s+1}+2\eta'_s+\eta'_{s-1}) = -\frac{Ek^2}{D}\left\{\frac{\eta_{s+2}-2\eta_{s+1}+\eta_s}{l^4} - 2\frac{\eta_{s+1}-2\eta_s+\eta_{s-1}}{l^4} + \frac{\eta_s-2\eta_{s-1}+\eta_{s-2}}{l^4}\right\}.$$

In der Grenze für $l=0$ wird daraus

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -\frac{Ek^2}{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}.$$

Um die Endbedingungen zu finden, betrachte man die letzte Ordinate $\eta_n$ und setze $s=n$; in dem Ausdruck für $U$ existiren dann die beiden Terme nicht, welche $\eta_{s+1}$ und $\eta_{s+2}$ enthalten. Lässt man sie aus der Lagrange'schen Gleichung für $\eta_s$ weg und schliesst die Terme mit $L_1$ und $Y_1$ ein, so wird

$$\omega Dl\frac{d}{dt}\frac{1}{4}(\eta'_n+\eta'_{n-1}) = -Ek^2\omega l\frac{\eta_n-2\eta_{n-1}+\eta_{n-2}}{l^4} - \frac{L_1}{l} - Y_1$$

und, wenn man mit $l$ multiplicirt und $l=0$ setzt,

$$0 = Ek^2\omega\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + L_1.$$

Schliesslich betrachte man die Ordinate $\eta_{n-1}$. Setzt man $s=n-1$ und bedenkt, dass der Term mit $\eta_{s+2}$ in dem Ausdruck für $U$ nicht existirt, so wird die Lagrange'sche Gleichung

$$\omega Dl\frac{d}{dt}\frac{1}{4}(\eta'_n+2\eta'_{n-1}+\eta'_{n-2}) = -Ek^2\omega l\left\{-2\frac{\eta_n-2\eta_{n-1}+\eta_{n-2}}{l^4} + \frac{\eta_{n-1}-2\eta_{n-2}+\eta_{n-3}}{l^4}\right\} + \frac{L_1}{l}.$$

Addirt man sie zu der Lagrange'schen Gleichung für $\eta_n$ und nimmt die Grenze, so hat man

$$0 = Ek^2\omega\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - Y_1.$$

Die Bedingungen an dem anderen Ende des Stabes ergeben sich durch Symmetrie.

§ 631. Beisp. 1. *Die natürliche Gestalt eines dünnen unausdehnbaren Stabes ist, wenn er sich in Ruhe befindet, ein Kreisbogen; der Stab macht kleine Schwingungen um diese Gestalt. Wenn der Bogen ein vollständiger Kreis ist, zu beweisen, dass die Perioden,* $2\pi/\varrho$, *durch* $\varrho^2(i^2+1)=\alpha i^2(i^2-1)^2$ *gegeben sind, worin* $i$ *irgend eine ganze Zahl und* $\alpha$ *eine Constante bedeutet, welche von der Biegsamkeit des Stabes abhängt. Ist der Bogen kein vollständiger Kreis und sind seine beiden Enden frei, zu zeigen, dass man ihn bei passenden Anfangsbedingungen symmetrisch um seinen Mittelpunkt mit einer Periode* $2\pi/\varrho$ *schwingen lassen kann, wenn der Centriwinkel* $2\theta$, *der zu dem Bogen gehört, der Gleichung*

$$\frac{n(n^2+1)(n_1^2-n_2^2)}{\operatorname{tg} n\theta} + \frac{n_1(n_1^2+1)(n_2^2-n^2)}{\operatorname{tg} n_1\theta} + \frac{n_2(n_2^2+1)(n^2-n_1^2)}{\operatorname{tg} n_2\theta} = 0$$

*genügt, in welcher* $n^2$, $n_1^2$, $n_2^2$ *die reellen oder complexen Wurzeln der cubischen Gleichung* $ax(x-1)^2=(x+1)\varrho^2$ *bezeichnen.*

*Man leite daraus den Poisson'schen Ausdruck für die Schwingungsperioden eines graden Stabes mit freien Enden ab.*

$X$, $Y$, $L$ seien die Spannung, die Scheerkraft und das Biegungsmoment an irgend einem Punkt $P$ des Stabes; sie sind sämmtlich kleine Grössen von der-

selben Ordnung wie die Schwingung. Die ungestörten und die gestörten Coordinaten von $P$ seien $a$, $\theta$, bez. $a(1+u)$, $\theta+\varphi$. Die Bewegungsgleichungen werden, wenn man die Quadrate kleiner Grössen vernachlässigt:

$$\frac{\partial X}{\partial \theta}+Y=ma^2\frac{\partial^2\varphi}{dt^2},\quad \frac{\partial Y}{\partial \theta}-X=ma^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial L}{\partial \theta}+aY=0,$$

worin $m$ die Masse der Längeneinheit angibt und das Paar $L$ wie in § 628 gemessen wird. Sind $p$ und $q$ das Verhältniss der Verlängerung und der Krümmungsvermehrung zu ihren ungestörten Werthen für ein Element des Stabes bei $P$, so findet man (siehe die Note an dem Ende des Buches)

$$p=\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+u,\quad q=-\left(u+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right).$$

Da der Stab unausdehnbar ist, so hat man $p=0$ und nach einem Satz in der Statik $L=-Eq$. Eliminirt man $X$, $Y$, $L$ und $u$ aus diesen Gleichungen, so erhält man die lineare Gleichung

$$(1-\delta^2)\,\partial^2\varphi/\partial t^2=\alpha\delta^2(\delta^2+1)^2\varphi,$$

worin $\delta$ für $d/d\theta$ steht und $\alpha=E/ma^4$ ist.

Um sie aufzulösen, setze man $\varphi=\Sigma M\sin\varrho t\sin(n\theta+\varepsilon)$. Durch Substitution dieses Ausdrucks reducirt sich die Gleichung auf $\varrho^2(n^2+1)=\alpha n^2(n^2-1)^2$.

Ist der Kreis vollständig, so müssen die Werthe von $\varphi$ sich stets wiederholen, wenn $\theta$ um $2\pi$ vergrössert wird und $n$ muss daher eine ganze Zahl sein. Ist er dagegen unvollständig, so unterliegt der Werth von $n$ keinen weiteren Beschränkungen, als dass zwischen $\varrho$ und $n$ die obige Gleichung bestehen muss. Daraus folgt, dass jedem Werth von $\varrho$ drei Werthe von $n$ entsprechen und $\varphi$ also die Form

$$\varphi=\Sigma\sin(\varrho t+\zeta)\{M\sin(n\theta+\varepsilon)+M_1\sin(n_1\theta+\varepsilon_1)+M_2\sin(n_2\theta+\varepsilon_2)\}$$

annimmt. Die in der Aufgabe angegebene Bedingung erhält man dadurch, dass man $X$, $Y$ und $L$ an jedem Ende des Stabes verschwinden lässt.

Die Schwingungen eines vollständigen Kreises hat Lord Rayleigh in seinem *Treatise on Sound,* Vol. I, Art. 233 in einer von der vorstehenden abweichenden Art untersucht. Die Gleichung, welche $\varrho$ in Termen der ganzen Zahl $i$ liefert, schreibt man Hoppe zu, der sie in Crelle's Journal, Bd. 13, 1871 veröffentlichte.

Beisp. 2. *Die natürliche Gestalt eines Stabes ist ein Kreis vom Radius a und der Stab ist sowohl ausdehnbar wie biegsam; man soll die kleinen Schwingungen finden.*

Man betrachte den elementaren Theil des ungestörten Stabes, welcher von zwei zu seiner Axe senkrechten, durch zwei aufeinanderfolgende Punkte $P$, $Q$ gehenden Ebenen begrenzt wird. Macht man, wie gewöhnlich, die Voraussetzung, dass diese Ebenen auch dann noch normal auf der Axe stehen, wenn die Krümmung vergrössert worden ist, so ergibt sich, dass *die unausgedehnten Längen* der Fasern des Elementes, welche auf beiden Seiten von $PQ$ liegen, der unausgedehnten Länge von $PQ$ nicht gleich sind, sondern auf der convexen Seite länger, auf der concaven kürzer sind. $E$ sei Young's Elasticitätsmodul, $\omega$ der Flächeninhalt des Querschnittes bei $P$, $\omega k^2$ das Trägheitsmoment für eine durch seinen Schwerpunkt gehende und auf der Biegungsebene senkrechte Axe und $a$ der ungestörte Radius der Axe des Stabes. Durch Integration ergibt sich dann, dass die resultirende Spannung $X$ aller den Querschnitt $\omega$ kreuzenden Fasern und ihr Biegungsmoment $L$ durch

$$X=E\omega p-E\frac{\omega k^2}{a^2}q=Ap-Bq,$$

$$-\frac{L}{a}=E\frac{\omega k^2}{a^2}q=Bq$$

gegeben sind, worin $p$ und $q$ dieselbe Bedeutung, wie in dem letzten Beispiel, haben. Ebenso erhält man die potentielle Energie der Fasern einer Elementarlänge $ds$ des Stabes

$$dV = \frac{1}{2} ds (Ap^2 + Bq^2);$$

von dieser Gleichung machen wir übrigens bei der folgenden Lösung keinen Gebrauch. Sie wird in der Note am Ende dieses Buches bewiesen.

Substituirt man diese Werthe von $X$ und $L$ in die dynamischen Gleichungen des vorigen Paragraphen und eliminirt $Y$, so findet man

$$ma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A\delta p, \quad ma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = B(\delta^2 + 1) q - Ap,$$

worin $\delta$ für $d/d\theta$ steht. Da die Werthe von $p$ und $q$ in dem vorigen Beispiel gegeben wurden, so hat man zwei Gleichungen, aus denen sich $\varphi$ und $u$ ableiten lassen. Um sie aufzulösen, setze man

$$\varphi = \Sigma M \sin(\varrho t + \zeta) \sin(n\theta + \varepsilon), \quad u = \Sigma N \sin(\varrho t + \zeta) \cos(n\theta + \varepsilon).$$

Substituirt man und eliminirt $M/N$ wie gewöhnlich, so wird

$$m^2 a^4 \varrho^4 - ma^2 \varrho^2 \{A(n^2 + 1) + B(n^2 - 1)^2\} + ABn^2(n^2 - 1)^2 = 0.$$

Wenn die ungestörte Gestalt des Stabes ein vollständiger Kreis ist, so kann $n$ jede ganze Zahl sein und die beiden Perioden, nämlich $2\pi/\varrho$, die jeder ganzen Zahl entsprechen, sind durch die vorstehende Gleichung gegeben. Hat der Stab aber die Form eines Bogens, so unterliegt $n$ lediglich der Beschränkung, dass es mit $\varrho$ durch diese Gleichung verbunden ist. Jeder Term in den Ausdrücken für $\varphi$ und $u$, die durch irgend einen Werth von $\varrho$ bestimmt werden, hat, wie in dem vorigen Beispiel, drei ihm entsprechende Werthe von $n$ und enthält daher drei Glieder von der Form $M \sin(n\theta + \varepsilon)$.

Aus den Bedingungen, unter welchen $X$, $Y$ und $L$ an jedem Ende des Stabes Null werden, ergibt sich, dass $p$, $q$ und $\delta q$ an denselben Punkten verschwinden müssen. Sie bestimmen, wie in dem letzten Beispiel, $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ die Verhältnisse $M_1/M$, $M_2/M$ und liefern eine Gleichung, die $\varrho$ mit der Länge des Bogens verbindet. Die thatsächlichen Werthe von $\varrho$ und $n$ sind jetzt bekannt; dagegen bleiben in den Reihen für $\varphi$ und $u$ die beiden Constanten $M$ und $\zeta$ in jedem Term noch unbestimmt. Da jedem Werth von $n$ zwei durch die quadratische Gleichung bestimmte Werthe von $\varrho$ entsprechen, so kann man jeder dieser Reihen die Gestalt

$$\Sigma\{M \sin(\varrho t + \zeta) \sin(n\theta + \varepsilon) + M' \sin(\varrho' t + \zeta') \sin(n\theta + \varepsilon')\}$$

geben, worin $n$, $\varepsilon$, $\varepsilon'$ bereits gefunden worden sind. Die Verhältnisse zwischen den Constanten in den beiden Reihen sind auch schon gefunden worden; es bleiben also nur noch die vier Constanten in jedem zusammengesetzten Term, nämlich $M$, $M'$, $\zeta$, $\zeta'$ zu ermitteln. Man erhält sie mit Hülfe des Fourier'schen Theorems, wenn die Anfangswerthe von $\varphi$, $d\varphi/dt$, $u$ und $du/dt$ für alle Werthe von $\theta$ bekannt sind.

*Eine andere Auflösung.* Verfährt man, wie in § 630, Beisp. 10, so lassen sich die Schwingungen auch mittelst der Lagrange'schen Gleichungen finden. Wir theilen den Stab in $n$ Elemente, von denen ein jedes zu dem Centriwinkel $d\theta = l$ gehört. Die Masse eines Elementes ist dann $mal$. Die Coordinaten der $n + 1$ Enden der Elemente seien $(\varphi_0, u_0)$, $(\varphi_1, u_1)$, etc., $(\varphi_n, u_n)$. Nimmt man die Geschwindigkeit des Schwerpunktes und vernachlässigt die lebendige Kraft der Rotation, so erhält man

$$2T = mal \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sum \{(u'_{s+1} + u'_s)^2 + (\varphi'_{s+1} + \varphi'_s)^2\},$$

worin $\Sigma$ die Summirung von $s = 0$ bis $s = n - 1$ angibt und die Accente Differentiationen nach $t$ bedeuten.

Wir betrachten dann zunächst die Arbeitsfunction; an jedem der Verbindungspunkte $(\varphi_1, u_1)$, etc., $(\varphi_{n-1}, u_{n-1})$ sind Kräfte vorhanden, die Spannungen hervorrufen, während die Enden $(\varphi_0, u_0)$, $(\varphi_n, u_n)$ frei sind. Die Arbeit einer jeden ist der Arbeit derjenigen Kraft gleich, welche ein Element $ds$ ausdehnt und diese ist bekanntlich

$$\frac{1}{2}\,ds(Ap^2 + Bq^2).$$

Ferner hat man

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + u = \frac{\varphi_{s+1} - \varphi_s}{l} + u_s,$$

$$-q = \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + u = \frac{u_{s+1} - 2u_s + u_{s-1}}{l^2} + u_s.$$

Setzt man $ds = al$, so wird

$$2V = al\sum\left[A\left(\frac{\varphi_{s+1} - \varphi_s}{l} + u_s\right)^2 + B\left(\frac{u_{s+1} - 2u_s + u_{s-1}}{l^2} + u_s\right)^2\right],$$

worin $\Sigma$ die Summirung von $s = 1$ bis $s = n - 1$ verlangt. Um die zwei Bewegungsgleichungen zu erhalten, substituire man diese Functionen in

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\varphi_s'} + \frac{\partial V}{\partial\varphi_s} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_s'} + \frac{\partial V}{\partial u_s} = 0.$$

Bedenkt man, dass $\varphi_s$ in zwei Termen von $V$ und $u_s$ in vier Termen auftritt, so erhält man nach der Division mit $al$

$$\frac{d}{dt}m\frac{a^2}{4}\left\{\varphi_{s+1}' + 2\varphi_s' + \varphi_{s-1}'\right\} -$$

$$-\frac{A}{l}\left\{\left(\frac{\varphi_{s+1} - \varphi_s}{l} + u_s\right) - \left(\frac{\varphi_s - \varphi_{s-1}}{l} + u_{s-1}\right)\right\} = 0 \quad \ldots \quad \text{(A)},$$

$$\frac{d}{dt}m\frac{a^2}{4}\left\{u_{s+1}' + 2u_s' + u_{s-1}'\right\} + A\left\{\frac{\varphi_{s+1} - \varphi_s}{l} + u_s\right\}$$

$$+\frac{B}{l^2}\left(\frac{u_{s+2} - 2u_{s+1} + u_s}{l^2} + u_{s+1}\right) + B\left(\frac{-2}{l^2} + 1\right)\left(\frac{u_{s+1} - 2u_s + u_{s-1}}{l^2} + u_s\right)$$

$$+\frac{B}{l^2}\left(\frac{u_s - 2u_{s-1} + u_{s-2}}{l^2} + u_{s-1}\right) = 0 \quad \ldots \quad \text{(B)}.$$

Für $l = 0$ reduciren sich diese Gleichungen offenbar auf

$$ma^2\varphi'' - A\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + u\right) = 0,$$

$$ma^2u'' + A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + u\right) + B\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + u\right) + B\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + u\right) = 0.$$

Sie sind die gesuchten Bewegungsgleichungen.

Um die Bedingungen an den Enden zu erhalten, betrachte man die Coordinaten $\varphi_n$, $u_n$. Setzt man $s = n$, so fehlen die Glieder, welche $\varphi_{s+1}$, $u_{s+1}$, $u_{s+2}$ enthalten, in dem Ausdruck für $V$. Lässt man sie aus den Gleichungen (A) und (B) weg, so wird

$$\frac{d}{dt} m \frac{a^2}{4} (\varphi_n' + \varphi_{n-1}') + \frac{A}{l} \left\{ \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{l} + u_{n-1} \right\} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} m \frac{a^2}{4} (u_n' + u_{n-1}') + \frac{B}{l^2} \left\{ \frac{u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}}{l^2} + u_{n-1} \right\} = 0.$$

Multiplicirt man mit $l$ oder $l^2$ und geht zur Grenze über, so erhält man $p = 0$, $q = 0$.

Schliesslich betrachte man die Coordinate $u_{n-1}$. Setzt man $s = n - 1$, lässt den Term in (B) weg, welcher $u_{s+2}$ enthält und addirt den Rest zu der obigen Lagrange'schen Gleichung für $u_n$, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} m \frac{a^2}{4} (2u_n' + 3u_{n-1}' + u_{n-2}') + \frac{A}{l} \left( \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{l} + u_{n-1} \right)$$
$$+ B \left( \frac{-1}{l^2} + 1 \right) \left( \frac{u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}}{l^2} + u_{n-1} \right)$$
$$+ \frac{B}{l^2} \left( \frac{u_{n-1} - 2u_{n-2} + u_{n-3}}{l^2} + u_{n-2} \right) = 0.$$

Durch Multiplication mit $l^2$ und Uebergang zur Grenze wird daraus

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right) = 0.$$

## Kapitel XIV.

# Die Bewegung einer Membran.

## Die seitlichen Schwingungen einer ebenen Membran.

§ 632. Wir wollen nun eine ebene Membran zum Gegenstand unserer Betrachtung machen, die überall gleichmässig ausgedehnt ist und deren Grenzen entweder festliegen oder gegebenen Bedingungen unterworfen sind. Ihre Ebene sei die $xy$-Ebene. Die Membran werde so gestört, dass ihre Massenpunkte parallel zur $z$-Axe etwas verschoben werden. Sie wird dann kleine Schwingungen um die $xy$-Ebene ausführen. Die Gesetze für diese Schwingungen wollen wir jetzt finden.

$w$ sei die Verschiebung eines Massenpunktes $P$ zur Zeit $t$, dessen Coordinaten im ungestörten Zustand $x$, $y$ sind. Ist $dx dy$ eine Elementarfläche bei dem Punkt $P$, so sei $\varrho dx dy$ ihre Masse; wenn die Membran homogen ist, so bedeutet also $\varrho$ die Masse der Flächeneinheit. Da die Schwingungen transversal stattfinden, so ist die Effectivkraft an dem Element

$$\varrho\, dx\, dy\, d^2w/dt^2.$$

Betrachten wir nun die Action quer über eine Seite, z. B. $dy$, der Elementarfläche, so kann sie in dem allgemeinen Fall einer Lamelle aus einer Kraft und einem Paar bestehen. Da aber eine Membran, wie ein Faden, auf beliebige Art gefaltet werden kann und eine Kraft nur ihrer Länge nach ausüben kann, so muss das Paar Null sein und die Kraft in der Berührungsebene wirken. Da ferner die Membran nach allen Richtungen gleichmässig ausgedehnt ist, so wirkt diese Kraft senkrecht zu der betreffenden Seite. Wir wollen sie durch $T dy$ darstellen; $T$ heisst alsdann *die Spannung in Bezug auf die Längeneinheit,* manchmal kürzer auch nur die Spannung [1]).

Die Actionen quer über die beiden der $y$-Axe parallelen Seiten des rechtwinkligen Elementes hat man parallel zur $z$-Axe zu zerlegen. Die Componenten sind offenbar

$$-T dy \frac{dw}{dx}, \quad T dy \left(\frac{dw}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2}\, dx\right).$$

Die Resultante der beiden Componenten ist $T\dfrac{d^2w}{dx^2}\, dx dy$. Ebenso findet man die Resultante der beiden Actionen quer über die der $x$-Axe parallelen Seiten gleich

1) Eine vollständigere Discussion dieser Principien der Elasticitätstheorie findet man in den *Léçons sur la théorie mathématique de l'élacticité des corps solides* von G. Lamé. Die im Text angegebene Bewegungsgleichung hat zuerst Poisson in seinem *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques* in Bd. 8 der *Mémoires de l'Institut*, 1828 aufgestellt. Auch die Schwingungen einer rechteckigen Membran (§ 635) hat er zuerst besprochen.

$T \frac{d^2 w}{dy^2} dx\,dy$. Nimmt man diese Resultanten zusammen und setzt sie den Effectivkräften gleich, so erhält man die Bewegungsgleichung

$$\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

§ 633. Da man die Coordinatenaxen durchaus beliebig wählen kann, wenn sie nur rechtwinklig zu einander sind, so muss diese Gleichung für jede Richtung der Axen gelten. Wird die Membran auf schiefwinklige Axen bezogen, die den Winkel $\varepsilon$ miteinander machen, so ist die Bewegungsgleichung, wie sich leicht zeigen lässt,

$$\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{T}{\sin^2 \varepsilon}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos\varepsilon + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

§ 634. Um ein Integral der Bewegungsgleichung zu erhalten, bedenke man, dass es der Membran, von den Grenzen abgesehen, möglich sein muss so zu schwingen, als ob sie aus einer Reihe nebeneinander gelegter Fäden bestände, deren Länge irgend einer festen Richtung parallel ist. $\alpha$ sei der Winkel, den diese feste Richtung mit der $x$-Axe macht. Setzt man dann $T = m^2 \varrho$, so ist eine Lösung der Gleichung sicherlich

$$w = f(x\cos\alpha + y\sin\alpha - mt) + F(x\cos\alpha + y\sin\alpha + mt),$$

worin $\alpha$ eine beliebige Constante bedeutet und $f$, $F$ zwei willkürliche Functionen bezeichnen, die stetig oder unstetig sind, wie in § 620 erklärt wurde. Jede der beiden Functionen mit einem gegebenen Werth von $\alpha$ stellt eine Welle dar, welche sich in der durch $\alpha$ definirten Richtung mit einer Front fortpflanzt, die stets der Geraden $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$ parallel ist. Eine vollständigere Lösung erhält man dann durch Summirung für alle Werthe von $\alpha$.

Da es sich um schwingende Bewegungen handelt, so ist es vortheilhafter, die Functionen $f$ und $F$ in Sinusse und Cosinusse zu entwickeln. Für eine Hauptschwingung allein ist $w = P\sin pmt + Q\cos pmt$, worin man $P$ und $Q$ eine der beiden gleichwerthigen aber mit verschiedenen Constanten behafteten Formen geben kann:

$$\begin{aligned} &\Sigma\{A\sin p(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + B\cos p(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\} \\ &+ \Sigma\{C\sin p(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + D\cos p(x\cos\alpha - y\sin\alpha)\} \\ &= \Sigma L \frac{\sin}{\cos}\left(px\cos\alpha\right)\frac{\sin}{\cos}\left(py\sin\alpha\right). \end{aligned}$$

Die positiven Werthe von $\alpha$ sind in der ersten Zeile, die negativen in der zweiten enthalten. Daraus folgt, dass $\Sigma$ die Summirung für alle positiven Werthe von $\alpha$ verlangt.

§ 635. **Die rechteckige Membran.** *Die Schwingungen einer homogenen rechtwinkligen Membran zu finden, deren vier Grenzen festliegen.*

$OACB$ sei die Membran und die Seiten $OA$, $OB$ die $x$- und $y$-Axe. Es sei ferner $OA = a$, $OB = b$. Wir haben dann eine solche Lösung zu finden, die (1) $w = 0$ macht, wenn $x = 0$ und wenn $x = a$ ist, unabhängig von allen speciellen Werthen von $y$; (2) die $w$ für $y = 0$ und für $y = b$ zu Null macht, unabhängig von jedem speciellen Werth von $x$. Eine solche Lösung kann man ohne Weiteres aus der allgemeinen in § 634 gegebenen Form auswählen, nämlich

$$w = \Sigma L \sin(px\cos\alpha)\sin(py\sin\alpha)\cos pmt$$

und einen ähnlichen Ausdruck, der $\sin pmt$ enthält. Darin muss

$$pa\cos\alpha = i\pi,\quad pb\sin\alpha = i'\pi$$

sein, worin $i$ und $i'$ irgend zwei ganze Zahlen bedeuten. Die Perioden (nämlich $2\pi/pm$) werden daher durch

$$\left(\frac{p}{\pi}\right)^2 = \left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{i'}{b}\right)^2$$

bestimmt.

Es erscheint nun fraglich, ob diese Lösung vollkommen allgemein ist oder nicht. Sie genügt der Bewegungsgleichung und allen Grenzbedingungen. Wenn man zeigen kann, dass sie auch den Anfangsbedingungen der Membran genügt, so schliesst sie zweifellos jeden Fall ein. Die Anfangsverrückung sei $w = \varphi(x, y)$; setzt man $t = 0$, so wird

$$\varphi(x, y) = \Sigma L \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi i' y}{b}$$

für alle Werthe von $x$ und $y$, die kleiner als $a$ bez. $b$ sind. Nach einer Verallgemeinerung des Fourier'schen Theorems ist aber eine solche Entwickelung stets möglich. Die Lösung ist daher vollkommen allgemein.

Beisp. Das Gewicht $W$ einer rechteckigen Membran und ihre Spannung $T$ in Bezug auf die Längeneinheit sind bekannt. Man zeige, dass der tiefste Ton hervorgebracht wird, wenn die Membran ein Quadrat ist und dass die Periode des Tones alsdann $(2\,W/g\,T)^{\frac{1}{2}}$ ist. Die Periode hängt also von dem Flächeninhalt nicht ab. [Poisson's Theorem.]

§ 636. Wenn die Schwingungsperiode einer rechteckigen Membran durch einen Werth von $p$ gegeben ist, so sind alle möglichen Schwingungsarten in der Form

$$w = \left[\Sigma L \sin \frac{i \pi x}{a} \sin \frac{i' \pi y}{b}\right] \cos pmt$$

enthalten, wozu noch ein ähnlicher Term mit $\sin pmt$ kommt. In dieser Form stellen $i$ und $i'$ beliebige ganze Zahlen dar, welche der Gleichung

$$\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{i'}{b}\right)^2 = \left(\frac{p}{\pi}\right)^2$$

genügen.

Wenn zwei Gruppen von Werthen der $i$ und $i'$ der vorstehenden Gleichung genügen, so verhalten sich, wie man leicht sieht, die Quadrate der beiden Seiten wie zwei ganze Zahlen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so hat jede Schwingung die Form

$$w = \sin \frac{i \pi x}{a} \sin \frac{i' \pi y}{b} (L \cos pmt + L' \sin pmt)$$

und enthält nur zwei Constanten, nämlich $L$ und $L'$. In diesem Fall ist jede Schwingung eine Hauptschwingung und alle Perioden sind verschieden.

Wenn aber verschiedene Gruppen von Werthen der $i$ und $i'$ in derselben Periode auftreten, so kommen mehr als zwei Constanten in dem Ausdruck für jede Schwingung vor. In diesem Fall kann offenbar die Membran auf verschiedene Art so in Schwingung versetzt werden, dass die Perioden dieselben sind. Daraus folgt, dass die Lagrange'sche Gleichung (§ 57), welche die Perioden der Hauptschwingungen liefert, eine Anzahl gleicher Wurzeln hat.

§ 637. *Die Knotenlinien* sind solche Linien auf der Membran, die während der ganzen Bewegung in ihrer Gleichgewichtslage bleiben. Wenn die Periode so beschaffen ist, dass in der Schwingung nur eine Gruppe von Werthen der $i$ und $i'$ auftreten, so sind die Knotenlinien für diese Schwingung selbstverständlich durch

$$\sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{i'\pi y}{b} = 0$$

definirt.. Diese Werthe von $x$ oder $y$ machen den Coefficienten von $\cos pmt$ sowohl als den von $\sin pmt$ zu Null. Die Knotenlinien sind daher Gerade, die den Seiten parallel laufen. Gibt es aber verschiedene Gruppen der $i$ und $i'$, welche dasselbe $p$ ergeben, und sind die Anfangsbedingungen derart, dass die entsprechenden Coefficienten in den Coefficienten von $\cos pmt$ und $\sin pmt$ in demselben Verhältniss zu einander stehen, so sind die Knotenlinien durch die Gleichung

$$\Sigma L \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{i'\pi y}{b} = 0$$

definirt. Sie können sehr verschiedene Gestalt haben, welche von der Anzahl der Terme in der Reihe und von den willkürlichen Werthen abhängt, welche man den durch den Buchstaben $L$ dargestellten Coefficienten beilegen kann. Lamé gibt in seiner Elasticitätstheorie eine kurze Skizze derselben; eine andere Zerlegung findet man in Riemann's partiellen Differentialgleichungen. Sie bemerken beide, dass eine Knotenlinie die Diagonale $x/a = y/b$ ist, wenn man nur zwei Terme der Reihe von der Form

$$L \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{i'\pi y}{b} - L \sin \frac{i'\pi x}{a} \sin \frac{i\pi y}{b} = 0$$

beibehält. Die ganzen Zahlen $i$ und $i'$ sind dabei in den beiden Termen vertauscht. Da aber auch der Gleichung, welche diese ganzen Zahlen mit dem gegebenen Werth von $p$ verbindet, genügt werden muss, so hat man

$$(i/a)^2 + (i'/b)^2 = (i'/a)^2 + (i/b)^2,$$

woraus $a = b$ folgt. Das Rechteck muss daher ein Quadrat sein.

Man kann daraus ableiten, dass die Schwingungen einer Membran, deren Umfang ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck bildet, durch

$$w = \Sigma L \left[ \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{i'\pi y}{a} - \sin \frac{i'\pi x}{a} \sin \frac{i\pi y}{a} \right] \cos pmt$$

mit einem ähnlichen Term, der $\sin pmt$ enthält, bestimmt werden, worin $i$ und $i'$ ganze Zahlen bedeuten, die durch die Gleichung $i^2 + i'^2 = (ap/\pi)^2$ verbunden sind, und wo $a$ die Seite des Quadrates ist. Siehe Lord Rayleigh's *Sound*.

Beisp. 1. Zu beweisen, dass, wenn die Quadrate über den Seiten einer rechteckigen Membran nicht in dem Verhältniss irgend zweier ganzen Zahlen zu einander stehen, die Knotenlinien den Seiten parallele Grade sein müssen.

[Poisson's Theorem.]

Beisp. 2. Wenn die Seiten einer rechteckigen Membran derart sind, dass zwei Gruppen der Werthe von $i$ und $i'$ dieselbe Schwingungsperiode liefern, so lässt sich durch richtige Anfangsbedingungen bewirken, dass eine Knotenlinie durch irgend einen gegebenen Punkt der Membran geht.

§ 638. Beisp. **Eine von einem gleichseitigen Dreieck begrenzte Membran.** Eine Membran wird von einem gleichseitigen Dreieck begrenzt und diese Grenzen liegen fest. Wenn $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Dreieckscoordinaten eines Punktes innerhalb des Dreiecks sind (siehe Bd. 1, S. 15), durch wirkliche Ausführung der Substitution zu zeigen, dass der Bewegungsgleichung durch

$$w = \Sigma L \sin \frac{i\pi\xi}{h} \sin \frac{i\pi\eta}{h} \sin \frac{i\pi\zeta}{h} \cos pmt$$

genügt wird, worin $p = 2i\pi/h$ ist. Dabei bedeutet $h$ die Höhe des Dreiecks und $i$ irgend eine ganze Zahl.

Dies folgt unmittelbar aus dem Satz der Trigonometrie, dass die Summe der Producte der Cotangenten dreier Winkel, deren Summe $i\pi$ ist, wenn man die Cotangenten zu je zweien zusammennimmt, der Einheit gleich kommt.

Es ist dies übrigens nicht die allgemeinste Form der Lösung, weil wir nur eine unabhängige willkürliche ganze Zahl, nämlich $i$, haben. Man kann daher nicht allen möglichen Anfangswerthen von $w$ genügen.

In Lamé's Elasticitätstheorie wird gezeigt, dass ein allgemeinerer Ausdruck für die Periode

$$p = (2\pi/h)(i^2 + i'^2 + ii')^{\frac{1}{2}}$$

ist. Er enthält die beiden willkürlichen ganzen Zahlen $i$ und $i'$.

§ 639. Beisp. 1. **Belastete Membran.** In einem Punkt einer gleichförmigen rechteckigen Membran mit den Seiten $a$ und $b$ und der Masse $M$ wird eine endliche Masse $\mu$ befestigt; die Coordinaten des Punktes sind $h$, $k$, auf die Seiten als Axen bezogen. Man zeige, dass die Perioden $(2\pi/pm)$ der kleinen transversalen Schwingungen durch

$$\frac{M}{\mu}\frac{1}{4p^2} = \sum \frac{\sin^2 \frac{i\pi h}{a} \sin^2 \frac{i'\pi k}{b}}{\pi^2\left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{i'^2}{b^2}\right) - p^2}$$

gegeben sind, worin $\Sigma$ die Summirung für alle Werthe der ganzen Zahlen $i$ und $i'$ verlangt und $m$, wie früher, das Verhältniss der Spannung zur Dichtigkeit der Membran bezeichnet.

Um den Beweis zu führen, nehme man an, die Masse $\mu$ sei über eine kleine Fläche $\alpha\beta$ vertheilt. $W$ sei die Verrückung dieser kleinen Fläche zur Zeit $t$. Die Summe der Componenten der Spannungskräfte um den Umfang der Fläche herum ist gleich $\mu \frac{d^2 W}{dt^2} = -R$. Wir haben daher die Bewegung einer Membran zu finden, an der eine periodische Kraft $R$ in einem gegebenen Punkt $h$, $k$ angreift. Wir wollen diese einzelne Kraft durch eine continuirliche Kraft $Z dx dy$ ersetzen, die an jedem Punkt der Membran angreift, so dass also

$$Z = \Sigma C \sin(i\pi x/a) \sin(i'\pi y/b)$$

ist. Da $Z$ auf der ganzen Membran mit Ausnahme der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes $h$, $k$ verschwindet und an diesem Punkt $Z\alpha\beta = \mu d^2 W/dt^2$ ist, so hat man nach dem Fourier'schen Theorem

$$-\mu \frac{d^2 W}{dt^2} \sin\frac{i\pi h}{a} \sin\frac{i'\pi k}{b} = \frac{1}{4} Cab.$$

Die Bewegungsgleichung der Membran wird jetzt

$$\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \varrho m^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + Z.$$

Um sie aufzulösen, setzen wir $w = f(x, y) \cos pmt$.
Durch Substitution ergibt sich nach Theorem III in § 265

$$\frac{M}{4\mu p^2}\frac{f(x, y)}{f(h, k)} = \sum \frac{\sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{i'\pi y}{b} \sin\frac{i\pi h}{a} \sin\frac{i'\pi k}{b}}{\pi^2\left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{i'^2}{b^2}\right) - p^2}.$$

Die Form der Function $f$, die irgend einem Werth von $p$ entspricht, ist damit

ermittelt. Setzt man $x = h$, $y = k$, so erhält man eine Gleichung, aus der sich $p$ ergibt.

Eine andere Lösung findet man in der Note am Ende des Buches.

Beisp. 2. Eine rechteckige Membran von der Masse $M$ schwingt mit einer Periode $(2\pi/pm)$ derart, dass nur eine Gruppe von Werthen der $i$ und $i'$ mit diesem Werth von $p$ zusammen auftreten. Eine kleine Last von der Masse $\mu$ wird in einen Punkt $(h, k)$ gebracht; man beweise, dass die neue Schwingungsperiode $(2\pi/qm)$ durch

$$q^2 = p^2\left(1 - \frac{4\mu}{M}\sin^2\frac{i\pi h}{a}\sin^2\frac{i'\pi k}{b}\right)$$

gegeben ist. Dies folgt aus dem Resultat des letzten Beispiels; denn nur ein Nenner auf der rechten Seite ist klein. Vernachlässigt man alle anderen Glieder mit Ausnahme dieses einen, so erhält man die neue Schwingungsperiode.

Beisp. 3. Eine Membran von der Masse $M$ wird von zwei concentrischen Kreisen begrenzt, deren Radien $a$ und $b$ sind, und ihre Dichtigkeit variirt umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes von dem Mittelpunkt. Die Periode $P$ einer symmetrischen Schwingung ist durch

$$P = \frac{1}{q}\left(\frac{2\pi M}{T}\log\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

gegeben, worin $q = i\pi$ ist, wenn beide Grenzen im Raum festliegen. Wenn aber nur die äussere Grenze im Raum festliegt, während die innere an einen Ring von der Masse $\mu$ geheftet ist, so ergibt sich $q$ aus der Gleichung $q \operatorname{tg} q = M/\mu$.

Ist das Verhältniss $a/b$ nicht sehr gross, so lässt sich die Membran als nahezu homogen ansehen, wobei die inneren Theile um ein Geringes dichter als die äusseren sind.

Beisp. 4. Man zeige, dass sich die Gleichung zur Ermittelung der Schwingungsperioden einer belasteten Membran in der Form

$$\frac{M}{\mu}\frac{1}{4p^2} = \sum \frac{a}{2\varphi}\frac{\sin\varphi h \sin\varphi(a-h)}{\sin\varphi a}\sin^2\frac{i'\pi k}{b}$$

schreiben lässt, worin $\Sigma$ die Summirung für alle Werthe der ganzen Zahl $i'$ verlangt und $\varphi^2 = p^2 - \pi^2 i'^2/b^2$ ist. Man findet dieses Resultat, indem man $\cos q(\pi - x)$ in eine Reihe von Cosinussen entwickelt, wobei $q$ keine ganze Zahl ist. Man erhält

$$\frac{\cos x}{1-q^2} + \frac{\cos 2x}{2^2-q^2} + \cdots = \frac{1}{2q^2} - \frac{\pi\cos q(\pi - x)}{2q\sin q\pi}.$$

Die Entwickelung gilt von $x = 0$ bis $x = \pi$, beide eingeschlossen. Setzt man $x = 0$, subtrahirt und schreibt $2y$ anstatt $x$, so wird

$$\frac{\sin^2 y}{1-q^2} + \frac{\sin^2 2y}{2^2-q^2} + \cdots = \frac{\pi\sin qy\cdot\sin q(\pi - y)}{2q\sin q\pi}.$$

Das Resultat ergibt sich dann leicht aus Beisp. 1.

§ 640. Beisp. **Die Membran unter dem Einfluss einer gegebenen periodischen Kraft.** Eine rechteckige Membran wird durch die Coordinatenaxen und die Geraden $x = a$, $y = b$ begrenzt. Eine endliche beschleunigende Kraft greift an dem Punkt $(h, k)$ an und wird durch $A\sin rt$ dargestellt. Man zeige, dass die erzwungene Schwingung durch

$$w = \frac{4A}{M}\sum\frac{\sin\frac{i\pi h}{a}\sin\frac{i'\pi k}{b}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{i'\pi y}{b}\sin rt}{m^2\pi^2\left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{i'^2}{b^2}\right) - r^2}.$$

gegeben ist, worin $\Sigma$ die Summirung für alle Werthe der positiven ganzen Zahlen $i$ und $i'$ angibt.

Die freien Schwingungen wurden in § 636 gefunden. Nimmt man sie zu der erzwungenen Schwingung hinzu und nimmt an, die Membran gehe von der Ruhe im Gleichgewichtszustand aus, so erhält man

$$w = \Sigma P\left(\sin rt - \frac{r}{pm}\sin pmt\right),$$

worin $P$ den Coefficienten von $\sin rt$ in der erzwungenen Schwingung bezeichnet.

Daraus lässt sich *die Wirkung einer Kraft ableiten, welche, wie die Momentankraft, nur sehr kurze Zeit thätig ist.* $r$ sei sehr gross und die Kraft $A\sin rt$ wirke nur die kurze Zeit $\pi/r$. Ist $F$ die der Membran mitgetheilte Bewegungsgrösse, so hat man $F = \int A\sin rt\,dt$, worin die Grenzen von $t=0$ bis $t=\pi/r$ gehen. Es wird daher $F = 2A/r$. Substituirt man, so ergibt sich, für ein sehr grosses $r$

$$w = \sum \sin\frac{i\pi h}{a}\sin\frac{i'\pi k}{b}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{i'\pi y}{b}\left\{-\frac{\sin rt}{r} + \frac{\sin pmt}{pm}\right\}\cdot\frac{2F}{M}.$$

Die Bewegung zur Zeit $t=\pi/r$ wird daher durch

$$w = 0,\quad \frac{dw}{dt} = \sum \sin\frac{i\pi h}{a}\sin\frac{i'\pi k}{b}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{i'\pi y}{b}\cdot\frac{4F}{M}$$

bestimmt.

## Die Bewegung der nicht homogenen Membran.

§ 641. Wir haben vor, in diesem Abschnitt zu zeigen, wie man mittelst der Theorie der conjugirten Functionen die Bewegung gewisser nicht homogener Membranen aus den Bewegungen homogener Membranen ableiten kann. Die entsprechenden Theoreme für ein Netzwerk von Massenpunkten findet man kurz in § 421 angegeben.

Wir beginnen damit, dass wir die Sätze über die conjugirten Functionen entwickeln, welche wir später nöthig haben, und untersuchen in dem nächsten Paragraphen ihre Anwendung auf die Bewegung der Membranen.

Wenn zwei Veränderliche $\xi$, $\eta$ mit $x$, $y$ durch die Relation

$$\xi + \eta\sqrt{-1} = f(x + y\sqrt{-1})$$

verbunden sind und $f$ eine beliebige reelle Function bedeutet, so mögen $\xi$, $\eta$ *conjugirte Functionen* genannt werden.

Differenzirt man diese Gleichung einmal nach $x$ und $y$ und setzt die Coefficienten der imaginären Grösse einander gleich, so erhält man das bekannte Resultat

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = -\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

Da auch $x + y\sqrt{-1} = F(\xi + \eta\sqrt{-1})$ ist, so ergibt sich auf dieselbe Art

$$\frac{\partial x}{\partial\xi} = \frac{\partial y}{\partial\eta}\quad\text{und}\quad \frac{\partial y}{\partial\xi} = -\frac{\partial x}{\partial\eta}.$$

Man kann ferner durch eine einfache Transformation der Variabelen zeigen, dass

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right\},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left\{\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right\}\left\{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right\}$$

ist.

Da man $x$, $y$ und $\xi$, $\eta$ in dieser Formel vertauschen darf, so erhält man leicht

$$\left\{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2\right\} = 1.$$

Wir haben auch einen geometrischen Satz nöthig. Wir wollen uns zwei Diagramme aufgezeichnet denken, von denen sich jedes auf ein System rechtwinkliger Axen bezieht. In dem einen seien $\xi$, $\eta$ die Coordinaten eines Punktes, den wir $\Pi$ nennen wollen, in dem anderen $x$, $y$ die Coordinaten eines Punktes, der $P$ heissen mag. Von den beiden Punkten sagt man, sie entsprächen sich. In dem einen Diagramm sind, unter $a$ und $b$ Constante verstanden, die durch $\xi = a$, $\eta = b$ definirten geometrischen Orte den Axen parallele Geraden. In dem anderen, in welchem $\xi$ und $\eta$ als die oben angegebenen Functionen von $x$ und $y$ betrachtet werden, sind diese Orte im Allgemeinen gekrümmte Linien. Ebenso stellt die Gleichung $\eta = \varphi(\xi)$ zwei sich entsprechende Curven dar, in jedem Diagramm eine. Wenn die Tangenten an diese Curven in den entsprechenden Punkten $\Pi$ und $P$ die Winkel $\varepsilon$ und $e$ mit der $x$-Axe machen, so ist $\operatorname{tg}\varepsilon = \partial\eta/\partial\xi$ und $\operatorname{tg} e = \partial y/\partial x$. Durch $P$ ziehe man die Curve $\eta = b$, worin $b$ seinen richtigen constanten Werth hat und die Tangente an diese Curve mache den Winkel $A$ mit der $x$-Axe. Bezeichnen nun Indices die partiellen Differentialquotenten nach $x$ und $y$, so wird $\eta_x + \eta_y \operatorname{tg} A = 0$. Man hat auch, wie oben bewiesen wurde, $\xi_x = \eta_y$ und $\xi_y = -\eta_x$. Da

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{\eta_x dx + \eta_y dy}{\xi_x dx + \xi_y dy} = \frac{-\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} e}{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} e}$$

ist, so ergibt sich $\varepsilon = e - A$. Daraus folgt unmittelbar, *dass der Winkel, den zwei beliebige Curven, die sich in $P$ schneiden, miteinander machen, dem Winkel zwischen den entsprechenden Curven, die sich in $\Pi$ treffen, gleich ist.* Mit anderen Worten: *Sich entsprechende Winkel sind gleich.*

Ziehen wir zwei einander entsprechende Netzwerke, in jedem Diagramm eines, und sind die Maschen eines jeden unendlich kleine Dreiecke, so folgt aus der Gleichheit der Winkel, *dass die Netzwerke an den entsprechenden Punkten einander ähnlich sind.* Die Verjüngung bez. das Verhältniss der Netzwerke ist jedoch über die ganzen Diagramme nicht dasselbe.

Aus der Gleichheit der Winkel folgt ferner, dass die durch $\xi = a$, $\eta = b$ definirten Curven sich in jedem Diagramm unter demselben Winkel schneiden. *Sie schneiden sich daher rechtwinklig.*

§ 642. Man nehme an, die Bewegung einer homogenen Membran sei bekannt, die unter gegebenen Grenzbedingungen seitliche Schwingungen, wie z. B. $w = \varphi(\xi, \eta, t)$, ausführt, und $w$ sei die Verschiebung eines Punktes, dessen Coordinaten $(\xi, \eta)$ sind. Dieser Werth von $w$ genügt dann der Gleichung

$$D_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right),$$

worin $D_0$ die Dichtigkeit und $T$ die Spannung der Membran angibt.

$x$, $y$ seien die Coordinaten eines Punktes einer anderen Membran, über welche man derart Sand gestreut und an ihr befestigt hat, dass der Sand mit der Membran schwingt. Die Dichtigkeit $D$ dieses nicht homogenen Mittels sei durch

$$\frac{D}{D_0} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

gegeben. Die Bewegungsgleichung dieser neuen Membran ist dann

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

Da aber $\xi$, $\eta$ bekannte Functionen von $x$, $y$ sind, so erhält man durch Substitution in die Gleichung $w = \varphi(\xi, \eta, t)$ die neue Beziehung $w = \psi(x, y, t)$, welche die Auflösung der Bewegungsgleichung der neuen Membran ist.

Auf diese Art wird die Bewegung der neuen Membran aus derjenigen der ersten mit den entsprechenden Grenzbedingungen abgeleitet.

§ 643. Im Allgemeinen hat man die wirkliche Bewegung der Membran nicht nöthig, sondern nur ihre möglichen Schwingungsperioden und Knotenlinien. Wir bemerken, dass die beiden Membranen dieselben Schwingungsperioden und sich entsprechende Knotenlinien haben.

§ 644. Bei dieser Transformation ist darauf zu achten, dass nur ein Punkt einer jeden Membran einem einzigen Punkt der anderen Membran in der in Betracht gezogenen Fläche entsprechen darf. Lässt man dies aus dem Auge, so können sich Schwierigkeiten bei der Auslegung ergeben.

§ 645. Die neue Membran ist selbstverständlich nicht homogen; man könnte daher einwenden, die hier in Betracht gezogenen Fälle kämen in der Anwendung nicht vor. Wenn jedoch die Dichtigkeit über die Membran hin nicht sehr veränderlich ist, so stellen die Resultate nahezu die Bewegung einer homogenen Membran dar. Zugleich muss man bedenken, dass diese Resultate nicht lediglich Annäherungen, sondern genaue Lösungen der Gleichungen sind. Eine solche Lösung, wenn sie mittelst eines einfachen Verfahrens erzielt wird, ist oft einer langwierigen Annäherung vorzuziehen, auch wenn es scheint, als ob die letztere directer anzuwenden wäre.

Man kann, um ein einfaches Beispiel anzuführen, die Schwingungen einer homogenen losen schweren Kette, die an zwei festen Punkten hängt, nur mittelst sehr umständlicher algebraischer Annäherung finden. Nimmt man aber an, die Kette sei nicht homogen, so lässt sich eine genaue Lösung der Gleichungen finden. Sie führt nahezu zu denselben Resultaten, wie die Annäherungen bei einer homogenen Kette. Siehe § 607.

Ein anderes Beispiel ist die Bewegung einer homogenen Membran, die von zwei Radienvectoren und zwei Kreisbogen begrenzt wird. Sie lässt sich zwar mit Hülfe der Bessel'schen Functionen ausdrücken; gibt man der Membran aber die richtige Dichtigkeit, so kann sie durch gewöhnliche Sinusse und Cosinusse dargestellt werden. Das ist bei weitem einfacher, als die Lösung in Bessel'schen Functionen und erleichtert überdies das Verständniss der Beschaffenheit der Bewegung.

§ 646. Man kann das Vorhergehende auch geometrisch ausdrücken.

Man betrachte zunächst eine nicht homogene Membran mit einer beliebigen festliegenden Grenze, die nach den Gesetz $w = \psi(x, y, t)$ schwingt, worin $w$ die Verschiebung des Punktes $P$ bedeutet, dessen Cartesische Coordinaten $x$, $y$ sind. Man zeichne auf der Membran zwei Systeme von Curven auf, deren Gleichungen $f(x, y) = \xi$ und $F(x, y) = \eta$ sind, worin $\xi$ und $\eta$ zwei Parameter darstellen. Die Curven sollen so sein, dass, wenn die Parameter $\xi$, $\eta$ um einen constanten Zuwachs $d\xi = \alpha$ oder $d\eta = \alpha$ zunehmen, die beiden Curvensysteme die Membran in Elementarquadrate theilen. Dass die entsprechenden Zuwächse von $\xi$ und $\eta$ gleich sein müssen, wenn die Curven Quadrate bilden sollen, folgt aus dem Satz, dass die kleinen sich entsprechenden Figuren, welche auf zwei Membranen nach der Methode der conjugirten Functionen gebildet werden, einander ähnlich sind. Es lässt sich übrigens auch aus den in § 641 erwähnten Relationen ableiten. Ist $ABCD$ ein solches Quadrat, so ziehe man durch einen Eckpunkt $A$ eine Parallele zur $x$-Axe und fälle von den beiden anliegenden Eckpunkten Lothe $BM$ und $DN$ auf diese Parallele.

Man erhält so zwei gleiche Dreiecke $ABM$, $ADN$; die Seiten in jedem Dreieck sind dabei die $dx$ und $dy$, die durch Variation von $\xi$ allein und dann von $\eta$ allein erzeugt werden. Daraus folgt, dass

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \quad \text{und} \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta = -\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi$$

ist. Aus § 641 ergibt sich daher, dass $d\xi = d\eta$ ist.

Der Flächeninhalt eines dieser Quadrate ist

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\alpha^2.$$

Da die Dichtigkeit $D$ durch

$$\frac{D_0}{D} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2$$

gegeben ist, *so bleibt die Masse eines jeden Elementarquadrates immer dieselbe.*

Zunächst betrachte man dann die entsprechende homogene Membran. Man ziehe auf der Membran der $x$- und $y$-Axe parallele Geraden in dem Abstand $\alpha$ voneinander so, dass jede Gerade einer der Curven entspricht, welche auf der nicht homogenen Membran gezogenen sind. Man ziehe ferner eine neue Grenzlinie, welche diese Geraden unter denselben Winkeln schneidet, unter welchen die Grenze der nicht homogenen Membran die entsprechenden Curven trifft.

Die Bewegungen dieser beiden Membranen sind dann an den entsprechenden Punkten die nämlichen. Man kann annehmen, eine jede sei durch $w = \psi(x, y, t)$ gegeben, je nachdem man $w$ durch $\xi$, $\eta$ oder durch $x$, $y$ ausdrückt.

§ 647. Man beachte, dass die beiden Membranen in solcher Beziehung zueinander stehen, *dass die Massen der sich entsprechenden Quadrate auf der nicht homogenen und der homogenen Membran einander gleich sind. Die Massen der Membranen sind daher im Ganzen dieselben, nur verschieden vertheilt.*

§ 648. Aehnliche Sätze gelten, wenn man von einer nicht homogenen Membran zu einer anderen übergeht; da dieser Fall aber nichts Neues bietet und nicht so einfach, wie der eben besprochene ist, so brauchen wir nicht näher auf ihn einzugehen.

§ 649. Nachdem man auf der Membran die beiden orthogonalen Curvensysteme $f(x, y) = \xi$, $F(x, y) = \eta$ aufgezeichnet hat, worin $\xi$ und $\eta$ Constante sind und beide Functionen der Laplace'schen Gleichung genügen, kann man eine dritte Gruppe von Curven ziehen, deren Gleichung

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \text{Constante}$$

ist. Sie sind selbstverständlich die Curven constanter Dichtigkeit.

Eine Curve constanter Dichtigkeit, welche durch irgend einen Punkt geht, schneidet die beiden Curven der zwei orthogonalen Gruppen, die durch denselben Punkt gehen, unter Complementärwinkeln. *Es lässt sich nun zeigen, dass sich die Sinusse dieser Winkel wie die Krümmungsradien der beiden Curven in diesem Punkt verhalten.*

Um dies zu beweisen, suche man den Werth von $\operatorname{tg} \theta$, wenn $\theta$ den Winkel bezeichnet, den die Curve gleicher Dichtigkeit mit der Curve $f(x, y) = \xi$ macht. Man erhält durch einfache Differentiation

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(f_y^2 - f_x^2) f_{xy} + 2 f_x f_y f_{xx}}{2 f_x f_y f_{xy} + (f_x^2 - f_y^2) f_{xx}},$$

worin die Indices, wie gewöhnlich, Differentialquotienten angeben. Da $f_x = F_y$ und $f_y = -F_x$ ist, so ergibt sich durch Substitution in den Zähler

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = -\frac{(F_x^2 - F_y^2) F_{xx} + 2 F_y F_x F_{xy}}{2 f_x f_y f_{xy} + (f_x^2 - f_y^2) f_{xx}}.$$

Der Krümmungsradius $\varrho$ der Curve $f$ wird aber durch

$$(f_x^2 - f_y^2) f_{xx} + 2 f_x f_y f_{xy} = \frac{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho}$$

bestimmt. Daraus folgt

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = -\frac{\varrho}{\varrho'}.$$

§ 650. Nicht die Bewegung eines jeden nicht homogenen Mittels lässt sich aus der *eines homogenen* ableiten. Eliminirt man nämlich $\xi$ aus

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \frac{D}{D_0}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0,$$

so findet man ohne Mühe

$$\frac{\partial^2 \log D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log D}{\partial y^2} = 0.$$

Daraus folgt unmittelbar nach § 641

$$\frac{\partial^2 \log D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \log D}{\partial \eta^2} = 0.$$

*Der natürliche Logarithmus der Dichtigkeit der nicht homogenen Membran muss daher der Laplace'schen Gleichung genügen.*

§ 651. Der bequemeren Bezugsverhältnisse wegen seien $(x, y)$ die Cartesischen Coordinaten, $(r, \theta)$ die Polarcoordinaten des Punktes $P$ auf der nicht homogenen Membran; $(\xi, \eta)$ die Cartesischen, $(\varrho, \omega)$ die Polarcoordinaten des entsprechenden Punktes $\Pi$ auf der homogenen Membran. Nimmt man an, die Beziehung zwischen den beiden Punkten sei

$$\xi + \eta\sqrt{-1} = c \log \frac{x + y\sqrt{-1}}{\beta},$$

so findet man

$$\xi = c \log \frac{r}{\beta}, \quad \eta = c\theta.$$

Gerade Grenzen auf der homogenen Membran, welche der $\xi$-Axe parallel sind, entsprechen daher geraden Grenzen auf der nicht homogenen Membran, welche durch den Coordinatenanfang gehen. Zugleich entsprechen gerade der $\eta$-Axe parallele Grenzen Kreisen, deren Centrum im Coordinatenanfang liegt.

Die Dichtigkeit $D$ ist durch

$$\frac{D}{D_0} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{r \partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{c}{r}\right)^2$$

gegeben. Wenn $r$ verschwindet, wird $D$ unendlich gross; man darf daher den Coordinatenanfang nicht auf der Fläche der Membran annehmen.

*Wenn man also die Bewegung einer durch ein Rechteck begrenzten Membran kennt, so ergibt die Transformation unmittelbar die Bewegung einer von zwei Kreisbogen und zwei beliebigen Radienvectoren begrenzten nicht homogenen Membran.*

§ 652. *Beispiel.* Die Bewegung einer rechteckigen homogenen Membran, die von den Geraden $\xi = h_1$, $\xi = h_2$; $\eta = k_1$, $\eta = k_2$ begrenzt ist, wird, wie wir wissen, durch den Typus

$$w = A \sin i\pi \frac{\xi - h_1}{h_2 - h_1} \sin i'\pi \frac{\eta - k_1}{k_2 - k_1} \cos pmt$$

dargestellt, worin $i$, $i'$ ganze Zahlen sind, welche der Gleichung

$$\frac{i^2}{(h_2 - h_1)^2} + \frac{i'^2}{(k^2 - k_1)^2} = \frac{p^2}{\pi^2}$$

genügen, und worin $m^2 = T/D_0$ ist. Es ergibt sich unmittelbar, dass die Bewegung einer nicht homogenen Membran, die von Bogen concentrischer Kreise von den Radien $h_1'$ und $h_2'$ und von zwei Radienvectoren $\theta = \alpha_1$ und $\theta = \alpha_2$ begrenzt wird, durch

$$w = A \sin \left( i\pi \frac{\log r - \log h_1'}{\log h_2' - \log h_1'} \right) \sin \left( i'\pi \frac{\theta - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right) \cos pmt$$

gegeben ist, worin die ganzen Zahlen $i$ und $i'$ an die Gleichung

$$\frac{i^2}{(\log h_2' - \log h_1')^2} + \frac{i'^2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} = \frac{c^2 p^2}{\pi^2}$$

gebunden sind und die Dichtigkeit $D$ der Membran durch $\frac{D}{D_0} = \left(\frac{c}{r}\right)^2$ bestimmt wird

§ 653. Eine andere brauchbare Beziehung zwischen den entsprechenden Punkten $P$ und $\Pi$ ist die folgende:

$$\xi + \eta\sqrt{-1} = c\left(\frac{x + y\sqrt{-1}}{c}\right)^n.$$

Sie ergibt

$$\xi = c\left(\frac{r}{c}\right)^n \cos n\theta, \quad \eta = c\left(\frac{r}{c}\right)^n \sin n\theta$$

und in Polarcoordinaten

$$\varrho = c\left(\frac{r}{c}\right)^n, \quad \omega = n\theta.$$

Durch diese Transformation werden alle Radienvectoren um den Coordinatenanfang gedreht und auf bekannte Art verändert.

Die Dichtigkeit $D$ der nicht homogenen Membran ist ferner durch

$$\frac{D}{D_0} = n^3 \left(\frac{r}{c}\right)^{2(n-1)}$$

gegeben.

Da für $\theta =$ Constante $\omega$ constant wird, so entsprechen durch den Coordinatenanfang gehende Geraden anderen Geraden, die ebenfalls durch den Coordinatenanfang gehen. Auch Kreise, deren Centrum im Coordinatenanfang liegt, entsprechen Kreisen mit dem Centrum im Coordinatenanfang.

Nimmt man $n = -1$, so erhält man die gewöhnliche Inversion

$$\varrho = \frac{c^2}{r}, \quad \omega = -\theta.$$

In diesem Fall verwandelt sich jeder Kreis in einen Kreis. Die Dichtigkeit der Membran ist durch $\frac{D}{D_0} = \left(\frac{c}{r}\right)^4$ bestimmt. Da sie für $r = 0$ unendlich gross wird, so muss das Inversionscentrum ausserhalb der Membran angenommen werden.

§ 654. Beisp. 1. Die Dichtigkeit einer Membran, die von zwei concentrischen festliegenden Kreisen mit den Radien $a$ und $b$ begrenzt wird, ist an einem Punkt im Abstand $\varrho$ vom Centrum $A/\varrho^2$. Sie schwinge symmetrisch so, dass die Knotenlinien concentrische Kreise sind; nach Beisp. 3, § 639 sind dann die möglichen Schwingungsperioden $2\pi(A/p^2T)^{\frac{1}{2}}$, worin $p$ sich aus $p(\log a - \log b) = i\pi$ ergibt und $i$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Führt man die Inversion in Bezug auf einen ausserhalb gelegenen Punkt aus, so erhält man sofort den folgenden Satz:

Eine nicht homogene Membran wird von zwei festen Kreisen mit den Mittelpunkten $C$ und $C'$ begrenzt. $O$ sei der Punkt, welcher eine gemeinschaftliche Polare in beiden Kreisen hat und diese Polare schneide die Gerade $OCC'$ in dem Punkt $R$. Die Dichtigkeit an irgend einem Punkt $P$ werde durch $D = A\cdot\left(\frac{OR}{OP\cdot RP}\right)^2$ bestimmt. Die Membran kann dann so schwingen, dass die Knotenlinien Kreise sind, und die möglichen Schwingungsperioden sind $2\pi\left(\frac{A}{p^2T}\right)^{\frac{1}{2}}$, worin $p$ sich aus $p\log\frac{a\cdot OC'}{a'\cdot OC} = i\pi$ ergibt und $a$, $a'$ die Radien der Kreise sind, deren Mittelpunkte in $C$ und $C'$ liegen.

Beisp. 2. Eine nicht homogene Membran wird von zwei starren Kreisen begrenzt, deren Gleichungen $\varrho = \mu r$ bez. $\varrho = \lambda r$ sind, und dabei bedeuten $\varrho$ und $r$ die Abstände irgend eines Punktes von zwei festen Punkten $S$ und $R$. Der erste Kreis ist ausserhalb des letzteren und liegt im Raum fest. Der innere kann sich frei bewegen und ist so belastet, dass sein Schwerpunkt sich in $R$ befindet. Die Dichtigkeit der Fläche an einem beliebigen Punkt $P$ der Membran ist $4Ab^2/\varrho^2r^2$, worin $2b$ der Abstand zwischen den festliegenden Coordinatenanfängen $S$ und $R$ ist Man beweise, dass die Membran so schwingen kann, dass die Knotenlinien Kreise $\varrho = kr$ sind, und dass die Perioden $P$ durch

$$\operatorname{tg}\left[\frac{2\pi}{P}\left(\frac{A}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\log\frac{\lambda}{\mu}\right] = \frac{P}{M}(AT)^{\frac{1}{2}}$$

bestimmt werden, worin $T$ die gleichmässige Spannung der Membran und $M$ die Masse der Belastung bezeichnet.

§ 655. *Beispiel.* Die Bewegung einer rechteckigen Membran, die von der $\xi$- und $\eta$-Axe und den Geraden $\xi = h$, $\eta = k$ begrenzt wird, ist, wie wir wissen, durch den Typus

$$w = A\sin\frac{i\pi\xi}{h}\sin\frac{i'\pi\eta}{k}\cos pmt$$

gegeben, worin $i$ und $i'$ beliebige ganze Zahlen sind, die der Gleichung

$$\frac{i^2}{h^2} + \frac{i'^2}{k^2} = \frac{p^2}{\pi^2}$$

genügen.

Führt man die Inversion in Bezug auf den Coordinatenanfang aus, so ergibt sich:

Die Bewegung einer unendlich grossen Membran, welche von der $x$- und $y$-Axe und den Bogen zweier Kreise begrenzt wird, deren Durchmesser $h'$, $k'$ sind und welche die $x$- und $y$-Axe in dem Coordinatenanfang berühren, wird durch den Typus

$$w = A\sin\frac{i\pi h'\cos\theta}{r}\sin\frac{i'\pi k'\sin\theta}{r}\cos pmt$$

bestimmt, worin die ganzen Zahlen $i$ und $i'$ an die Gleichung

$$i^2 h'^2 + i'^2 k'^2 = \frac{p^2}{\pi^2} c^4$$

gebunden sind; dabei wird vorausgesetzt, dass ihre Dichtigkeit durch

$$D = \left(\frac{c}{r}\right)^4 \cdot \frac{T}{m^2}$$

gegeben ist und $T$ die Spannung der Membran bezeichnet.

§ 656. *Beispiel.* Transformirt man dasselbe Theorem mit $n = 2$, so ist ersichtlich:

Die Bewegung einer unendlich grossen Membran, welche begrenzt wird: 1) von zwei Geraden $OA = h'$, $OB = k'$, die den Winkel $\pi/4$ einschliessen, und 2) von zwei gleichseitigen Hyperbeln, die durch $A$ bez. $B$ gehen und $OB$, $OA$ zu Asymptoten haben, ist durch den Typus

$$w = A \sin \frac{i\pi r^2 \cos 2\theta}{h'^2} \sin \frac{i'\pi r^2 \sin 2\theta}{k'^2} \cos pmt$$

gegeben, worin $i$ mit $i'$ durch

$$\frac{i^2}{h'^2} + \frac{i'^2}{k'^2} = \frac{p^2}{\pi^2} \frac{1}{c^2}$$

verbunden ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Dichtigkeit durch

$$D = 4\left(\frac{r}{c}\right)^2 \cdot \frac{T}{m^2}$$

bestimmt ist.

§ 657. Man nehme an, in einer unendlich grossen homogenen Membran sei eine sehr kleine Kreisfläche vom Radius $c$ erstarrt und werde gezwungen, eine transversale durch $w = A \cos pmt$ gegebene Bewegung auszuführen. Alsdann breiten sich gleichmässig nach allen Richtungen Wellen aus und die Schwingung irgend eines Punktes im Abstand $\varrho$ vom Centrum der Störung wird, wenn die Bewegung stationär geworden ist, durch $w = J_0(p\varrho) A \cos pmt$ bestimmt.

Hierbei haben wir angenommen, $c$ sei so klein, dass $J_0(pc) = 1$ ist. Eine solche kleine kreisförmige schwingende Fläche kann man passender Weise *eine Störungsquelle* oder kürzer *eine Quelle* nennen.

Transformirt man dieses Theorem nach der Methode der conjugirten Functionen, so erkennt man, dass aus dem in § 653 angegebenen Grund der unendlich kleine Kreis sich in eine ähnliche Figur, d. h. einen anderen Kreis transformirt.

§ 658. *Beispiel.* Die Schwingungen einer unendlich grossen homogenen Membran, die von einer festen Geraden begrenzt wird, welche wir zur $x$-Axe nehmen wollen, und auf die eine *Quelle* in einem Punkt $(\xi_1, \eta_1)$ wirkt, sind durch

$$w = \{J_0(p\varrho) - J_0(p\varrho')\} A \cos pmt$$

gegeben, worin

$$\varrho^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2,$$
$$\varrho'^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta + \eta_1)^2$$

ist. Darin bedeuten $\varrho$, $\varrho'$ die Abstände des Punktes $(\xi, \eta)$ von der Quelle und ihrem Bild auf der anderen Seite der $\xi$-Axe.

Wir schliessen daraus, dass die Schwingungen einer unendlich grossen nicht homogenen Membran, die von zwei festen Radienvectoren, welche den Winkel $\pi/n$ miteinander machen, begrenzt wird und auf welche eine Quelle im Punkt $r_1 \theta_1$ wirkt, durch

$$w = \{J_0(pR) - J_0(pR')\} A \cos pmt$$

bestimmt werden, worin

$$c^{2n-2} R^2 = r^{2n} + r_1^{2n} - 2 r^n r_1^n \cos n(\theta - \theta_1),$$

$$c^{2n-2} R'^2 = r^{2n} + r_1^{2n} - 2 r^n r_1^n \cos n(\theta + \theta_1)$$

ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Dichtigkeit der Membran durch

$$\frac{D}{D_0} = n^2 \left(\frac{r}{c}\right)^{2(n-1)}$$

definirt wird. Hier sind $r$, $\theta$ die laufenden Coordinaten irgend eines Punktes des Mittels, $w$ die transversale Verrückung am Punkt $\varrho$, $w$ und $D_0$ eine Constante.

Die Methode, die Bewegung einer nicht homogenen aus der einer homogenen Membran abzuleiten, hat der Verfasser in Bd. 12 der *Proceedings of the Mathematical Society*, 1881 mitgetheilt.

# Noten des Verfassers.

Zu § 56. **Transformation auf Hauptcoordinaten.** Die Methode der Transformation beliebiger Coordinaten $\theta$, $\varphi$, etc. in Hauptcoordinaten $\xi$, $\eta$, etc. kann man in rein mathematischer Form darstellen. Wir wollen zuerst annehmen, die Transformation sei in der Art möglich, dass

$$\left.\begin{aligned} 2T &= A_{11}\theta^2 + 2A_{12}\theta\varphi + \cdots = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + \cdots \\ 2U &= C_{11}\theta^2 + 2C_{12}\theta\varphi + \cdots = c_{11}\xi^2 + c_{22}\eta^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist, worin die Accente der Coordinaten in der Gleichung für $2T$ weggelassen wurden, weil sie für die vorliegende Untersuchung nicht nöthig sind. Auch $U_0$ ist in die zweite Gleichung der Gleichförmigkeit wegen nicht aufgenommen worden. Die Transformationsformeln, die zu finden sind, mögen dieselben, wie in § 69, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= l_1\xi + l_2\eta + \cdots \\ \varphi &= m_1\xi + m_2\eta + \cdots \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

sein.

Eliminirt man $\xi^2$ aus den Gleichungen (1) und differenzirt das Resultat nach $\theta$, setzt ferner $p_1^2 = -c_{11}/a_{11}$, so wird

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(Tp_1^2 + U) = (a_{22}p_1^2 + c_{22})\,\eta\,\frac{\partial\eta}{\partial\theta} + (a_{33}p_1^2 + c_{33})\,\zeta\,\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} + \text{etc.} \quad (3).$$

Die rechte Seite verschwindet, wenn man, für jedes $\xi$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, etc. setzt. Man erhält daher, wenn die Transformation möglich ist, nach Substitution aus (2)

$$(A_{11}p_1^2 + C_{11})\,l_1 + (A_{12}p_1^2 + C_{12})\,m_1 + \cdots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Ebenso ergibt sich, wenn man nach $\varphi$ differenzirt und $\eta = 0$, $\zeta = 0$, etc. ist,

$$(A_{12}p_1^2 + C_{12})\,l_1 + (A_{22}p_1^2 + C_{22})\,m_1 + \cdots = 0.$$

Wie man sieht, ist $p_1^2$ ein Werth von $p^2$, den man aus der **Lagrange**'schen Determinantengleichung in § 58 erhält, während die Werthe von $l_1$, $m_1$, etc. den Minoren der Determinante proportional sind. Eliminirt man $\eta^2$, $\zeta^2$, etc. der Reihe nach aus den Gleichungen (1), so gilt dasselbe von jeder der übrigen Verticalreihen von Coefficienten in den Transformationsformeln (2). Auf diese Art findet man die in den §§ 53 und 56 gegebene Regel. Die Transformationsformeln sind ausführlich in § 56 mitgetheilt worden. Man sieht, dass die Coefficienten von $x$, $y$, etc. die Werthe der Unterdeterminanten $I_{11}(p^2)$, etc. sind.

Wenn auf der rechten Seite der Gleichungen (1) ein Term, wie $\xi\eta$, vorkäme, so würde dieses Product auf der rechten Seite von (3) bei der Elimination von $\xi^2$ und der Differentiation nach $\theta$ einen Term $(a_{12}p_1^2 + c_{12})\,\xi\,\partial\eta/\partial\theta$ zur Folge haben. Eliminirte man dagegen $\eta^2$ und differenzirte nach $\theta$, so würde man

$$(a_{12}p_2^2 + c_{12})\,\eta\,\partial\xi/\partial\theta$$

erhalten. Nun können aber die Differentialquotienten von $\xi$ oder $\eta$ nach den

Coordinaten $\theta$, $\varphi$, $\psi$, etc. nicht sämmtlich Null sein, weil sonst $\xi$ oder $\eta$ von allen Coordinaten unabhängig wäre. Ebenso können, wenn die Wurzeln der Lagrange'schen Determinantengleichung alle ungleich sind, die Coefficienten $a_{12}p_1^2 + c_{12}$ und $a_{12}p_2^2 + c_{12}$ nicht beide verschwinden. In dem Fall also, in welchem die rechten Seiten von (3) zu Null werden, können Producte der Coordinaten in einem der Ausdrücke auf der rechten Seite von (1) nicht vorkommen.

Wenn die Lagrange'sche Gleichung gleiche Wurzeln hat, so sind, wie wir aus § 61 wissen, alle Unterdeterminanten Null. Die auf die vorstehende Art gefundenen Verhältnisse der $l$, $m$, etc. verlieren daher ihre Gültigkeit. Um die Sache zu vereinfachen, wollen wir annehmen, die Gleichung habe zwei gleiche Wurzeln und diese seien $p_1^2$ und $p_2^2$. Die Verhältnisse der Coefficienten in der dritten und den folgenden Verticalreihen von (2) kann man wie zuvor ermitteln, weil sie von ungleichen Wurzeln der Lagrange'schen Determinante abhängen. Da für die gleichen Wurzeln die ersten Minoren Null werden, so sind die Gleichungen (4) zur Bestimmung der Coefficienten einer der beiden ersten Verticalreihen von (2) nicht unabhängig voneinander. Lässt man eine dieser Gleichungen, wie in § 273, weg, so erhält man bei Benutzung der zweiten Minoren alle Buchstaben in der ersten Verticalreihe als Functionen zweier beliebiger, wie z. B. $l_1$ und $m_1$. Mit Hülfe derselben Formeln werden die Buchstaben in der zweiten Verticalreihe durch $l_2$ und $m_2$ ausgedrückt. Man hat so statt eines unabhängigen Coefficienten in jeder dieser Verticalreihen jetzt deren zwei.

Bei der Benutzung dieser Transformationsformeln ohne weitere Einschränkung sind wir aber nicht sicher, ob nicht etwa Glieder mit dem Product $\xi\eta$ in den beiden rechten Seiten der Gleichungen (1) vorkommen, wenn die Coefficienten der beiden Producte sich wie $p_1^2 : 1$ verhalten. Um sich von dem Fehlen dieser Glieder zu überzeugen, reicht es hin, wenn man den Coefficienten von $\xi\eta$ in *einem* der Ausdrücke für $T$ oder $U$ gleich Null setzt. Wählt man $T$, so erhält man durch Substitution aus (2) in (1)

$$A_{11} l_1 l_2 + A_{12}(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \cdots = 0$$

oder, wie in § 316 geschrieben wurde,

$$A(l_1 l_2) = 0.$$

Betrachtet man dann $l_1$, $m_1$ und $l_2$ als willkürlich, so ergeben sich genug lineare Gleichungen erster Ordnung, um alle übrigen Coefficienten der beiden ersten Verticalreihen in den Transformationsformeln finden zu können. Man erhält so anstatt zweier willkürlicher Constanten deren drei.

Zu § 60. **Die Bedingungen, unter welchen eine Function zweiten Grades eine definite Function ist.** Die Bedingungen, die wir auszugsweise dem Williamson'schen *Differential Calculus* entnehmen, beziehen sich auf die Function zweiten Grades $T$, welche eine definite positive Function sein muss; es steht ferner fest, dass alle aufeinander folgenden Determinanten positiv sind.

Nimmt man an, das Vorzeichen der Determinante würde durch irgend eine lineare Transformation der Coordinaten nicht geändert, so erhält man einen leichten Beweis des Satzes. Die Function zweiten Grades sei

$$2T = A_{11}\theta^2 + 2A_{12}\theta\varphi + A_{22}\varphi^2 + \text{etc.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Um die Sache zu vereinfachen, mögen nur vier Coordinaten $\theta$, $\varphi$, $\psi$, $\chi$ vorhanden sein. $D$ sei die Determinante, $D_1$ die Determinante, wenn eine der Coordinaten, z. B. $\chi$, gleich Null gesetzt wird, $D_2$ die Determinante, wenn zwei Coordinaten, z. B. $\chi$ und $\psi$, $D_3$, wenn drei $\chi$, $\psi$ und $\varphi$ gleich Null gesetzt werden u. s. f.

Fasst man alle $\theta$ zusammen, dann die $\varphi$ u. s. w., so kann man $T$ in der Form

$$2T = B_1(\theta + a_1\varphi + b_1\psi + c_1\chi)^2 + B_2(\varphi + b_2\psi + c_2\chi)^2 + B_3(\psi + c_3\chi)^2 + B_4\chi^2$$

schreiben, worin alle lateinischen Buchstaben auf der rechten Seite rationale Functionen von $A_{11}$, $A_{12}$, etc. und daher reell sind.

Man kann jetzt diesem Ausdruck die Gestalt

$$2T = B_1x^2 + B_2y^2 + B_3z^2 + B_4u^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

geben, worin $u = \chi$, $z = \psi + c_3\chi$, etc. ist.

Da (1) und (2) sich durch lineare Transformation auseinander ableiten lassen, so haben ihre Determinanten dasselbe Vorzeichen. Das Product $B_1B_2B_3B_4$ hat daher dasselbe Vorzeichen, wie $D$. Setzt man ferner $u = \chi = 0$ und schliesst ebenso, so stimmt das Product $B_1B_2B_3$ mit $D_1$ in Bezug auf das Vorzeichen überein und ebenso $B_1B_2$ mit $D_2$ und $B_1$ mit $D_3$. *Folglich sind $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ positiv, wenn die Determinanten $D$, $D_1$, $D_2$, $D_3$ positiv sind, sonst nicht.*

Daraus ergeben sich die Bedingungen, unter welchen $T$ eine definite positive Function zweiten Grades ist, unmittelbar. Die Bedingungen, unter welchen $T$ eine definite negative Function zweiten Grades ist, kann man aus den vorigen dadurch ableiten, dass man die Vorzeichen aller Coefficienten $A_{11}$, $A_{12}$, etc. in dem Ausdruck für $T$ ändert.

Dass die Determinanten von (1) und (2) dasselbe Vorzeichen haben, kann man auf die in § 71 angegebene Art zeigen. Wir wollen den zweiten Ausdruck nehmen und setzen:

$$x = l_1\theta + l_2\varphi + \cdots, \quad y = m_1\theta + m_2\varphi + \cdots, \quad z = \text{etc.} \quad \ldots \quad (3).$$

Durch Substitution in (2) erhält man einen Ausdruck zweiten Grades, dessen Determinante, wie man leicht sieht, durch

$$\begin{vmatrix} B_1l_1^2 + B_2m_1^2 + \cdots & B_1l_1l_2 + B_2m_1m_2 + \cdots & \text{etc.} \\ B_1l_1l_2 + B_2m_1m_2 + \cdots & B_1l_2^2 + B_2m_2^2 + \cdots & \text{etc} \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{vmatrix}$$

dargestellt wird. Sie ist offenbar das Quadrat von

$$\begin{vmatrix} \sqrt{B_1}\,l_1 & \sqrt{B_2}\,m_1 & \sqrt{B_3}\,n_1 & \text{etc} \\ \sqrt{B_1}\,l_2 & \sqrt{B_2}\,m_2 & \sqrt{B_3}\,n_2 & \text{etc} \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante von $T$, wenn $T$ als Function von $\theta$, $\varphi$, etc. ausgedrückt wird, ist daher

$$B_1B_2B_3\cdots \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & \text{etc.} \\ l_2 & m_2 & \text{etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc} \end{vmatrix}^2.$$

Das Vorzeichen hat sich daher nicht geändert.

Die Determinante auf der rechten Seite ist die Functionaldeterminante von $x$, $y$, etc. in Bezug auf $\theta$, $\varphi$, etc. Man kann daher aus diesem Resultat auch unmittelbar durch eine doppelte Transformation das Theorem in § 69 ableiten.

Zu § 631. **Ein biegsamer und ausdehnbarer gekrümmter Stab unter der Einwirkung einer Kraft, die elastische Formänderungen zur Folge hat.** Die in diesem Paragraphen angeführten statischen Theoreme lassen sich auf folgende

Art beweisen. $PQ$ sei ein Element der Axe des Stabes, wenn er nicht ausgedehnt ist, $P'Q'$ dasselbe Element, wenn er gespannt ist. $ds$, $ds'$ seien die Längen dieser Elemente, $a$, $\varrho$ die Krümmungsradien in $P$, $P'$. Man erhält, da $p$, $q$ die proportionale Verlängerung und Krümmungsvermehrung ist,

$$p = \frac{ds'}{ds} - 1, \quad q = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{a}\right) a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

$a$, $\theta$ seien die Coordinaten von $P$; $a(1+u)$, $\theta + \varphi$ die von $P'$. Da

$$ds = a\,d\theta, \quad (ds')^2 = a^2 (du)^2 + a^2 (1+u)^2 (d\theta + d\varphi)^2$$

ist, so ergibt sich dann leicht

$$p = u + \partial\varphi/\partial\theta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Vernachlässigt man ferner die Quadrate kleiner Grössen, so wird

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = a(1+u).$$

Daher

$$q = -\left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Wir wollen den Stab auf die Hauptaxen der gekrümmten Axe für $P'$ beziehen. Die nach innen positiv genommene Normale sei die $z$-Axe, die Tangente die $x$-Axe und $y$ stehe senkrecht auf der Krümmungsebene. Wir nehmen an, wie es bei solchen Problemen zu geschehen pflegt, die Massenpunkte des Stabes, die in einer auf der Axe senkrechten Ebene liegen, behielten ihre Lage in einer zur Axe senkrechten Ebene bei, wenn der Stab gebogen oder ausgedehnt wird, und ihre Abstände von der Axe würden nicht merklich geändert.

Man lege durch $P'$ und $Q'$ zwei Ebenen senkrecht zur Axe, $R'S'$ sei eine Elementarfaser des Stabes, die der Axe parallel läuft und zwischen den beiden Ebenen liegt, und $RS$ sei die Länge des Fadens, wenn der Stab nicht ausgedehnt ist. $y$, $z$ seien ferner die Coordinaten von $R'$. Wenn nun $ds$ die Länge von $P'Q'$ für den nicht ausgedehnten Zustand bezeichnet, so ist die Länge von $R'S'$ für den nicht gespannten bez. gespannten Stab

$$d\sigma = ds\left(1 - \frac{z}{a}\right), \quad d\sigma' = ds'\left(1 - \frac{z}{\varrho}\right) \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Die Resultante der Spannungen aller Fasern, welche die Elementarfläche $dy\,dz$ kreuzen, ist offenbar

$$E\,dy\,dz\left(\frac{d\sigma'}{d\sigma} - 1\right).$$

Substituirt man für $d\sigma'$. $d\sigma$, $1/\varrho$ ihre Werthe aus (4) und (1) und vernachlässigt alle Potenzen von $z/a$, welche über die zweite hinausgehen, weil der Stab dünn ist, so ergibt sich die resultirende Spannung dieser Fasern

$$= E\,dy\,dz\left\{p - (1+p)\,q\left(\frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2}\right)\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

$\omega$ sei der Flächeninhalt des Querschnittes des Stabes, $\omega k^2$ sein Trägheitsmoment für die $y$-Axe. Bedenkt man, dass der Schwerpunkt von $\omega$ in dem Coordinatenanfang liegt, so findet man durch eine leichte Integration die resultirende Spannung $T$ und das Paar $L$

$$T = E\omega\left\{p - \frac{k^2}{a^2}(1+p)\,q\right\}, \quad L = -E\omega\frac{k^2}{a}(1+p)\,q \quad \ldots \quad (6).$$

Da der Stab um seine Lage im unausgedehnten Zustand schwingt, so kann man die Quadrate und Producte der kleinen Grössen $p$ und $q$ vernachlässigen. $T$ und $L$ reduciren sich dann auf die in § 631, Beisp. 2 angegebenen Resultate.

Die Arbeit einer Faser pro Flächeneinheit des Querschnittes ist, wenn sie von $d\sigma$ im nicht gespannten auf die Läge $d\sigma'$ im gespanntem Zustand ausgedehnt wird, wie in Bd. 1, § 343 bewiesen wurde, $-\frac{1}{2}E(d\sigma'-d\sigma)^2/d\sigma$. Substituirt man, wie zuvor, für $d\sigma$, $d\sigma'$ und lässt die dritten Potenzen von $z/a$ weg, so ergibt sich für die Arbeit $W$

$$W\,ds = -\tfrac{1}{2}E\omega\,ds\left\{p^2+\frac{k^2}{a^2}q^2(1+p)^2\right\} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \quad (7).$$

Dieser Ausdruck reducirt sich auf den in § 631 gegebenen, wenn nur die niedrigsten Potenzen von $p$ und $q$ beibehalten werden.

Aus dem Werth von $W$ lassen sich die von $T$ und $L$ ableiten. Man halte $P'$ fest und dehne das Element $P'Q'$ weiter aus, ohne die Krümmung zu ändern, so, dass seine Länge $ds''$ wird. Alsdann ist $dp=(ds''-ds')/ds$. Die durch die Spannung an dem Ende $Q'$ verrichtete Arbeit ist $-T(ds''-ds')$ und die durch das Paar bei $Q'$ verrichtete $L(ds''-ds')/\varrho$. Man erhält mithin

$$-T+\frac{L}{\varrho}=\frac{\partial W}{\partial p}.$$

Der Stab erhalte nunmehr eine Krümmungsvermehrung ohne Aenderung der Länge des Elementes. Die Spannung bei $Q'$ verrichtet keine Arbeit, während die Arbeit des Paares $L(1/\varrho'-1/\varrho)\,ds'$ ist, worin $1/\varrho'$ die neue Krümmung bezeichnet. Da $dq=(1/\varrho'-1/\varrho)\,a$ ist, so folgt

$$L=\frac{a}{1+p}\,\frac{\partial W}{\partial q}.$$

Aus diesen Resultaten sind die in (6) gegebenen Werthe von $T$ und $L$ leicht abzuleiten.

Das der Statik entnommene Theorem in § 628, dass nämlich $L=\pm F/\varrho$ ist, wenn $F=k^2(E\omega+T)$ angenommen wird, ergibt sich ebenfalls leicht aus den Gleichungen (6). Bedenkt man, dass hier der Radius $a$ in unausgedehntem Zustand unendlich gross ist, und setzt $q=a/\varrho$, so wird

$$T=E\omega p,\quad L=-E\omega k^2(1+p)/\varrho.$$

Eliminirt man nun $p$ aus dem Werth von $L$, so ergibt sich das gesuchte Theorem.

Zu § 639. **Belastete Membranen.** Dieses Resultat lässt sich auch aus den Formeln in den § 76 und 77 ableiten. Wir beginnen damit, dass wir die unbelastete Membran auf Hauptcoordinaten beziehen. Zu diesem Zweck geben wir (siehe § 56) dem vollständigen Ausdruck für $w$ in § 636 die Form

$$w=\sin\frac{\pi i x}{a}\sin\frac{\pi i' y}{b}\,\xi+\sin\frac{\pi j x}{a}\sin\frac{\pi j' y}{b}\,\eta+\text{etc.},$$

die Grössen $\xi$, $\eta$, etc. sind dann Hauptcoordinaten.

Die doppelte lebendige Kraft der Membran ist, wie man leicht sieht,

$$\iint(dw/dt)^2\varrho\,dx\,dy=\tfrac{1}{4}\varrho ab\,(\xi'^2+\eta'^2+\cdots),$$

worin die Accente Differentialquotienten nach der Zeit bezeichnen. Bildet man jetzt die **Lagrange**'sche Determinante, so ist jedes Element derselben mit Ausnahme der in der Hauptdiagonale stehenden Null. Sind $q_1{}^2$, $q_2{}^2$, etc. die Wurzeln der Determinante,

und ist $M = \varrho a b$, so werden diese Elemente $\frac{1}{4} M(q^2 - q_1^2)$, $\frac{1}{4} M(q^2 - q_2^2)$, etc. Hier steht $q$ für die durch $pm$ in § 636 dargestellte Grösse; die Wurzeln $q_1$, $q_2$, etc. wurden in diesem Paragraphen ermittelt und mit Hülfe von $i$ und $i'$ ausgedrückt, indem $i$ sowohl als $i'$ die Werthe aller ganzen Zahlen beigelegt wurden.

Setzt man nun eine Masse $\mu$ auf den Punkt $(h, k)$, so ist seine Verschiebung durch

$$W = \sin \frac{\pi i h}{a} \sin \frac{\pi i' k}{b} \xi + \text{etc.}$$

gegeben; diesen Ausdruck kann man kurz

$$W = \alpha \xi + \beta \eta + \text{etc.}$$

schreiben. In der Gleichung für die lebendige Kraft tritt jetzt noch ein Zusatzglied auf, während die Kräftefunction dieselbe bleibt, wie zuvor. Dieses Zusatzglied ist

$$\mu \alpha^2 \xi'^2 + 2 \mu \alpha \beta \xi' \eta' + \text{etc.}$$

Folglich tritt auch zu jedem Element in der Lagrange'schen Determinante ein Zusatzterm hinzu. Die Determinante wird

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} M(q^2 - q_1^2) + \mu \alpha^2 q^2 & \mu \alpha \beta q^2 & \text{etc.} \\ \mu \alpha \beta q^2 & \frac{1}{4} M(q^2 - q_2^2) + \mu \beta^2 q^2 & \text{etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man und beachtet, dass nach § 76 nur die ersten Potenzen von $\mu$ in die Entwickelung aufgenommen werden, so erhält man

$$(q^2 - q_1^2)(q^2 - q_2^2) \text{ etc.} + \frac{4\mu}{M} q^2 \{ \alpha^2 (q^2 - q_2^2) \text{ etc.} + \beta^2 (q^2 - q_1^2) \text{ etc.} + \text{etc.} \} = 0.$$

Dividirt man durch das erste Glied, so wird

$$\frac{M}{4 \mu q^2} = \frac{\alpha^2}{q_1^2 - q^2} + \frac{\beta^2}{q_2^2 - q^2} + \text{etc.}$$

Substituirt man für $\alpha$, $\beta$, etc. ihre oben angegebenen Werthe und setzt $q = pm$, so kommt man zu dem in § 639 ausführlich gegebenen Resultat.

Diese Methode ist offenbar allgemein und findet auch auf Membranen von anderer Form Anwendung, wenn die richtigen Werthe für $\alpha$, $\beta$, etc. eingesetzt werden.

Zu § 641. **Conjugirte Functionen.** Die Anwendung der Theorie der conjugirten Functionen auf die Hydrodynamik ist dem Leser wahrscheinlich bekannt. Mit ihrer Hülfe kann man das Potential einer complicirten Bewegung der Flüssigkeit manchmal aus dem Potential einer einfacheren Bewegung ableiten. Dies liegt zwar selbstverständlich ausserhalb der Grenzen unseres Buches, doch wollen wir einige Sätze angeben, die uns neu zu sein scheinen.

Wenn die Bewegung einer Flüssigkeit in eine andere auf eine Art verwandelt wird, die der in § 642 für Membranen beschriebenen analog ist, so sind die kinetischen Energien der beiden Flüssigkeiten, welche sich entsprechende Elementarflächen einnehmen, einander gleich. *Daher sind die ganzen kinetischen Energien der beiden Bewegungen zwar gleich, aber über die Bewegungsflächen verschieden vertheilt.* Es entspricht dies dem in § 646 für Membranen bewiesenen Satz.

Man nehme an, es existire ein Wirbel $\Pi$ von der Stärke $m$ in irgend einem Moment in einer Flüssigkeit an einem Punkt, dessen Coordinaten $(\xi, \eta)$ sind. Alsdann gibt es einen Wirbel $P$ von gleicher Stärke an dem entsprechenden Punkt $(x, y)$ der anderen Flüssigkeit. Sie bewegen sich zwar nicht so, dass sie immer sich entsprechende Punkte einnehmen, doch kann man manchmal, *ohne die*

*Bewegung des Restes der Flüssigkeit zu untersuchen,* die Bewegung von $P$ aus der von $\Pi$ auf die folgende Art ableiten. *$\chi(\xi, \eta)$ sei eine Stromfunction (aber nicht die Stromfunction der Flüssigkeit), welche die Bewegung des Wirbels $\Pi$ so angibt, dass die Componenten seiner Geschwindigkeit parallel zu der $\xi$- und $\eta$-Axe $\frac{\partial \chi}{\partial \eta}$ bez. $-\frac{\partial \chi}{\partial \xi}$ sind. Die momentane Bewegung von $P$ wird dann durch eine Stromfunction*

$$\chi'(x, y) = \chi(\xi, \eta) - \frac{1}{2} m \log \mu$$

*bestimmt, d. h. die Componenten seiner Geschwindigkeit parallel zur $x$- bez. $y$-Axe sind $\frac{\partial \chi'}{\partial y}$ bez. $-\frac{\partial \chi'}{\partial x}$ und seine Bahn ergibt sich, wenn man $\chi'$ einer Constanten gleich setzt. Hier ist $\mu^2$ die Grösse, die in § 642 durch $D/D_0$ dargestellt wurde.* Im Allgemeinen kann man sagen, *dass man die Stromfunction von $P$ aus der von $\Pi$ durch Subtraction des Ausdrucks $\frac{1}{2} m \log \mu$ erhält, worin*

$$\mu^2 = (\partial \xi/\partial x)^2 + (\partial \xi/\partial y)^2 = (\partial \eta/\partial y)^2 + (\partial \eta/\partial x)^2 \text{ ist.}$$

Bei der Benutzung dieser Regel hat man die Stärke $m$ eines Wirbels als positiv anzusehen, wenn der Wirbel in einer der Bewegung der Uhrzeiger entgegengesetzten Richtung rotirt, d. h. also von der positiven Richtung der $\xi$ nach der positiven Richtung der $\eta$ hin.

Um dieses Theorem zu beweisen, beachte man, dass die Stromfunction in irgend einem Punkt $(\xi_1, \eta_1)$ in der einen Flüsssigkeit oder in dem Punkt $(x_1, y_1)$ in der anderen

$$\psi = -\frac{1}{2} m \log \{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2\} + R$$

ist, worin bei der letzteren Flüssigkeit die griechischen Buchstaben als bekannte Functionen der lateinischen angesehen werden. $R$ stellt dabei eine Reihe von Termen dar, die den ersten ähnlich sind und in Folge von anderen Wirbeln auftreten. Da der Wirbel $P$ sich nicht bewegt, so lässt sich seine Bewegung aus der der benachbarten Punkte ableiten, indem man auf die letzteren die umgekehrte Bewegung in Folge des Wirbels superponirt. Diese relative Bewegung ist durch die Stromfunction

$$\psi = -\frac{1}{2} m \log \{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2\} + \frac{1}{2} m \log \{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\} + R$$

gegeben.

Es sei $\xi_1 = \xi + \xi'$, $\eta_1 = \eta + \eta'$, $x_1 = x + x'$, $y_1 = y + y'$. Wir wollen den Ausdruck für $\psi$ in Potenzen von $x'$, $y'$ entwickeln und dabei

$$\xi_1 - \xi = \xi_x x' + \xi_y y' + \frac{1}{2}(\xi_{xx} x'^2 + 2\xi_{xy} x'y' + \xi_{yy} y'^2) + \text{etc.}$$

und einen ähnlichen Ausdruck für $\eta_1 - \eta$ einsetzen. Die Indices $x$, $y$, etc. bezeichnen hierin Differentiationen. Man findet, wenn man die dritten Potenzen kleiner Grössen beibehält, dass $x'^2 + y'^2$ ein gemeinschaftlicher Factor ist. Entwickelt man den Logarithmus, so wird

$$\psi = -\frac{m}{2}\left\{\frac{x' \partial \log \mu}{\partial x} + y' \frac{\partial \log \mu}{\partial y}\right\} - m \log \mu + R,$$

worin $\mu^2 = \xi_x^2 + \xi_y^2$ ist. In Folge des ersten Terms dieser Reihe sind die Componenten der Geschwindigkeit von $P$ parallel der $x$- und $y$-Axe $-\frac{1}{2} m \partial \log \mu/\partial y$ und $\frac{1}{2} m \partial \log \mu/\partial x$.

Man betrachte nun weiter irgend einen Term von $R$, der die Folge des Auftretens eines Wirbels bei $(\xi_0, \eta_0)$ ist, wie z. B.

$$R = -\frac{1}{2} m \log \{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2\}.$$

Die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes der Flüssigkeit bei $\Pi$ ergeben sich, indem man diesen Term nach $\eta$ und $\xi$ differenzirt und bei der letzteren Operation das Vorzeichen ändert. Sie seien $u$, $v$. Als Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes bei $P$ erhält man auf ähnliche Art $u\eta_y - v\xi_y$ und $-u\eta_x + v\xi_x$. Ist nur ein unabhängiger Wirbel vorhanden, so sind die in $R$ enthaltenen Wirbel Bilder von $\Pi$ und ihre Lage wird durch die von $\Pi$ bestimmt. Sind die Bedingungen des Problems derart, dass die Componenten der momentanen Geschwindigkeit von $\Pi$ durch $u = \chi_\eta$, $v = -\chi_\xi$ sich ausdrücken lassen, so werden die Componenten der Geschwindigkeit von $P$ in Folge derselben Terme durch $\chi_y$, $-\chi_x$ dargestellt. Nimmt man daher alle Terme von $\psi$, so erhält man als Componenten der Geschwindigkeit von $P$,

$$\chi_y - \tfrac{1}{2} m \partial \log \mu / \partial y \text{ und } -\chi_x + \tfrac{1}{2} m \partial \log \mu / \partial x.$$

Als Beispiel zu dieser Regel wollen wir die Bahn eines Wirbels $P$ untersuchen, welcher in der Ecke schwimmt, die zwei unter dem Winkel $\Pi/n$ gegen einander geneigte Gerade bilden. Dieses Problem hat Prof. Greenhill in dem *Quarterly Journal*, Bd. 15 besprochen. Wir wollen zuerst annehmen, ein Wirbel $\Pi$ schwimme in dem unendlichen von der $\xi$-Axe begrenzten Raum. Bringt man ein Bild auf die negative Seite dieser Axe, so sieht man, dass sich der Wirbel $\Pi$ parallel der $\xi$-Axe mit der Geschwindigkeit $m/2\eta$ bewegt. Seine Stromfunction ist daher $\frac{1}{2} m \log \eta$. Man nehme einen Punkt auf der $\xi$-Axe als Coordinatenanfang und drehe die negative Seite der Axe um den Coordinatenanfang, bis sie mit der positiven den Winkel $\pi/n$ bildet. Um dies auszudrücken, benutzen wir die Transformationsformeln in § 653. Wir erhalten so $\eta = c(r/c)^n \sin n\theta$. Der Werth von $\mu$ ist daher $n(r/c)^{n-1}$. Der Regel entsprechend ist die Stromfunction, welche die Bewegung des Wirbels $P$ in der Ecke angibt,

$$\chi' = \tfrac{1}{2} m \log \eta - \tfrac{1}{2} \log \mu$$
$$= \tfrac{1}{2} m \log (r \sin n\theta).$$

Die Bahn ist daher durch $r \sin n\theta = c$ gegeben, worin $c$ eine Constante bezeichnet. Man beachte, dass $n$ keine ganze Zahl zu sein braucht.

Wenn sich zwei Kreise in $A$ und $B$ schneiden, so kann man durch Inversion dieses Resultates *die Bewegung eines Wirbels $V$ in dem Raum zwischen den Kreisgrenzen finden.* $\theta$ sei der Winkel, den der durch $A$, $B$ und den Wirbel $V$ gehende Kreis mit einer der beiden Kreisgrenzen macht und $\alpha$ der Winkel zwischen den Kreisgrenzen. Die Stromfunction des Wirbels $V$ findet man dann, indem man $\frac{1}{2} m \log \mu$ von dem oben angegebenen Werth von $\chi'$ abzieht, worin $\mu = \left(\frac{c}{r}\right)^2$ ist, wie in § 653 gezeigt wurde. Die Stromfunction des Wirbels $V$ ist daher

$$\chi = \frac{m}{2} \log \left( AV \cdot BV \cdot \sin \frac{\pi\theta}{\alpha} \right).$$

Die Bahn des Wirbels ergibt sich aus der Gleichung

$$AV \cdot BV \cdot \sin \frac{\pi\theta}{\alpha} = C,$$

worin $C$ eine Constante bedeutet.

Einen Haupteinwand gegen die Benutzung conjugirter Functionen bei hydrodynamischen Problemen könnte man aus der Schwierigkeit, die richtigen Transformationsformeln zu finden, ableiten. Doch gibt es zu ihrer Ermittelung eine bequeme Regel, die darin besteht, *dass sich, sobald die Bewegung einer Flüssigkeit*

*in dem von einer oder zwei unendlich grossen Curven begrenzten Raum bekannt ist, allgemein die Bewegung mit denselben Grenzen finden lässt, wenn sie durch das Auftreten von Quellen und Wirbeln complicirt ist.* Um dies zu beweisen, sei $\xi$ und $\eta$ das Geschwindigkeits- und Strompotential dieser Bewegung. $\eta$ ist dann längs der Grenzen constant. Benutzen wir $\xi$, $\eta$ als Transformationsformeln, so verwandeln sich die gegebenen Grenzen in Gerade, welche der $\xi$-Axe parallel sind. Die Bewegung in Folge der Wirbel und Quellen in diesem Raum ist bereits untersucht worden. Daraus lassen sich dann die Bewegungen in den allgemeineren Räumen ableiten.

Man kann jede geschlossene Curve, wie z. B. die Ellipse, als einen Schnitt durch einen unendlich grossen Cylinder ansehen. Kennt man nun sein Potential an irgend einem äusseren Punkt, wenn er mit einer gegebenen Menge von Elektricität geladen ist, so lässt sich die Bewegung einer Flüssigkeit mit Wirbeln und Quellen ausserhalb der Ellipse unmittelbar aus der entsprechenden Bewegung um einen Kreis ableiten.

Näheres über diese Sätze findet man in einem Aufsatz des Verfassers in Bd. 12 der *Proceedings of the Mathematical Society*, 1881.

---

# Bemerkungen zum vorliegenden Bande.

Von **F. Klein.**

Der zweite Band von Routh's Dynamik starrer Körper, welchen wir hiermit dem deutschen Publikum in Uebersetzung vorlegen, übertrifft den ersten vielleicht noch an Reichhaltigkeit, jedenfalls aber an Originalität der Untersuchungen. Der Verfasser wünscht in seiner Vorrede darauf aufmerksam zu machen, dass es sich nicht sowohl um eine systematische Entwickelung, als um eine Reihe nebeneinander stehender Monographien handelt. Inzwischen tritt *eine* wichtige Frage doch immer wieder in den Vordergrund des Interesses, das ist die nach den *kleinen Schwingungen* der Systeme. Wir haben in der gesammten deutschen oder französischen Litteratur kein Werk, welches diese unter praktischen Gesichtspunkten so bedeutsame Erscheinungsclasse gerade nach der praktischen Seite hin auch nur entfernt mit der Vollständigkeit behandelte, wie es hier bei Routh geschieht. Um es mathematisch auszudrücken: die Technik der Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten wird hier auf das Höchste entwickelt. Vom Standpunkte des continentalen Mathematikers aus wird man allerdings darauf Gewicht legen, den Geltungsbereich dieser Entwickelungen vorsichtiger umgrenzt zu sehen. In dieser Hinsicht darf ich hier der Kürze halber auf die von Sommerfeld und mir herausgegebene *Theorie des Kreisels* verweisen, von welcher gerade eben die zweite Lieferung erscheint. In Kap. IV, § 9 daselbst wird allgemein von dem Werthe mathematischer Annäherungsmethoden gehandelt und der Grundsatz aufgestellt, dass man in jedem Falle in der Lage sein muss, eine Abschätzung für den entstehenden Fehler eintreten zu lassen. Man vergleiche ferner Kap. V, § 6—8, wo im Zusammenhange von der Stabilität der Bewegungen und von der Behandlung der kleinen Schwingungen durch Beibehaltung allein der niedrigsten Terme gehandelt wird. — Uebrigens darf ich auch hier nicht unterlassen, für die vielfache Anregung zu danken, die wir bei der Theorie des Kreisels gerade den englischen Autoren und unter ihnen zumal Hrn. Routh verdanken; ein Blick auf unsere Schrift wird den Leser hierüber sofort orientiren.

Des Ferneren möchte ich hier noch ganz besonders auf die Darstellung verweisen, welche in Kap. X, § 442ff. die *Variationsprincipe der Mechanik* gefunden haben. Der Verfasser entwickelt hier, was man die *ursprüngliche* Theorie von Hamilton nennen kann. In derselben stehen die beiden Integrale $\int L\,dt$ und $\int T\,dt$ von vornherein nebeneinander, im Gegensatz zu der Darstellung, welche durch Jacobi's Vorlesungen über Dynamik in Deutschland verbreitet worden ist und noch verschiedentlich vorherrschen dürfte. Jacobi hat sich seiner Zeit ausdrücklich gegen den Gebrauch des Integrals $\int T\,dt$ erklärt. Inzwischen ist dabei, wie Herr A. Mayer in den Berichten der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften von 1886 gezeigt hat, ein Missverständniss untergelaufen: man kann das Integral $\int T\,dt$ sehr wohl gebrauchen, wenn man sich nur entschliesst, auch die Zeit $t$ mit zu variiren. Ueberhaupt scheint Jacobi's Darstellung der Hamilton-schen Theorie, so interessant sie ist und so viele Fortschritte sie nach anderer

Seite gebracht hat, den eigentlichen Grundgedanken von Hamilton, die bei den englichen Autoren festgehalten werden, nur mangelhafte Rechnung zu tragen. Um so merkwürdiger ist ein Unterschied der hierauf bezüglichen deutschen und der englischen Terminologie: wir nennen den Satz, dass bei festgehaltenen Grenzen vermöge der mechanischen Differentialgleichungen $\delta\int L\,dt = 0$ wird, allgemein das „Hamilton'sche" Princip, und gerade diese Benennung scheint in England völlig unbekannt zu sein!

Zu dem gleichen Kap. X noch folgende Bemerkungen:

a) *§ 445, p. 329.* In diesem Paragraph wird ganz kurz angegeben, welche Beschränkung man den Variationen der Coordinaten auferlegen muss, damit die Variationsprincipe auch bei solchen mechanischen Aufgaben in Geltung bleiben, in welche nach der Ausdrucksweise von Hertz „nicht holonome" Bedingungsgleichungen eingehen. Hiermit werden also nicht nur die hierauf bezüglichen kritischen Bemerkungen von Hertz, die er in seinem Werk über die Principien der Mechanik (1894) gibt, vorweg genommen, sondern auch die positive Wendung, welche Hr. Hölder dieser Sache in den Göttinger Nachrichten von 1896 gegeben hat (vergl. auch die Bemerkungen zum 1. Bande, p. 467).

b) *§ 450, p. 331.* Die Function $L_1 = L - \Sigma pq'$, welche Routh als die „modificirte" Lagrange'sche Function bezeichnet, wird in Cambridge gemeinhin die Routh'sche Function genannt; in der That ist Herr Routh der Erste gewesen, welcher diese Function zur Anwendung gebracht hat, wie ich dies bereits in der Vorrede zu Bd. I hervorgehoben habe.

c) *§ 458, p. 337.* Die Frage, ob bei einem Problem der Variationsrechnung ein wirkliches Maximum oder Minimum vorliegt, ist durch Weierstrass wesentlich über den von Jacobi erreichten Standpunkt hinaus gefördert worden. Es ist dies eine derjenigen Weierstrass'schen Leistungen, welche immer noch erst durch Vermittelung der Vorlesungshefte bekannt sind, sofern man nicht auf gelegentliche Erörterungen in den Schriften Weierstrass'scher Schüler recurriren will; hoffentlich lässt eine zusammenfassende Darstellung dieser Theorie nicht mehr zu lange auf sich warten. Uebrigens werden die besonderen Resultate, welche Herr Routh unter Bezugnahme auf Jacobi anführt, von den Weierstrass'schen Bemerkungen nicht tangirt. Die originellen Ausführungen, welche Hr. Routh auf p. 335ff. über discontinuirliche Bewegungen gibt, dürften nach anderer Seite als interessante Beiträge zur Variationsrechnung anzusehen sein.

d) *§ 459, p. 340.* Die „Inversion" ist natürlich nur ein Beispiel dafür, dass man unter Umständen in der Mechanik irgendwelche Raumtransformationen mit Nutzen gebrauchen kann. Beispielsweise hat Hr. Appell *projective Umformungen* mit Erfolg herangezogen (American Journal XII, XIII, XVII).

e) *§ 461, p. 443.* Hier ein genaues Citat betr. die ursprünglichen Publicationen von Boltzmann, Clausius und Szily:

Boltzmann: Wiener Sitzungsberichte, Bd. 53, 1866.
Clausius: Annalen der Physik und Chemie, Bd. 142, 1871; Bd. 146, 1872.
Szily: Annalen der Physik und Chemie, Bd. 145, 1872; Bd. 149, 1873.

Einen zusammenfassenden Bericht gibt Bryan in den Reports der British Association von 1891, p. 88ff.; vgl. auch den weiteren Bericht desselben in den Reports von 1894.

f) *§ 463ff. (p. 344..): Die Integrale der allgemeinen Bewegungsgleichungen.*

α) Die ältere Theorie hat noch vor dem Erscheinen von Jacobi's Vorlesungen über Dynamik eine vortreffliche Darstellung gefunden in Cayley's Reports on the recent progress of theoretical dynamics (British Association von 1857 und 1861, gesammelte Werke Bd. 3 und 4).

$\beta$) Die neuere Entwickelung dieses Gebietes wird binnen Kurzem in zusammenhängender Weise in einem Referate behandelt werden, welches Hr. **Stäckel** für die deutsche Mathematiker-Vereinigung vorbereitet und das in Bd. 6 der Berichte der Vereinigung erscheinen soll. Ebenda weitere Ausführungen zu den meisten der hier berührten Punkte.

$\gamma$) Mittlerweile sei, insbesondere was die einschlägigen Arbeiten von **Lie** und **A. Mayer** angeht, auf das Buch von **Goursat** verwiesen (Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1891, deutsch von **Maser**, Leipzig 1893).

---

Ich füge zu den anderen Kapiteln des **Routh**'schen Werkes noch folgende zerstreute Notizen hinzu:

1) *§ 41, p. 39. Einfluss der Erdrotation auf die Bewegung der starren Körper.* Die betreffenden Arbeiten von **Gilbert** finden sich in den Annales de la Société scientifique de Bruxelles und zwar:
   Bd. II (1878) „Etude historique et critique sur le problème de la rotation d'un corps solide",
   Bd. VII (1883) „Sur l'application de la méthode de Lagrange aux mouvements relatifs".

2) *§ 128ff., p. 94. Der darstellende Punkt.* Die Verwendung des „darstellenden Punktes" zur Veranschaulichung der Bewegung der Systeme spielt in den modernen Arbeiten über höhere Mechanik (man vergl. **Poincaré**, nouvelles théories de la mécanique céleste, oder **Hertz**, Principien der Mechanik) eine wichtige Rolle. Der Unterschied in der Behandlung dieses Ansatzes bei den letztgenannten Autoren einerseits und Hrn. **Routh** andererseits ist charakteristisch genug. Während sich Hr. **Routh** scheut, den Uebergang zu mehr als drei Graden der Freiheit zu machen und damit mehrdimensionale Vorstellungen zuzulassen, fehlt es bei den continentalen Mathematikern an einer so eingehenden und anschaulichen Ausbildung der Methode im dreidimensionalen Falle, wie sie Hr. **Routh** durch die Gegenüberstellung der Resultate in § 129 und § 134 erzielt.

3) *§ 211, p. 158ff. Schwere, unsymmetrische Kreisel.* Es werden hier nur die Untersuchungen der **S. Kowalewsky** in Bd. 12 der Acta Mathematica (1889) genannt. Man kann hinzufügen, erstlich, dass die betr. Entwickelungen inzwischen von einer Reihe anderer Mathematiker, insbesondere von russischen Gelehrten weitergeführt und auch nach der geometrischen Seite studirt wurden, sodann, dass es noch einen anderen Fall eines unsymmetrischen Kreisels gibt, bei dem man mit Hülfe der heutigen Methoden bis zu einem vollen Verständniss der eintretenden Bewegung kommt. Es ist dies der Fall des Hrn. **Hess** (Math. Annalen Bd. 37, 1890), der gleichfalls von den russischen Mathematikern wesentlich weiter gefördert worden ist (**Joukowsky**, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. III, 1892/93; **Nekrassoff** in Bd. 47 der Mathematischen Annalen, 1896). Derselbe betrifft allerdings nur eine particuläre Bewegungsform, aber der Kreisel, welcher der Betrachtung zu Grunde liegt, ist allgemeiner als derjenige der **S. Kowalewsky**, so dass beide Fälle im Ganzen gleich viel Constante enthalten. Näheres siehe in der Theorie des Kreisels von **Sommerfeld** und mir p. 374ff. (Kap. V, § 9).

4) *Kap. VI, p. 207ff. Beschaffenheit der durch lineare Gleichungen gegebenen Bewegung.* (Mehrfache Wurzeln der charakteristischen Determinante.)

   Schon in den Bemerkungen zum ersten Bande wurde (p. 467 daselbst) darauf hingewiesen, dass der Irrthum von **Lagrange**, demzufolge mehrfache Wurzeln seiner Determinante stets Lösungen von der Form $(A + Bt) \sin pt$

zur Folge haben sollten, zuerst von Weierstrass 1858 in den Berliner Monatsberichten aufgedeckt wurde und dass hier also Weierstrass vor Routh zu nennen ist. Weierstrass hat dann 1868 (ebenfalls in den Monatsberichten) die einschlägigen Fragen, soweit dieselben von der simultanen Reduction zweier quadratischer oder bilinearer Formen auf eine kanonische Form abhängen, durch seine *Elementartheilertheorie* endgültig beantwortet. Es ist unmöglich, hier auf die umfangreiche Literatur einzugehen, welche sich an die Weierstrass'sche Arbeit anschliesst, oder den genauen Vergleich mit den zum Theil allgemeineren, aber weniger systematischen Untersuchungen von Routh anzustellen. Eine Einleitung in die Theorie gibt u. A. Gundelfinger in der 3. Auflage von Hesse's Raumgeometrie (1876) oder auch Bôcher in seinem Werke über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie (1894).

5) *§ 286, p. 222 ff. Stabilitätsbedingungen.* Einfache Kriteria, die sich auf das Vorzeichen des reellen Theils der Wurzeln beziehen, hat neuerdings auch Hurwitz angegeben (Math. Annalen 46, 1894—95).

6) *§ 342, p. 253 ff. Mitschwingen der Unterlage eines Pendels.* Was die Bestimmung dieses Mitschwingens angeht, so vergleiche man die neuen Entwickelungen von Helmert und Schumann in den Schriften des k. preussischen geodätischen Instituts, 1896.

7) *§ 355, p. 258. Zweite Annäherungen.* Man sehe auch Korteweg im T. I der zweiten Serie der Archives néerlandaises (Harlem 1897), der direct an Routh anknüpft. Uebrigens könnten hier zahlreiche Entwickelungen mit herangezogen werden, deren sich die Astronomen bei der Störungsrechnung bedienen. Andererseits ist die Frage nach der *Convergenz* der Methode der successiven Annäherungen in den letzten Jahren der Gegenstand wichtiger Arbeiten von Picard geworden; siehe dessen Traité d'analyse, Bd. III (1896).

8) *§ 433, p. 322 ff. Die Sturm'schen Theoreme.* Was die Existenz der Sturmschen Functionen angeht, so vergleiche man auch hier Picard's Traité d'analyse, Bd. III, p. 119 ff., andererseits aber etwa den Aufsatz von Bôcher „On the theorems of oscillation of Sturm and Klein" im 4. Bande der 2. Serie des American Bulletin, 1898 (wo eine von mir aufgestellte Verallgemeinerung der Sturm'schen Sätze bewiesen wird).

9) Zu den *astronomischen Kapiteln* XI und XII vergl. vor allem Tisserand's Traité de mécanique céleste, Bd. II (1891), Bd. III (1894). Auch will ich gerne auf das in Deutschland nur erst wenig bekannte Buch aufmerksam machen: E. W. Brown, an introductory treatise on the lunar theory, Cambridge 1896.

Was speciell die in § 535, p. 394—95 besprochenen Polschwankungen angeht, so zeigen dieselben neuerdings einen sehr unregelmässigen Verlauf; vergl. die zusammenfassende Darstellung bei Albrecht in den Publicationen des Centralbureaus der internationalen Erdmessung von December 1897 (Berlin 1898).

10) *§ 581, p. 435.* Die Analogie, welche zwischen den Gleichgewichtsproblemen eines Fadens und den Bewegungsgleichungen eines Punktes besteht, ist in älterer Zeit ganz besonders von Moebius entwickelt worden. Siehe dessen *Lehrbuch der Statik*, Bd. II (1837; ges. Werke Bd. III).

11) *§ 597, p. 448.* Man vergleiche:

W. Thomson (Lord Kelvin), popular lectures III, London 1891, p. 442: „on the forces concerned in the laying and lifting of deep-sea cables", sowie

W. v. Siemens, Lebenserinnerungen, Berlin 1897, p. 130 ff.

12) *§ 599, p. 451. Schwingungen der an einem Ende aufgehängten Kette.* Ausführlichere Literaturangaben über die Geschichte der Bessel'schen Functionen

sowie die neueste Zusammenstellung über die Eigenschaften dieser Functionsclasse geben:

Gray-Matthews, A treatise on Bessels functions, London 1895.

13) *§ 612, p. 465 ff.* Ueber die Schwingungen der *gespannten Fäden oder Membranen* findet man weiteres reiches Material bei Lord Rayleigh, the theory of sound, 2. ed., 2 Bände, London 1894, 1896. — Man vergl. auch Pockels, über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik, Leipzig 1891.

14) *§ 618, p. 472.* Deutet man $t$ als dritte Coordinate, so erhält man statt der graphischen Darstellung eine Fläche, welche bereits Monge modellirt und später Muret für Delagrave & Co. in Paris vervielfältigt hat. Neuerdings hat auf meine Anregung Hr. Schellenberg derartige Modelle construirt, und zwar nicht nur für die gezupfte, sondern auch für die angeschlagene Saite; dieselben können von der Brill'schen Verlagshandlung in Darmstadt bezogen werden.

15) *§ 619, p. 473.* Es ist unmöglich, hier ausführlich auf die hochentwickelte Theorie der Darstellung von Functionen durch die Fourier'sche Reihe einzugehen. Hier werde nur hervorgehoben, dass bei der Darstellung des Bewegungsvorganges gerade der gezupften Saite eine interessante Schwierigkeit entsteht: Die Reihe selbst und die aus ihr durch gliedweise Differentiation hervorgehende Reihe convergiren überall, nicht aber die Reihe, die man durch zweimalige Differentiation erhält. Mit anderen Worten: die Curve selbst, um die es sich handelt, wird durch die Annäherungscurve, die man aus den ersten $n$ Gliedern der Reihe enthält, um so besser approximirt, je grösser $n$ ist, ebenso ihre Tangente, nicht aber ihr Krümmungsradius. Man kann also daraus, dass jedes Glied der Reihe für sich der partiellen Differentialgleichung der Saitenschwingungen genügt, keineswegs schliessen, dass es die durch die Reihe dargestellte Function thut, was doch wieder von anderer Seite als sicher gelten muss. Man vergl. in dieser Hinsicht:

F. Lindemann, Die Schwingungsform gezupfter und gestrichener Saiten. Freiburger Berichte, Bd. 7, 1879.

A. Harnack, Ueber die mit Ecken behafteten Schwingungen gespannter Saiten. Math. Annalen, Bd. 29, 1887.

Von neueren Experimentaluntersuchungen über die Form schwingender Saiten sei erwähnt:

Krigar-Menzel und Raps, Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1891 und 1893.

16) *§ 626, p. 492.* Wegen des longitudinalen Stosses cylindrischer Stäbe vergl. u. a. die Abhandlung von Voigt in Bd. 19 der Annalen der Physik und Chemie, 1883.

17) *§ 632, p. 509.* Bei den *Schwingungen der Membran* ist mathematisch besonders schwierig der Nachweis, dass eine beliebige gespannte Membran erstens als Ganzes harmonisch schwingen kann (Grundton) und dann eine unendliche Zahl weiterer harmonischer Schwingungen besitzt, bei denen sich dieselbe irgendwie durch Knotenlinien in kleine Gebiete zerlegt (Obertöne). In dieser Hinsicht grundlegend sind die Abhandlungen von

Schwarz in Bd. XV der Acta Societatis scientiarum Fennicae, 1885 und
Poincaré in Bd. VIII der Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1894.

---

Zum Schluss werde der deutsche Leser noch ausdrücklich auf das andere englische Fundamentalwerk über Mechanik, den *Treatise on Natural Philosophy* von Thomson und Tait verwiesen. Ohne irgend sonst auf den hochbedeutenden

Inhalt desselben einzugehen, will ich hier nur bemerken, dass dort die kleinen Schwingungen der Systeme sowie die Variationsprincipien der Mechanik eine sehr eingehende Darstellung erfahren, welche auch neben den Entwickelungen von Routh ein besonderes Interesse beanspruchen dürften. Die erste Auflage der Natural Philosophy erschien 1867 in einem Bande und wurde 1871 von Helmholtz und Wertheim in's Deutsche übertragen (Braunschweig, Vieweg). Inzwischen sei der Leser auf die viel reichhaltigere zweite englische Auflage verwiesen, welche 1883—1886 in zwei Abtheilungen erschienen ist (Cambridge).

Von Hrn. Routh selbst besitzen wir noch ein zweibändiges Lehrbuch der Statik (Cambridge 1891—92, zweite Auflage des ersten Bandes 1896); auch auf dieses Werk sei bei vorliegender Gelegenheit ausdrücklich aufmerksam gemacht.

Göttingen, 14. August 1898.

# Namenregister.

**Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.**

# Alphabetisches Verzeichniss der definirten Ausdrücke.

**Die Zahlen geben die Seite an, auf welcher die Definition zu finden ist.**